Ασκήσεις Μιγαδικών Συναρτήσεων, Εαρινο Εξαμηνο 2022

Φυλ. 5

1. Δειξετε οτι υπαρχει συναρτηση $f(z)$ ολομορφη στον μοναδιαιο δισκο $\mathbb{D}$ τετοια ωστε $f(z)^4 + 1 = z^4$ για καθε $z \in \mathbb{D}$. Ποσες τετοιες συναρτησεις υπαρχουν;
   Υπόδειξη: Η συνάρτηση $z \mapsto z^4 - 1$ είναι ολόμορφη και χωρίς ρίζες στον απλά συνεκτικό μοναδιαίο δίσκο. Άρα, μπορεί να οριστεί ολόμορφα η $\mathrm{Log}(z^4 - 1)$. Θεωρούμε $f(z) = e^{\frac{1}{4}\mathrm{Log}(z^4-1)}$.

2. Εξετασετε αν μπορουν να ορισθουν οι $\log(e^z - i)$ και $\log(\cos(z))$ σαν ολομορφες συναρτησεις στον $\mathbb{D}$.
   Υπόδειξη: Η εξίσωση $e^z - i$ δεν έχει ρίζες μέσα στον μοναδιαίο δίσκο. Άρα, η συνάρτηση $z \mapsto e^z - i$ απεικονίζει τον μοναδιαίο δίσκο σε έναν απλά συνεκτικό τόπο που δεν περιέχει το 0. Άρα μπορεί να οριστεί ολόμορφα η $\log(e^z - i)$. Όμοια σκεπτόμαστε και για το δεύτερο.

3. Βρειτε την ακτινα συγκλισης καθε σειρας (α) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$, (β) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} z^n$, (γ) $\sum_{n=0}^{\infty} n^3 z^n$ (δ) $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$, (ε) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{2^n}$, (ζ) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n$, (η) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} z^n$
   Υπόδειξη: Θυμόμαστε ότι η ακτίνα σύγκλισης R υπολογίζεται ως $\frac{1}{R} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, όπου (a_n) η ακολουθία των συντελεστών στη σειρά.
   (α) Έχουμε $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \limsup_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{-1}$. Άρα, $R = e$.
   Όμοια σκεπτόμαστε και για τα (β), (γ), (ζ) και (η).
   (δ)Η ακολουθία των συντελεστών είναι $a_n = \begin{cases} 1, & n = 2^k, k \in \mathbb{N} \\ 0, & n \neq 2^k, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$ Άρα $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1} = 1$ και έτσι $R = 1$. Όμοια εργαζόμαστε και για το (ε).

4. Βρειτε την ακτινα συγκλισης καθε σειρας

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad a_n = \begin{cases} n \text{ αν } n \text{ αρτιος} \\ 2^n \text{ αν } n \text{ περιττος} \end{cases} \qquad (b) \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \quad b_n = \begin{cases} 2^k \text{ αν } n = k^2, & k \in \mathbb{Z} \\ 3^{-n} \text{ αν } n \neq k^2, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

   Υπόδειξη:(a) Έχουμε $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n} = 2$, που μας δίνει $R = \frac{1}{2}$.
   Όμοια κάνουμε και το (b).

5. (α) Βρειτε ολα τα $z \in \mathbb{C}$ για τα οποια η σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n$ συγκλινει.
   (β) Βρειτε το 'μεγαλυτερο' ανοικτο $\Omega \subset \mathbb{C}$ στο οποιο η συναρτηση $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n$ ειναι αναλυτικη.
   Υπόδειξη: (α) Με εφαρμογή του Κριτηρίου της Ρίζας βρίσκουμε ότι για να συγκλίνει η σειρά, πρέπει $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| \leq 1$. Η αυστηρή ανισότητα φαίνεται άμεσα ότι ισχύει για το δεξί ημιεπίπεδο και άρα για όλα τα z στο δεξί ημιεπίπεδο έχουμε σύγκλιση. Για την ισότητα παίρνουμε τον φανταστικό άξονα. Εδώ χρειάζεται διερεύνηση γιατί για $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 1$ το Κριτήριο δεν αποκρίνεται.
   (β) Η απάντηση δίνεται άμεσα από το πρώτο ερώτημα.

