Ασκήσεις Μιγαδικών Συναρτήσεων, Εαρινο Εξαμηνο 2022

Φυλ. 4

1. Εστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολομορφη με $f(z) = e^z$ για καθε z με $|z| = 1$. Δειξετε οτι $f(z) = e^z$ για καθε z με $|z| < 1$.
   Υπόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(z) = f(z) - e^z$, η οποία είναι ακεραία. Εφαρμόζουμε τον Ολοκληρωτικό Τύπο Cauchy για την h και για γ παραμετρικοποίηση του μοναδιαίου κύκλου. Τότε, για z με $|z| = 1$ έχουμε
   $$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$
   Όμως, $f(\zeta) = e^{\zeta}$ πάνω στη γ κι έχουμε το ζητούμενο.

2. Αν $f(z)$ ειναι ακεραια συναρτηση και $|f(z)| \leq \log(2 + |z|)$ για καθε $z \in \mathbb{C}$ δειξετε οτι η f ειναι σταθερη.
   Υπόδειξη: Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$. Η f είναι ακεραία, οπότε για $r > |z_0|$, η f είναι ολόμορφη σε τόπο που περιέχει το z_0, τον δίσκο $D(0, r)$, και $z_0 \in \mathrm{Int}(C(0, r))$. Από τον Ο.Τ.C.,
   $$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{2\pi i} \int_{C(0,r)} \frac{|f(z)|}{|z - z_0|^{n+1}} dz \leq \frac{n!}{2\pi i} \frac{\log(2 + r)}{r^{n+1}} 2\pi i r = \frac{n! \log(2 + r)}{r^n}.$$
   Όμως, η f είναι ακεραία, οπότε μπορούμε να αφήσουμε $r \to +\infty$ και να δείξουμε ότι $|f^{(n)}(z_0)| = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Καταλήγουμε στο ότι η παράγωγος της f είναι μηδενική, οπότε η f είναι σταθερή.

3. Αν $f(z)$ ειναι ακεραια συναρτηση και $|f(z)| \leq 1 + |z|^3$ για καθε $z \in \mathbb{C}$ δειξετε οτι η f ειναι πολυωνυμο. Ποιος ειναι ο βαθμος του πολυωνύμου;
   Υπόδειξη: Ακολουθώντας ακριβώς την ίδια διαδικασία με την προηγούμενη άσκηση, δείχνουμε ότι όλες οι $f^{(n)}, n > 3$, είναι μηδενικές. Με χρήση αντιπαραγώγων, φθάνουμε στο ζητούμενο και βρίσκουμε ότι ο βαθμός θα είναι το πολύ 3.

4. Αν f ειναι ακεραια συναρτηση και $\lim_{z \to \infty} \frac{f(z)}{z} = 0$ δειξετε οτι η f ειναι σταθερη.
   Υπόδειξη: Έστω $\epsilon > 0$. Από το όριο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για $|z| > \delta$ να ισχύει $|f(z)| < \epsilon |z|$. Θεωρούμε $r > \delta$ και $z \in \mathbb{C}$. Παίρνουμε Ο.Τ.C. για το $f'(z)$ σε κύκλο $C(z, r)$. Αφήνοντας $r \to +\infty$, θα βρούμε $|f'(z)| \leq \epsilon$, που μας οδηγεί στο ζητούμενο.

5. Αν $f(z) = u(z) + iv(z)$ είναι ακεραία με $u(z) \geq 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$ τότε η f είναι σταθερη.
   Υπόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(z) = e^{-f(z)}$, οπότε και η g είναι ακεραία ως σύνθεση ακεραίων. Συνεπώς, $|g(z)| = \cdots = e^{-u(z)} \leq 1, z \in \mathbb{C}$. Άρα, η g είναι ακεραία και φραγμένη, οπότε από το Θεώρημα Liouville θα είναι και σταθερή. Επομένως, υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{C}$, ώστε $e^{-f(z)} = c$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Παραγωγίζοντας οδηγούμαστε στο ζητούμενο.
   (Το ότι η e^{-f} είναι σταθερή, δεν σημαίνει απευθείας ότι και η f είναι σταθερή, αφού $e^{-f} = e^{-f+2k\pi i}, k \in \mathbb{Z}$.)

6. Εστω $f(z)$ ακεραια. Υποθετομε οτι υπαρχει $M \in \mathbb{R}$ ωστε $\mathrm{Re}(f(z)) \leq M$ για καθε $z \in \mathbb{C}$. Δειξετε οτι η f ειναι σταθερη.
Υπόδειξη: Θεωρούμε την $g(z) = e^{f(z)}, z \in \mathbb{C}$. Όπως πριν, η g θα είναι ακεραία και φραγμένη και χρησιμοποιώντας την ίδια διαδικασία έχουμε το ζητούμενο.

