Ασκήσεις Μιγαδικών Συναρτήσεων, Εαρινο Εξαμηνο 2022
Φυλ. 6

1. (Γενικευμενο Λημμα Schwarz). Εστω $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ αναλυτικη με $|\phi(z)| < 1$ για καθε $z \in \mathbb{D}$. Δειξετε οτι
   α. Αν $z, w \in \mathbb{D}$ τοτε $\left|\frac{\phi(z)-\phi(w)}{1-\overline{\phi(z)}\phi(w)}\right| \le \left|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}\right|$.

   β. Αν $z \in \mathbb{D}$ τοτε $|\phi'(z)| \le \frac{1-|\phi(z)|^2}{1-|z|^2}$.

   Υπόδειξη: α. Γνωρίζουμε ότι για $w \in \mathbb{D}$, οι απεικονίσεις $T_w(z) = -\frac{z-w}{1-\bar{w}z}$ και $T_{\phi(w)}(z) = \frac{z-\phi(w)}{1-\overline{\phi(w)}z}$ είναι αυτομορφισμοί του $\mathbb{D}$. Άρα η σύνθεση $f = T_{\phi(w)} \circ \phi \circ T_w^{-1}$ είναι απεικόνιση από το $\mathbb{D}$ στο $\mathbb{D}$ με $f(0) = 0$. Εφαρμόζουμε το Λήμμα Schwarz.
   β. Στην πρώτη ανισότητα παίρνουμε όριο καθώς $w \to z$.

2. Εστω $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ ολομορφη, και φραγμενη δηλ. $M = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| < \infty$. Δειξετε οτι:
   (i) $|f'(0)| \le M + |f(0)|$.
   (ii) $|f(z)| \le (M + |f(0)|)|z| + |f(0)|$, για καθε $z \in \mathbb{D}$.
   Υπόδειξη: Θεωρούμε την απεικόνιση $g(z) = \frac{f(z)-f(0)}{M+|f(0)|}$. Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ και ότι $g(0) = 0$. Άμεσα από το Λήμμα Schwarz προκύπτουν και τα δύο ζητούμενα.

3. Βρειτε το αναπτυγμα Laurent της συναρτησης $f(z) = z + \frac{1}{1-z}$ στους δακτυλιους:
   (α) $\Delta(0, 0, 1)$, (β) $\Delta(0, 1, \infty)$, (γ) $\Delta(1, 0, 1)$, (δ) $\Delta(1, 1, \infty)$
   Υπόδειξη: Γενικά, για τα αναπτύγματα Laurent κάνουμε κατάλληλη χρήση της γεωμετρικής σειράς.
   (α) Στον δακτύλιο $\Delta(0, 0, 1)$ ισχύει $|z| < 1$, οπότε έχουμε $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$. Άρα, $f(z) = 1 + 2z + \sum_{n=2}^{+\infty} z^n$ (που είναι πολυώνυμο Taylor).
   (β) Τώρα, $|z| > 1$ και έτσι $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$, οπότε γράφουμε $\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z(\frac{1}{z}-1)} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}}$ και χρησιμοποιούμε τη γεωμετρική σειρά για το $\frac{1}{z}$.
   (γ) Γράφουμε $f(z) = 1 + (z-1) - \frac{1}{z-1}$.
   (δ) Όμοια με το (γ).

4. Βρειτε το αναπτυγμα Laurent της συναρτησης $f(z) = z^3 \sin(\frac{1}{z})$ στον δακτυλιο $\Delta(0, 0, \infty)$.
   Υπόδειξη: Θυμόμαστε ότι $\sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, οπότε βρίσκουμε το ανάπτυγμα του $\sin(\frac{1}{z})$.

5. Βρειτε το αναπτυγμα Laurent της συναρτησης $f(z) = \frac{2z}{1+z^2}$ σε ολους τους δακτυλιους που δημιουργουνται απο τα ανωμαλα σημεια της.
   Υπόδειξη: Τα ανώμαλα σημεία είναι τα $\pm i$ και έτσι οι αντίστοιχοι δακτύλιοι θα είναι $\Delta(i, 0, 2), \Delta(i, 2, +\infty), \Delta(-i, 0, 2), \Delta(-i, 2, +\infty)$. Για τον πρώτο δακτύλιο έχουμε $|z - i| < 2$ και γράφουμε $f(z) = \frac{2z}{(z-i)(z+i)}$ και σπάμε σε απλά κλάσματα. Θα βρούμε $f(z) = \frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i}$. Το δεύτερο κλάσμα είναι σε κατάλληλη μορφή, οπότε ασχολούμαστε μόνο με το πρώτο. Έχουμε $\frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i+z-i} = \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-1}{2i}} = \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{1-\frac{i(z-i)}{2}}$ με $\left|\frac{i(z-i)}{2}\right| < 1$.
   Άρα, με γεωμετρική σειρά, $\frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{i(z-i)}{2}\right)^n$. Προσθέτουμε το $\frac{1}{z-i}$ κι έχουμε το

ανάπτυγμα Laurent.
Όμοια εργαζόμαστε και για τα υπόλοιπα αναπτύγματα.