6. Αν η δυναμοσειρα $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ εχει ακτινα συγκλισης R, ποια ειναι η ακτινα συγκλισης της $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{2n}$;
   Υπόδειξη: Γράφουμε την ακολουθία (b_n) των συντελεστών της δεύτερης σειράς (οι περιττοί συντελεστές είναι 0, ενώ οι άρτιοι ίσοι με a_n). Η αρχική ακολουθία (a_n) ωστόσο, ίσως πιάνει το lim sup για τους περιττούς όρους. Δηλαδή $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|b_n|} \leq \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ και άμεσα προκύπτει το ζητούμενο για την ακτίνα σύγκλισης.

7. Αν οι δυναμοσειρες $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ εχουν ακτινες συγκλισης R_1 και R_2 αντιστοιχα, δειξετε οτι για την ακτινα συγκλισης R της σειρας $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)z^n$ ισχυει

$R \geq \min(R_1, R_2)$.
Υπόδειξη: Αν υποθέσουμε ότι $R_1 < R_2$, διασπώντας, δεδομένης της σύγκλισης, τη σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n)z^n$ δείχνουμε ότι αναγκαστικά $R \leq R_1$ και μάλιστα $R = R_1 = \min(R_1, R_2)$. Όμοια για $R_2 < R_1$. Αν, όμως, $R_1 = R_2$, τότε σίγουρα $R \geq R_1$ και μάλιστα η ανισότητα μπορεί να γίνει αυστηρή παίρνοντας $b_n = -a_n, n \in \mathbb{N}$.

8. Βρειτε τις δυναμοσειρες για την συναρτηση $f(z) = \frac{z}{z-3}$ (α) με κεντρο το $z_0 = 0$, (β) με κεντρο το $z_0 = 1$ (γ) με κεντρο το $z_0 = i$, και τις αντιστοιχες ακτινες συγκλισης.
Υπόδειξη: (α) Ο μεγαλύτερος δίσκος κέντρου 0 στον οποίο είναι ολόμορφη η f θα έχει ακτίνα 3. Για $|z| < 3$ γράφουμε $f(z) = \frac{z}{z-3} = \frac{z}{3(\frac{z}{3}-1)} = -\frac{z}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}}$. Όμως $|z| < 3$ δίνει $|\frac{z}{3}| < 1$. Άρα, με χρήση της γεωμετρικής σειράς,
$$f(z) = -\frac{z}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n = -\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n.$$
Άμεσα, η ακτίνα σύγκλισης προκύπτει πράγματι 3.
Όμοια δουλεύουμε και τα υπόλοιπα.

9. Βρειτε την δυναμοσειρα για την συναρτηση $f(z) = ze^z$ με κεντρο το σημειο $z_0 = 2$.
Υπόδειξη: Γράφουμε $ze^z = (z-2)e^z + 2e^z = (z-2)e^{z-2}e^2 + 2e^{z-2}e^2$ και γνωρίζουμε ότι $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

10. Δειξετε οτι η συναρτηση $f(z) = \log(\frac{1}{1-z})$ ειναι καλα ορισμενη και αναλυτικη στον μοναδιαιο δισκο $\mathbb{D}$, και βρειτε το αναπτυγμα της σε δυναμοσειρα με κεντρο το 0.
Υπόδειξη: Το πρώτο σκέλος γίνεται όπως η Άσκηση 2. Βλέπουμε ότι $f(z) = -\log(1-z)$, $f'(z) = \frac{1}{1-z}$, $f''(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$ κ.ο.κ. Επομένως, $f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 1, f'''(0) = 2, f^{(4)}(0) = 2 \cdot 3$ κ.ο.κ. Συνολικά $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n-1)!}{n!}z^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n}$.

