Παραδείγματα χώρων με νόρμα

Σε όλα τα παρακάτω παραδειγματα οι διανυσματικες πραξεις για μεν τις συναρτησεις ειναι

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

για δε τα διανύσματα ή τις ακολουθιες,

$$(x_1, x_2, x_3, \cdots) + (y_1, y_2, y_3, \cdots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \cdots)$$

$$\lambda(x_1, x_2, \cdots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots)$$

$\mathbb{R}^n$ Ο Ευκλειδιος χωρος $\mathbb{R}^n$ με την συνηθη αποσταση $\|x\| = (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2)^{\frac{1}{2}}$

l_p Για καθε p με $1 \leq p < \infty$, ο χώρος l_p των p-αθροισίμων ακολουθιών,

$$x = (x_1, x_2, x_3 \cdots) \in l_p \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty,$$

με νορμα: $\|x\|_{l_p} = (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}$

l_∞ Ο χώρος l_∞ των φραγμένων ακολουθιών,

$$x = (x_1, x_2, x_3 \cdots) \in l_\infty \quad \Leftrightarrow \quad \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k| < \infty,$$

με νορμα: $\|x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$

c Ο χώρος c των συγκλινουσων ακολουθιών,

$$x = (x_1, x_2, x_3 \cdots) \in c \quad \Leftrightarrow \quad \text{το οριο } \lim_{n \to \infty} x_n = l$$

υπαρχει και ειναι πεπερασμένο, με νορμα: $\|x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$.

c_0 Ο χώρος c_0 των μηδενικων ακολουθιών,

$$x = (x_1, x_2, x_3 \cdots) \in c_0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \to \infty} x_n = 0$$

με νορμα: $\|x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$.

$(C[a,\, b],\, \|\ \|_\infty)$ Ο χώρος $C[a,b]$ των συνεχων συναρτησεων $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, σε κλειστο διαστημα $[a,b]$, με νορμα: $\|f\| = \|f\|_\infty = \sup_{a \leq t \leq b} |f(t)|$

$(C[a,\, b],\, \|\ \|_p)$ Για καθε p με $1 \leq p < \infty$, ο χώρος $C[a,b]$ των συνεχων συναρτησεων $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, με νορμα:

$$\|f\| = \|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

c_{00} Ο χώρος c_{00} ολων των **τελικα μηδενικων ακολουθιων**,

$$x = (x_1, x_2, \cdots) \in c_{00} \quad \Leftrightarrow \quad \exists N = N(x): \quad x_n = 0 \text{ για } n \geq N,$$

με νορμα: $\|x\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|$.

Σημειωση: Ο χωρος αυτος μπορει να κατασκευασθει ως εξης: για $n \geq 1$ θετομε

$$R_n = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, 0, 0, \cdots,) : x_k \in \mathbb{R}\}$$

δηλαδη γραφομε τα διανυσματα του $\mathbb{R}^n$ ως ακολουθιες προσθέτοντας απειρα το πληθος μηδενικα για τις συντεταγμένες απο $n+1$ και περα, και εν συνεχεια

$$c_{00} = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$$

$\mathcal{P}$ Ο χώρος $\mathcal{P}$ ολων των πολυωνυμων

$$\mathcal{P} = \{P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m : m \in \mathbb{N}, a_k \in \mathbb{R}\}$$

με νορμα: $\|P\| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

(η αθροιση ειναι παντα πεπερασμενη, το ανω οριο ομως του αθροισματος μεταβάλλεται)

Χώρος γινόμενο: Αν $(X, \|\ \|_X)$ και $(Y, \|\ \|_Y)$ ειναι δυο χώροι με νορμα τοτε ο χωρος γινομενο

$$Z = X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\},$$

με νορμα,

$$\|z\| = \|(x, y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y,$$

ειναι χώρος με νορμα.

Αντιπαράδειγμα: Ο χωρος s ολων των ακολουθιων $x = (x_1, x_2, \cdots)$ με μετριχη

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}$$

ειναι μετριχος χώρος αλλα οχι χωρος με νορμα (η μετριχη δεν προέρχεται απο νορμα).