Ασκήσεις Μιγαδικών Συναρτήσεων, Εαρινο Εξαμηνο 2022

Φυλ. 8

1. Υπολογισετε τα: (α) $\int_{|z|=1} \frac{1}{z(e^z-1)}\,dz$, (β) $\int_{|z|=2} \frac{1}{(z-1)^2 e^z}\,dz$.
Υπόδειξη: Και τα δύο υπολογίζονται με ακριβώς ίδιο τρόπο και χρήση του Θ.Ο.Υ., όπως στις Ασκήσεις 6, 7 του Φυλλαδίου 7.

2. Υπολογισετε το $\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$ οταν: (1) $f(z)=z^4+1$ και $\gamma(t)=2e^{it}, 0\le t\le 2\pi$. (2) $f(z)=\frac{z^2}{(1-z)^3}$ και $\gamma(t)=2e^{it}, 0\le t\le 2\pi$.
Υπόδειξη: Η f είναι ακεραία και έχει τέσσερις απλές ρίζες, όλες μέσα στο $\mathrm{Int}(\gamma)$. Άρα, δεν μηδενίζεται πάνω στο γ^*. Άμεσα, από την Αρχή Ορίσματος, βρίσκουμε $\int\limits_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} = 4\cdot 2\pi i = 8\pi i$.
Όμοια σκεπτόμαστε και για το (2), απλά τώρα η f έχει και έναν πόλο τάξης 3 μέσα στο $\mathrm{Int}(\gamma)$.

3. Βρειτε τα ολοκληρωματα: (1) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx$, (2) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x+x^2}{(1+x^2)(4+x^2)}\,dx$, (3) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$, (4) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2-1}{x^4+3x^2+2}\,dx$.
Υπόδειξη: (1) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z)=\frac{z^2}{1+z^4}$ και την καμπύλη γ που αποτελείται από το ευθύγραμμο τμήμα $[-R,R]$ και το άνω ημικύκλιο C_R του κύκλου κέντρου 0 και ακτίνας R, όπου $R>1$. Η f έχει τέσσερις απλούς πόλους, εκ των οποίων μόνο οι δύο βρίσκονται στο εσωτερικό της γ. Άρα, με χρήση Θ.Ο.Υ. μπορούμε να υπολογίσουμε το $\int\limits_\gamma f(z)dz$. Όμως,

$$\int\limits_\gamma f(z)dz = \int\limits_{C_R} f(z)dz + \int\limits_{[-R,R]} f(z)dz,$$

για κάθε $R>1$. Όμως, πάνω στο ημικύκλιο C_R έχουμε $|f(z)|\le \frac{|z|^2}{|z|^4-1} = \frac{R^2}{R^4-1}$. Έτσι, $|\int\limits_{C_R} f(z)dz| \le \frac{R^2}{R^4-1}\int\limits_{C_R} dz = \frac{\pi R^3}{R^4-1}\to 0$, καθώς $R\to+\infty$. Συνεπώς,

$$\int\limits_\gamma f(z)dz = \lim_{R\to+\infty}\int\limits_{[-R,R]} f(z)dz = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{1+x^4}.$$

Όμοια υπολογίζουμε και τα (2), (3), (4).

4. Αν α ειναι πραγματικος αριθμος βρειτε το ολοκληρωμα $\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2+\alpha^2)^3}\,dx$.
Υπόδειξη:Αρχικά, εξετάζουμε την περίπτωση που $a\neq 0$. Θεωρούμε την καμπύλη γ της προηγούμενης άσκησης. Η συνάρτηση μέσα στο ολοκλήρωμα είναι άρτια και άρα μπορούμε να γράψουμε

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^3} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^3}.$$