6. Βρειτε και ταξινομησετε τις μεμονωμενες ανωμαλιες των συναρτησεων

$$(a)\ f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2} + \frac{z^2 - 5z + 6}{z - 2},\ \ (b)\ g(z) = z^3(\cos(1/z) - 1),\ \ (c)\ h(z) = \frac{\sin(\pi z)}{z - 1}$$

Υπόδειξη:(α) Εύκολα οι μεμονωμένες ανωμαλίες της f είναι τα 0 και 2. Ισχύει $z^2 - 5z + 6 = (z-2)(z-3)$, οπότε το $z - 2$ ¨απαλείφεται¨, ενώ το κομμάτι $\frac{e^z-1}{z^2}$ είναι ολόμορφη συνάρτηση γύρω από το 2. Άρα το ανάπτυγμα Laurent γύρω από το 2 δεν θα έχει πρωτεύον μέρος, οπότε το 2 αποτελεί απαλείψιμη ανωμαλία. Για το 0, έχουμε ότι $e^z - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, ενώ το δεύτερο κλάσμα είναι ολόμορφο γύρω από το 0. Άρα, στο ανάπτυγμα Laurent, το πρωτεύον μέρος θα έχει μόνο τον πρώτο όρο (για $n = -1$) και έχουμε πόλο πρώτης τάξης.
Όμοια εργαζόματε για τα (b) και (c), χρησιμοποιώντας τα γνωστά αναπτύγματα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

7. Βρειτε και ταξινομησετε τις μεμονωμενες ανωμαλιες των συναρτησεων

$$(a)\ f(z) = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2,\ (b)\ f(z) = \frac{z\cos(z) - z}{\sin^3(z)},\ (c)\ f(z) = \frac{1}{z^4 + z^2},\ (d)\ f(z) = \frac{(z+1)^3 - 1}{z^3}$$

Υπόδειξη: Τα (a), (c) και (d) γίνονται γρήγορα με πράξεις. Εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε όρια (π.χ. για το (a) έχουμε $\lim_{z\to 0} f(z) = \infty$, οπότε το 0 είναι πόλος).
Για το (b), τα ανώμαλα σημεία είναι όλα τα z που μηδενίζουν το $\sin(z)$, δηλαδή όλα τα $z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Για περιττούς ακεραίους k, έχουμε $\lim_{z\to k\pi} f(z) = \infty$, οπότε έχουμε πόλους. Ελέγχουμε παρόμοια και για τους άρτιους ακεραίους. Έπειτα, βρίσκουμε τις τάξεις των πόλων με χρήση ορίων.

8. Χαρακτηρισετε το ανωμαλο σημειο 0 για τις συναρτησεις

$$(a)\ f(z) = \frac{\sin(z)}{z^2} - \frac{1}{z},\qquad (b)\ g(z) = \frac{z + (1-z)(1-e^z)}{z^2(1-z)}$$

Υπόδειξη:(a) Γράφουμε το γνωστό ανάπτυγμα του $\sin(z)$ και άμεσα, με τις πράξεις, προκύπτει ότι έχουμε ένα απαλείψιμο ανώμαλο σημείο.
(b) Κάνουμε πράξεις στην g και περιοριζόμαστε στον δακτύλιο $\Delta(0,0,1)$. Χρησιμοποιούμε την γεωμετρική σειρά και το γνωστό ανάπτυγμα της e^z και θα προκύψει $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (1 - \frac{1}{(n+2)!}) z^n$.

