

Ομαδα Α

A-1. Βρείτε ποιες από τις ακολουθίες συγκλίνουν και ποια είναι τα αντίστοιχα όρια.

$$(1a) a_n = \sqrt[n]{1+2^{-n}}, \quad (1b) b_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \log(n), \quad (1c) c_n = n(\sqrt[n]{e} - 1).$$

A-2. Εξετάσετε ως προς την σύγκλιση και απόλυτη σύγκλιση κάθε μια από τις σειρές

$$(2a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^n}{4^n}, \quad (2b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log(n))^4}, \quad (2c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{\sqrt{n^3+1}}$$

A-3. (3a) Βρείτε το πολυώνυμο Taylor $P_{3,1}(x)$ για την συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$

(3b) Εξετάσετε αν η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$ και αν ναι βρείτε την $f'(0)$.

A-4. (4a) Βρείτε την παραγώγο $\frac{dy}{dx}$ για την συνάρτηση $y = y(x)$ που ορίζεται πεπλεγμένα από την σχέση: $y^2 + x^2 + e^{y+x} = x^3 y$.

(4b) Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{2^{n+1}}$.

Ομαδα Β

B-5. Βρείτε το πολυώνυμο Taylor $P_{n,0}(x)$ για την $f(x) = \log(1+x)$. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τη μορφή του υπολοίπου $R_{n,0}(x) = \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt$, βρείτε ένα πεπερασμένο άθροισμα που προσεγγίζει τον $\log(\frac{4}{3})$ με σφάλμα μικρότερο του 10^{-2} .

B-6. (6a) Αν $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση και $0 < f'(x) < \frac{1}{x}$ για κάθε $x \in (0, \infty)$ δείξτε ότι $|f(2x) - f(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in (0, \infty)$.

(6b) Δώστε παραδειγμα ακολουθίας $\{a_n\}$ η οποία να έχει ακριβώς 3 σημεία συσσωρευσεως και να ισχύει $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ και $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

B-7. (7a) Βρείτε την συνάρτηση όριο για την ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = \frac{n^2 x^3}{1+n^2 x^2}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, όπου $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$. Είναι η σύγκλιση ομοιομορφή στο $[\frac{1}{2}, 2]$;

(7b) Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + \frac{1}{n^2})$ συγκλίνει και ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{e} - 1)$ αποκλίνει.

Απαντήστε σε όλα τα θέματα της ομάδας Α και σε ένα από αυτά της ομάδας Β. Θα γραφτεί συνολικά 5 θέματα. Τα θέματα είναι ισοδύναμα.

Καλη επιτυχία