Ας είναι $f(z) = \frac{1}{(z^2+a^2)^3}$ που έχει πόλους τάξης 3 στα $\pm ia$. Μόνο ένας εξ αυτών ανήκει στο $\mathrm{Int}(\gamma)$ και εκτελούμε ακριβώς την ίδια διαδικασία με την προηγούμενη άσκηση.
Αν $a = 0$, θεωρούμε $f(z) = \frac{1}{z^6}$. Παίρνουμε την καμπύλη δ που αποτελείται από τα ημικύκλια C_ϵ, C_R κέντρου 0 και ακτινών ϵ, R, αντίστοιχα, με $\epsilon < R$, και τα ευθύγραμμα τμήματα $[-R,-\epsilon], [\epsilon, R]$. Θεωρούμε τη δ θετικά προσανατολισμένη. Η f έχει πόλο τάξης 6 στο 0 και είναι ολόμορφη στο $\mathrm{Int}(\gamma)$ με $0 \in \mathrm{Ext}(\gamma)$. Επομένως, λόγω και προσανατολισμού,

$$0 = \int\limits_{\delta} f = \int\limits_{[-R,-\epsilon]} f - \int\limits_{C_\epsilon} f + \int\limits_{[\epsilon,R]} f + \int\limits_{C_R} f.$$

Το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι το $\int\limits_{[\epsilon,R]} f$, καθώς $\epsilon \to 0$ και $R \to +\infty$.

5. Βρειτε τα ολοκληρωματα: (1) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+4}\, dx$, (2) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(x)}{1+x^4}\, dx$, (3) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^2+4x+5}\, dx$.
Υπόδειξη: (1) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+4}$ που έχει απλούς πόλους στα $\pm 2i$. Θεωρούμε την ίδια καμπύλη γ όπως στις προηγούμενες ασκήσεις, οπότε $2i \in \mathrm{Int}(\gamma)$ και $-2i \in \mathrm{Ext}(\gamma)$. Άμεσα από το Θ.Ο.Υ., υπολογίζουμε το $\int\limits_{\gamma} f(z)dz$.
Δείχνουμε ότι το μέτρο του $\int\limits_{C_R} f(z)dz$ τείνει στο 0, καθώς $R \to +\infty$. Άρα,

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{[-R,R]} f(z)dz = \int\limits_{\gamma} f(z)dz.$$

Όμως,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+4}dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+4}dx + i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2+4}dx,$$

οπότε το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι απλά το πραγματικό μέρος του $\int\limits_{\gamma} f(z)dz$.
Όμοια εργαζόμαστε και για τα ολοκληρώματα (2) και (3).

6. Δειξετε: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(3x)}{(1+x^2)^2}\, dx = \frac{2\pi}{e^3}$
Υπόδειξη: Παίρνουμε $f(z) = \frac{e^{3iz}}{(1+z^2)^2}$ η οποία έχει διπλούς πόλους στα $\pm i$. Θεωρούμε την κλασική γ, οπότε μόνο $i \in \mathrm{Int}(\gamma)$. Από το Θ.Ο.Υ. έχουμε $\int\limits_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \mathrm{Res}(f, i) = \cdots = \frac{2\pi}{e^3}$. Έπειτα συνεχίζουμε πανομοιότυπα με την προηγούμενη άσκηση.

7. Δειξετε οτι $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\, dx = \pi$.
Υπόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = \frac{1+2iz-e^{2iz}}{z^2}$. Από το ανάπτυγμα Taylor της εκθετικής μπορούμε να δείξουμε ότι η f έχει απαλείψιμη ανωμαλία στο 0 και άρα μπορεί να θεωρηθεί ακεραία. Θεωρούμε την κλασική καμπύλη γ και έτσι $\int\limits_{\gamma} f(z)dz =$

0, από το Θεώρημα Cauchy. Έχουμε

$$\int\limits_{C_R} f(z)dz = \int\limits_{C_R} \frac{1-e^{2iz}}{z^2}dz + \int\limits_{C_R} \frac{2i}{z}dz \to 0 - 2\pi,$$

καθώς $R \to +\infty$. Συνεπώς, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+2ix-e^{2ix}}{x^2}dx = 2\pi$, κάτι που θα μας οδηγήσει στο ζητούμενο μέσω της τριγωνομετρικής ταυτότητας $1-\cos(2x) = 2\sin^2(x)$.