7. Υποθετομε οτι $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ειναι ολομορφη και υπαρχει θετικη σταθερα C ωστε $|f(z)| \leq Ce^x$ για καθε $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Δειξετε οτι υπαρχει $c \in \mathbb{C}$ με $|c| \leq C$ ωστε $f(z) = ce^z$ για καθε $z \in \mathbb{C}$.
Υπόδειξη: Θεωρούμε $g(z) = \frac{f(z)}{e^z}$. Η εκθετική συνάρτηση δεν έχει ρίζες και άρα η g είναι ακεραία. Άμεσα, από την υπόθεση, η g θα προκύψει φραγμένη, οπότε από το Θεώρημα Liouville υπάρχει $c \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε $g(z) = c, z \in \mathbb{C}$.

8. Εστω $f(z)$ ακεραια συναρτηση, μη σταθερη. Δειξετε οτι υπαρχει ακολουθια $\{z_n\}$ στο $\mathbb{C}$ τετοια ωστε $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = 0$
Υπόδειξη: Αν η f έχει κάποια ρίζα, το ζητούμενο ισχύει τετριμμένα. Αν δεν έχει καμμία ρίζα, τότε ορίζεται η ακεραία και μη σταθερή συνάρτηση $g = \frac{1}{f}$. Από το Θεώρημα Liouville, η g δεν μπορεί να είναι φραγμένη, οπότε θα υπάρχει ακολουθία $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$ με $\lim\limits_{n\to+\infty} g(z_n) = \infty$. Άμεσα φθάνουμε στο ζητούμενο.

9. Εστω $f(z)$ ακεραια συναρτηση. Υποθετουμε οτι το πεδιο τιμων $f(\mathbb{C})$ "παραλειπει" ενα μη κενο ανοικτο συνολο Ω, δηλ. $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C} \setminus \Omega$, τοτε το $f(\mathbb{C})$ μονοσυνολο, δηλ. η f ειναι σταθερη.
Υπόδειξη: Για $a \in \Omega$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $D(a, \delta) \subset \Omega$. Τότε $|f(z) - a| \geq \delta$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Συνεπώς, η $g(z) = \frac{1}{f(z)-a}$ είναι ακεραία και φραγμένη, οπότε το ζητούμενο προκύπτει από το Θεώρημα Liouville.

10. Αν f ειναι ολομορφη στον μοναδιαιο δισκο $\mathbb{D}$ και ισχυει $|f(z) - z| \leq 1 - |z|$ για καθε $z \in \mathbb{D}$ δειξετε οτι $f(z) = z$ για καθε $z \in \mathbb{D}$.
Υπόδειξη: Θεωρούμε την ολόμορφη στο $\mathbb{D}$ συνάρτηση $g(z) = f(z) - z$, η οποία θα έχει πολυώνυμο Taylor $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} z^n$ γύρω από το 0. Με χρήση του O.T.C. σε κύκλους $C(0, r)$ και αφήνοντας $r \to 1^-$, δείχνουμε ότι όλοι οι συντελεστές $\frac{g^{(n)}(0)}{n!}$ είναι μηδενικοί.

11. Για $n \geq 1$ και $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$ θετουμε

$$f(z) = (1 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n) \cos(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Δειξετε οτι για καθε $R > 0$ υπαρχει $z_0 \in D(0, R)$ ωστε $|f(z_0)| > 1$.
Υπόδειξη: Έστω ότι υπάρχει $R > 0$ τέτοιο ώστε $|f(z)| \leq 1$, για κάθε $z \in D(0, R)$. Όμως, $0 \in D(0, R)$ και $f(0) = 1$. Το ζητούμενο προκύπτει από Αρχή Μεγίστου.

12. Εστω f ακεραια συναρτηση. Για $r > 0$ θετουμε $m(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})| \, dt$. Δειξετε οτι αν $m(r) \leq M < \infty$ για καθε $r > 0$ τοτε η f ειναι σταθερη.
Υπόδειξη: Έστω $z \in \mathbb{C}$ και $r > |z|$. Θεωρούμε τον κύκλο $\gamma(t) = re^{it}, t \in [0, 2\pi)$.

Η f είναι ακεραία, οπότε από τον O.T.C.

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{(re^{it} - z)^2} ire^{it}dt.$$

Παίρνουμε μέτρα και θα προκύψει $|f'(z)| \leq \frac{rm(r)}{(r-|z|)^2} \leq \frac{Mr}{(r-|z|)^2}$. Αφήνοντας $r \to +\infty$, παίρνουμε το ζητούμενο.