Ασκήσεις Μιγαδικών Συναρτήσεων, Εαρινο Εξαμηνο 2022
Φυλ. 7

1. Υποθετουμε οτι η f ειναι ολομορφη μη σταθερη στο ανοικτο Ω και εχει ριζα ταξης 1 στο σημειο $z_0 \in \Omega$. Δειξετε οτι

$$\text{Res}(\frac{1}{f}, z_0) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Υπόδειξη: Λόγω υπόθεσης, μπορούμε να γράψουμε $f(z) = (z - z_0)g(z)$, γύρω από το z_0, όπου g ολόμορφη γύρω από το z_0 με $g(z_0) \neq 0$. Με παραγώγιση, $f'(z_0) = g(z_0)$. Άρα, $\frac{1}{f(z)} = \frac{\frac{1}{g(z)}}{z-z_0}$ με την $\frac{1}{g}$ να είναι ολόμορφη γύρω από το z_0 και άρα να αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά. Συνδυάζοντας, προκύπτει το ζητούμενο.

2. Βρειτε το $\text{Res}(f, 0)$ και $\text{Res}(f, 1)$ για την $f(z) = \frac{z+1}{z(z-1)^2}$
Υπόδειξη: Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι το 0 αποτελεί πόλο τάξης 1 και το 1 πόλο τάξης 2. Άρα, $\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \to 0} z f(z) = 1$. Όμοια εργαζόμαστε και για το 1.

3. Βρειτε το $\text{Res}(f, z_0)$ σε ολα τα ανωμαλα σημεια z_0 της $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$
Υπόδειξη: Γράφουμε $f(z) = \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}$, οπότε έχουμε δύο πόλους τάξης 2. Για τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα χρησιμοποιούμε τα αντίστοιχα όρια.

4. Βρειτε το $\text{Res}(f, z_0)$ στα ανωμαλα σημεια για τις

$$f(z) = z^4 \cos(\frac{1}{z}),\ f(z) = \frac{z^3}{z^4 - 1},\ f(z) = z^2 e^{\frac{-1}{z}} - \frac{1}{z} e^{\frac{1}{z^2}}.$$

Υπόδειξη: Για την πρώτη συνάρτηση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γνωστό ανάπτυγμα της $\cos(z)$ εφαρμοσμένο για το $\frac{1}{z}$ και να υπολογίσουμε τον συντελεστή a_{-1} στο ανάπτυγμα Laurent γύρω από το 0. Ομοίως και για την τρίτη συνάρτηση, αλλά με χρήση της εκθετικής. Σε αυτές τις δύο δεν υπάρχουν άλλα ανώμαλα σημεία.
Για τη δεύτερη συνάρτηση, βρίσκουμε ότι έχουμε τέσσερις πόλους τάξης 1 και χρησιμοποιούμε τα κατάλληλα όρια.

5. Αν $f(z)$ ειναι ολομορφη στο $\Delta(1, 0, 1)$ με απλο πολο στο $z_0 = 1$ και $g(z) = f(z^2)$ βρειτε το $\text{Res}(g, 1)$ συναρτησει του $\text{Res}(f, 1)$.
Υπόδειξη: Λόγω του απλού πόλου, μπορούμε να γράψουμε $f(z) = \frac{h(z)}{z-1}$ γύρω από το 1, με h ολόμορφη γύρω από το 1 με $h(1) \neq 0$. Άρα, η h αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά $h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-1)^n$, γύρω από το 1. Άμεσα, $a_0 = \text{Res}(f, 1)$. Με χρήση της h βρίσκουμε το ανάπτυγμα Laurent της g και υπολογίζουμε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο συναρτησει του a_0.

6. Βρειτε τα ολοκληρωματα

$$(1)\ \int_{|z|=2} \frac{1}{z^4+z^2}\,dz,\ (2)\ \int_{|z|=1} z^2\sin(\frac{1}{z})\,dz,\ (3)\ \int_{\gamma} \frac{1}{z(z^2-1)(z^2+16)}\,dz,$$

οπου στο τελευταιο γ ειναι η περιμετρος του τετραγωνου με κορυφες $(\pm 2, \pm 2)$.
Υπόδειξη: (1) Γράφουμε $f(z) = \frac{1}{z^4+z^2} = \frac{1}{z^2(z-i)(z+i)}$, οπότε η f εμφανίζει απλούς πόλους στα $\pm i$ και διπλό πόλο στο 0. Όλοι εξ αυτών περιέχονται στο εσωτερικό του κύκλου $|z| = 2$. Υπολογίζουμε εύκολα με όρια ότι $\mathrm{Res}(f,0) = 1, \mathrm{Res}(f,-i) = -\frac{i}{2}, \mathrm{Res}(f,i) = \frac{i}{2}$. Από το Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων (Θ.Ο.Υ.), έχουμε

$$\int\limits_{|z|=2} f(z)dz = 2\pi i(1 - \frac{i}{2} + \frac{i}{2}) = 2\pi i.$$

Όμοια εργαζόμαστε και για τα (2) και (3), εξετάζοντας ποια ανώμαλα σημεία βρίσκονται στο εσωτερικό της καμπύλης επί της οποίας ολοκληρώνουμε.

7. Βρειτε τα ολοκληρωματα

$$(1)\ \int_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1}\,dz,\ (2)\ \int_{|z-1|=1} \frac{1}{z^4-1}\,dz,\ (3)\ \int_{|z|=1} \frac{\sin(z)+\sin(\frac{1}{z})}{z}\,dz$$

Υπόδειξη: Τα (1) και (2) υπολογίζονται εύκολα, ακριβώς όπως στην προηγούμενη άσκηση.
Για το (3), θέτουμε $f(z) = \frac{\sin(z)+\sin(\frac{1}{z})}{z}$ και το μόνο ανώμαλο σημείο της f είναι το 0. Γράφουμε το γνωστό ανάπτυγμα των $\sin(z)$ και $\sin(\frac{1}{z})$, προσθέτουμε τα αναπτύγματα και διαιρούμε με το z. Ο όρος a_{-1} της παραγόμενης σειράς είναι το $\mathrm{Res}(f,0)$, με το 0 να βρίσκεται στο εσωτερικό της καμπύλης $|z| = 1$. Από το Θ.Ο.Υ. θα είναι $\int\limits_{|z|=1} f(z)dz = 2\pi i \cdot a_{-1}$.

8. Κατασκευασετε συναρτηση $f(z)$ ολομορφη στο $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ με πολο στο ταξης 2 στο 0, με ουσιωδη ανωμαλια στο 1, και με $\mathrm{Res}(f,0) = 1$ και $\mathrm{Res}(f,1) = 0$.
Υπόδειξη: Η f έχει πόλο τάξης 2 στο 0, οπότε θα μπορεί να γραφεί ως κλάσμα με παρονομαστή z^2. Για τον αριθμητή, θέλουμε ουσιώδη ανωμαλία στο 1, οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την $e^{\frac{1}{z-1}}$. Θέτουμε $f(z) = A\frac{e^{\frac{B}{z-1}}}{z^2}$, όπου $A, B \in \mathbb{C}$. Από τις δοθείσες συνθήκες για τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα, υπολογίζουμε τα A και B.