11. Μια ακεραια συναρτηση λεγεται αρτια αν $f(-z) = f(z)$ για καθε $z \in \mathbb{C}$. Δειξετε οτι αν $f(z)$ ειναι αρτια ακεραια τοτε οι συντελεστες της δυναμοσειρας της με κεντρο το $z_0 = 0$, με περιττους δεικτες, ειναι ολοι μηδεν.
Υπόδειξη: Αναπτύσσουμε το $f(z)$ σε δυναμοσειρά γύρω από το 0. Γράφουμε το αντίστοιχο ανάπτυγμα για το $f(-z)$. Αφαιρώντας βρίσκουμε το ανάπτυγμα του $f(z) - f(-z)$ που θα πρέπει να είναι 0, για οποιαδήποτε επιλογή του z.

12. Αν $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ειναι αναλυτικη και εχει ριζα ταξης m σε καποιο $z_0 \in \Omega$ τοτε η f γραφεται $f(z) = g(z)^m$ για καθε z σε καποιο ανοικτο δισκο $D(z_0, r)$, $r > 0$.
Υπόδειξη: Αναπτύσσουμε την f σε δυναμοσειρά γύρω από το z_0 στον δίσκο $D(z_0, r)$ ως $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$. Από την υπόθεση, $f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$. Άρα οι όροι $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$ είναι μηδενικοί. Συνεπώς, $f(z) = (z-z_0)^m h(z)$, όπου h ολόμορφη και χωρίς ρίζες γύρω από το z_0. Με χρήση ρίζας, προκύπτει το ζητούμενο.

13. Αν f, g ειναι ακεραιες συναρτησεις και $f(e^{in}) = g(e^{in})$ για καθε $n \in \mathbb{N}$ δειξετε οτι $f \equiv g$.
Υπόδειξη: Η ακολουθία $e^{in} = \cos(n) + \sin(n)$ έχει σημεία συσσώρευσης όλα τα σημεία του μοναδιαίου κύκλου, που βρίσκονται μέσα στο $\mathbb{C}$. Χρησιμοποιούμε Αρχή Ταυτισμού.

14. Εστω Ω ανοικτο συνεκτικο και $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολομορφη. Υποθετομε οτι υπαρχει $a \in \Omega$ ωστε $|f(a)| \leq |f(z)|$ για καθε $z \in \Omega$. Δειξετε οτι ειτε $f(a) = 0$ ειτε η f ειναι σταθερη στο Ω.
Υπόδειξη: Αν το a είναι ρίζα της f έχουμε το ζητούμενο. Αν όχι, η δοθείσα συνθήκη μας δίνει ότι η f δεν θα έχει καθόλου ρίζες. Ορίζουμε, έτσι, την ολόμορφη $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ και χρησιμοποιούμε Αρχή Μεγίστου.

15. Υπαρχει αναλυτικη συναρτηση $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ ωστε $f(\frac{1}{n}) = \frac{n^2+1}{n^2}$ για καθε $n = 2, 3, 4, \cdots$ και $f(\frac{i}{2}) = \frac{i}{2}$;

<u>**Υπόδειξη:**</u> Έχουμε $\frac{n^2+1}{n^2} = 1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2$. Θέτουμε $g(z) = z^2 + 1$ και εφαρμόζουμε Αρχή Ταυτισμού. Όμως, $\left(\frac{i}{2}\right)^2 + 1 = \frac{3}{4} \neq \frac{i}{2}$.

16. Με χρηση της αρχης του ταυτισμου δειξετε οτι $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$ για καθε $z \in \mathbb{C}$.
<u>**Υπόδειξη:**</u> Ξέρουμε ότι η συγκεκριμένη ταυτότητα είναι αληθής στο $\mathbb{R}$. Παίρνουμε μία ακολουθία $(z_n) \subset \mathbb{R}$ που να συγκλίνει μέσα στο $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ και εφαρμόζουμε Αρχή Ταυτισμού.