Ασκήσεις Μιγαδικών Συναρτήσεων, Εαρινό Εξάμηνο 2022

Φυλ. 3

1. Βρειτε την εικονα της λωριδας $\{z : -\frac{\pi}{2} < \mathrm{Im}(z) < \frac{\pi}{2}\}$ μεσω της $f(z) = \frac{e^z-1}{e^z+1}$.
Υπόδειξη: Η f αποτελεί σύνθεση της εκθετικής e^z με τον ομογραφικό μετασχηματισμό $\frac{z-1}{z+1}$. Αρχικά, για $z = x+iy$ μέσα στη λωρίδα, έχουμε $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ και $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$. Συνεπώς το μέτρο του e^z μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρό ή μεγάλο, ενώ το όρισμά του παίρνει τιμές μεταξύ $-\frac{\pi}{2}$ και $\frac{\pi}{2}$. Άρα, η εκθετική απεικονίζει τη λωρίδα στο δεξί ημιεπίπεδο. Έπειτα, είναι εύκολο να δείξουμε ότι η $\frac{z-1}{z+1}$ στέλνει το δεξί ημιεπίπεδο επί του μοναδιαίου δίσκου.

2. Εστω Ω ανοικτο συνεκτικο υποσυνολο του $\mathbb{C}$ και $u(x,y) = u(x+iy) : \Omega \to \mathbb{R}$ συναρτηση. Υποθετουμε οτι υπαρχουν οι μερικες παραγωγοι $\frac{\partial u}{\partial x}$ και $\frac{\partial u}{\partial y}$ και μηδενιζονται σε καθε σημειο του Ω. Τοτε η u ειναι σταθερη συναρτηση.
Υπόδειξη: Καθώς $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ παντού, ολοκληρώνοντας έχουμε $u(x,y) = f_1(y) + c_1$, όπου f_1 πραγματική συνάρτηση που εξαρτάται μόνο από το y και $c_1 \in \mathbb{R}$ απόλυτη σταθερά. Χρησιμοποιώντας την άλλη μερική παράγωγο βρίσκουμε $u(x,y) = f_2(x) + c_2$. Άρα, $f_1(y) + c_1 = f_2(x) + c_2$, για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, κάτι που μας οδηγεί στο ζητούμενο.

3. Αν $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ειναι αναλυτικη στο ανοικτο συνεκτικο Ω και η $u(z) = \mathrm{Re}(f(z))$ ειναι σταθερη συναρτηση τοτε η f ειναι σταθερη συναρτηση.
Υπόδειξη: Γράφουμε $f = u + iv$, με $u = \mathrm{Re} f$ σταθερή και $v = \mathrm{Im} f$. Η f είναι αναλυτική, άρα ισχύουν οι εξισώσεις Cauchy-Riemann. Λόγω σταθερότητας, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, για κάθε $z = x+iy \in \Omega$. Άρα, το ίδιο θα ισχύει και για την v. Από την προηγούμενη άσκηση προκύπτει άμεσα το ζητούμενο.

4. Βρειτε μια παραμετρικοποιηση της περιμετρου του τετραγωνου με κορυφες
$$1+i, 1-i, -1+i, -1-i,$$
(με θετικη φορά) δηλ. βρειτε καμπυλη $\gamma(t) : [0,1] \to \mathbb{C}$ της οποιας το ιχνος $\widehat{\gamma}$ ειναι η εν λογω περιμετρος.
Υπόδειξη: Εργαζόμαστε όπως στην Άσκηση 15 του Φυλλαδίου 2. Απλά, τώρα, περιοριζόμαστε στο $[0,1]$, οπότε θα σπάσουμε την καμπύλη στα διαστήματα $[0, \frac{1}{4}], [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}], [\frac{3}{4}, 1]$. Υπό μία έννοια θα κάνουμε κάτι σαν αναπαραμετρικοποίηση, βάζοντας το $4t$ στη θέση του t, αφού υποτετραπλασιάστηκε το μήκος του κάθε διαστήματος. Έτσι, ξεκινώντας από το $1+i$ έχουμε
$$\gamma(t) = \begin{cases} (1-4t)(1+i) + 4t(-1+i), & t \in [0, \frac{1}{4}] \\ (2-4t)(-1+i) + (4t-1)(-1-i), & t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]. \end{cases}$$
Συνεχίζουμε όμοια για το υπόλοιπο μισό της καμπύλης.

5. Βρειτε το ολοκληρωμα $\int_\gamma \frac{e^z}{z}\, dz$ οπου γ η καμπυλη της προηγουμενης ασκησης.