9. Αν $f(z)$ ειναι ακεραια συναρτηση και για καποιο $k \in \mathbb{N}$ συναρτηση $g(z) = z^k f(1/z)$ ειναι φραγμενη σε καποιο δακτυλιο $\Delta(0,0,\delta)$ με $\delta > 0$ δειξετε οτι η $f(z)$ ειναι πολυωνυμο.
Υπόδειξη: Από την υπόθεση προκύπτει άμεσα ότι $\lim_{z\to 0} f(\frac{1}{z}) = \infty$, που μας δίνει ότι το ∞ αποτελεί πόλο της f. Όμως, η f ως ακεραία μπορεί να αναπτυχθεί ως δυναμοσειρά γύρω από το 0. Συνδυάζοντας τα δύο βλέπουμε ότι το ανάπτυγμα της f θα πρέπει να έχει πεπερασμένους το πλήθος όρους.

10. Εστω $f(z)$ ακεραια συναρτηση που δεν ειναι πολυωνυμο. Δειξετε οτι για καθε $c \in \mathbb{C}$ υπαρχει ακολουθια μιγαδικων $\{z_n\}$ με $z_n \to \infty$ ωστε $f(z_n) \to c$.

Υπόδειξη: Η f ως ακεραία που δεν είναι πολυώνυμο, μπορεί να αναπτυχθεί σε δυναμοσειρά με άπειρους το πλήθος όρους. Άρα, η $f(\frac{1}{z})$ θα έχει το 0 ως ουσιώδη ανωμαλία. Συνεπώς, η f θα έχει το ∞ ως ουσιώδη ανωμαλία. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Casorati-Weierstrass.

11. Υποθετουμε οτι οι $f(z), g(z)$ εχουν ουσιωδη ανωμαλια στο 0. Τι ειδους ανωμαλια μπορει να εχει η $f(z) + g(z)$ στο 0; Δωσετε παραδειγματα.
Υπόδειξη: Αν $f(z) = -g(z)$, άμεσα η $f(z)+g(z)$ θα έχει απαλείψιμη ανωμαλία. Με παρόμοιο σκεπτικό μπορούμε να δείξουμε ότι για κατάλληλες f, g, η $f + g$ μπορεί να έχει οποιοδήποτε είδος ανωμαλίας.

12. Βρειτε και χαρακτηρισετε ολα τα ανωμαλα σημεια της $f(z) = \frac{z}{e^{iz}-1}$.
Υπόδειξη: Τα ανώμαλα σημεία της f είναι τα $z = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Για $k \neq 0$ έχουμε $\lim\limits_{z\to 2k\pi} f(z) = \infty$ και άρα έχουμε πόλους. Μένει να εξετάσουμε το $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$.

13. Αν η $f(z)$ ειναι ολομορφη και μη μηδενικη στον δισκο $D(0, r)$, $r > 0$, τι ειδους ανωμαλια εχει η $g(z) = f(z)e^{\frac{1}{z}}$ στο 0;
Υπόδειξη: Η f είναι ολόμορφη και μη μηδενική, οπότε μπορεί να γραφεί ως δυναμοσειρά $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, $a_0 \neq 0$, γύρω από το 0. Συνδυάζουμε με το γνωστό ανάπτυγμα της εκθετικής, αλλά εφαρμοσμένο στο $\frac{1}{z}$ και από το ανάπτυγμα Laurent που θα προκύψει, θα έχουμε ουσιώδη ανωμαλία.

14. Αν οι $f(z)$ και $g(z)$ εχουν πολο στο z_0, τι ειδους ανωμαλια μπορει να εχουν οι $f(z)g(z)$ και $f(z)/g(z)$ στο z_0;
Υπόδειξη: Καθώς το z_0 είναι πόλος, μπορούμε να γράψουμε $f(z) = \frac{h_1(z)}{(z-z_0)^{p_1}}$ και $g(z) = \frac{h_2(z)}{(z-z_0)^{p_2}}$, όπου h_1, h_2 ολόμορφες γύρω από το z_0 με $h_1(z_0) \neq 0 \neq h_2(z_0)$ και p_1, p_2 φυσικοί αριθμοί. Από τον πολλαπλασιασμό, αναγκαστικά η $f \cdot g$ θα έχει επίσης πόλο. Αντίθετα, με κατάλληλες επιλογές h_1, h_2, p_1, p_2, η διαίρεση $\frac{f}{g}$ μπορεί να έχει οποιοδήποτε είδος ανωμαλίας.

15. Βρειτε τα μεμονωμενα ανωμαλα σημεια της $f(z) = \frac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$
Υπόδειξη: Άμεσα προκύπτει ότι τα ανώμαλα σημεία είναι το 0 (λόγω του $\frac{1}{z}$) και όλα εκείνα τα z για τα οποία $\sin(\frac{1}{z}) = 0$.