8. Βρειτε τα ολοκληρωματα: (1) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sin\theta}\, d\theta$, (2) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5+3\cos\theta}\, d\theta$.
Υπόδειξη: (1) Κάνουμε την 'αλλαγή μεταβλητής' $z = e^{i\theta}$, οπότε $dz = ie^{i\theta}d\theta$ ή $d\theta = \frac{dz}{iz}$. Θεωρούμε την καμπύλη $\gamma(\theta) = e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi)$ που έχει ίχνος τον μοναδιαίο κύκλο. Επίσης, $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}$. Συνεπώς,

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sin(\theta)}d\theta = \int\limits_\gamma \frac{1}{2+\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}}\frac{dz}{iz} = \int\limits_\gamma \frac{dz}{2iz+\frac{z^2}{2}-\frac{1}{2}}.$$

Βλέπουμε ότι η ολοκληρώσιμη συνάρτηση έχει δύο απλούς πόλους. Βρίσκουμε με διακρίνουσα τους πόλους, ελέγχουμε ποιοι εκ των πόλων βρίσκονται μέσα στον μοναδιαίο δίσκο και εφαρμόζουμε το Θ.Ο.Υ. για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος. Όμοια υπολογίζουμε και το (2).

9. Βρειτε τα ολοκληρωματα: (1) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2+\cos\theta)^2}\, d\theta$, (2) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{a-\cos\theta}\, d\theta$, $(a \in \mathbb{R},\ a > 1)$.
Υπόδειξη: Κάνουμε τον ίδιο μετασχηματισμό με την Άσκηση 8, γυρνάμε τα ολοκληρώματα σε επικαμπύλια, βρίσκουμε ανώμαλα σημεία, υπολογίζουμε ολοκληρωτικά υπόλοιπα και εφαρμόζουμε το Θ.Ο.Υ. για τον υπολογισμό.

10. Δειξετε οτι

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}\, d\theta = \begin{cases} \frac{2\pi}{1-a^2}, & 0 < a < 1 \\ \frac{2\pi}{a^2-1}, & 1 < a < \infty. \end{cases}$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιώντας τον ίδιο μετασχηματισμό με τις προηγούμενες ασκήσεις έχουμε

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2a\cos(\theta)+a^2} = \int\limits_\gamma \frac{-idz}{-az^2+(a^2+1)z-a},$$

όπου γ ο μοναδιαίος κύκλος. Με χρήση διακρίνουσας βρίσκουμε ότι οι ρίζες του παρονομαστή είναι τα a και $\frac{1}{a}$, που αποτελούν εμφανώς απλούς πόλους.
Αν $0 < a < 1$, τότε μόνο ο πόλος a βρίσκεται στον μοναδιαίο δίσκο. Υπολογίζουμε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο και από το Θ.Ο.Υ. έχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα.
Αν $1 < a < +\infty$, μόνο ο πόλος $\frac{1}{a}$ βρίσκεται στον μοναδιαίο δίσκο και κάνουμε την ανάλογη διεργασία.

11. Βρειτε το ολοκληρωμα $\int_0^{2\pi} \frac{1}{7-6\cos\theta+2\sin\theta}\, d\theta$.
Υπόδειξη: Ακολουθούμε ακριβώς την ίδια διαδικασία με τις Ασκήσεις 8,9,10.

12. Βρειτε το ολοκληρωμα
$$\int_{|z|=7} \frac{1+z}{1-\cos z}\, dz.$$
Υπόδειξη: Γράφουμε $f(z) = \frac{1+z}{1-\cos(z)}$. Η f έχει ανώμαλα σημεία σε όλα τα z για τα οποία $\cos(z) = 1$, δηλαδή για $z = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Άμεσα, όλα είναι πόλοι. Από αυτά, μόνο τα $0, 2\pi, -2\pi$ βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου $|z| = 7$. Για το 0, $f(z) = \frac{(1+z)(1+\cos(z))}{\sin^2(z)}$, οπότε άμεσα $\lim\limits_{z\to 0} z^2 f(z) = 2$ και έχουμε πόλο τάξης 2. Λειτουργούμε όμοια για τους άλλους δύο πόλους και εφαρμόζουμε το Θ.Ο.Υ. για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος.

13. Βρειτε το ολοκληρωμα
$$\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z(1-z^2)^2}\, dz.$$
Υπόδειξη: Εύκολα προκύπτει ότι η συνάρτηση του ολοκληρώματος έχει απλό πόλο στο 0 και διπλούς πόλους στα ± 1. Ελέγχουμε ποιοι πόλοι ανήκουν στο εσωτερικό της καμπύλης ολοκλήρωσης και εφαρμόζουμε το Θ.Ο.Υ.