Υπόδειξη: Η καμπύλη γ είναι μία απλή, κλειστή, θετικά προσανατολισμένη, τμηματικά λεία καμπύλη με $0 \in \mathrm{Int}(\gamma)$ και η εκθετική συνάρτηση $f(z) = e^z$ είναι ακέραιη. Άρα, από τον Ολοκληρωτικό Τύπο Cauchy έχουμε απευθείας

$$\int\limits_{\gamma} \frac{e^z}{z} dz = \int\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{z-0} dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i.$$

6. Βρειτε το ολοκληρωμα $\int_\gamma \frac{e^z}{z}\, dz$ οπου $\gamma(t) = e^{it},\ 0 \le t \le 2\pi$, και στην συνεχεια βρειτε το πραγματικο ολοκληρωμα $\int_0^{2\pi} e^{\cos(t)} \cos(\sin(t))\, dt$.
<u>**Υπόδειξη:**</u> Το μιγαδικό ολοκλήρωμα υπολογίζεται ακριβώς όπως αυτό της προηγούμενης άσκησης, απλά με χρήση κύκλου αντί τετραγώνου. Για το δεύτερο μέρος, παρατηρούμε ότι

$$\int\limits_{\gamma} \frac{e^z dz}{z} = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{e^{e^{it}} i e^{it}}{e^i t} dt = \int\limits_{0}^{2\pi} i e^{cos(t)+isin(t)} dt.$$

Συνεχίζοντας τις πράξεις και έχοντας ήδη βρει το $\int\limits_{\gamma} \frac{e^z}{z} dz$, οδηγούμαστε στον ζητούμενο υπολογισμό.

7. Υπολογισετε τα

(a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2+z-1}{z(z-2)}\, dz,\ \gamma(t) = e^{it}, 0 \le t \le 2\pi.$ (b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{ze^z + iz^2}{z-1}\, dz,\ \gamma(t) = 2e^{it}, 0 \le t \le 2\pi.$

(c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin(z^2+1)}{z^2-3z+2}\, dz,\ \gamma(t) = (3/2)e^{it}, 0 \le t \le 2\pi.$ (d) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos(\pi z)}{z^2+1}\, dz,\ \gamma(t) = i + e^{it}, 0 \le t \le 2\pi.$

<u>**Υπόδειξη:**</u> Όλα υπολογίζονται με χρήση του Ολοκληρωτικού Τύπου Cauchy (O.T.C.)
(α) Η καμπύλη πάνω στην οποία ολοκληρώνουμε είναι κύκλος κέντρου 0 και ακτίνας 1. Συνεπώς, $0 \in \mathrm{Int}(\gamma)$, ενώ $2 \in \mathrm{Ext}(\gamma)$. Άρα, η συνάρτηση $f(z) = \frac{z^2+z-1}{z-2}$ είναι ολόμορφη σε τόπο που περιέχει στο εσωτερικό του τη γ (π.χ. ο δίσκος κέντρου 0 και ακτίνας $\frac{3}{2}$). Από τον O.T.C. βρίσκουμε

$$\int\limits_{\gamma} \frac{z^2+z-1}{z(z-2)} dz = \int\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{z-0} dz = 2\pi i f(0) = \pi i.$$

(β) Λύνεται με παρόμοιο τρόπο, καθώς τώρα $1 \in \mathrm{Int}(\gamma)$.
(γ) Ισχύει $z^2-3z+2 = (z-1)(z-2)$ με $1 \in \mathrm{Int}(\gamma)$ και $2 \in \mathrm{Ext}(\gamma)$. Θέτουμε $f(z) = \frac{\sin(z^2+1)}{z-2}$ και εφαρμόζουμε τον O.T.C.
(δ) Παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή και σκεφτόμαστε όπως στο (γ).

8. Υπολογισετε το $\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z(z-1)}\, dz$

(1) στην καμπυλη $|z| = 1/3$,
(2) στην καμπυλη $|z-1| = 1/3$,
(3) στην καμπυλη $|z-i| = 1/3$.
<u>**Υπόδειξη:**</u> (1) Εδώ $\gamma(t) = \frac{1}{3}e^{it}, t \in [0, 2\pi)$. Τότε $0 \in \mathrm{Int}(\gamma)$ και $1 \in \mathrm{Ext}(\gamma)$. Θέτουμε

$f_1(z) = \frac{\cos(z)}{z-1}$ και έτσι από τον O.T.C.

$$\int\limits_\gamma \frac{\cos(z)}{z(z-1)} dz = \int\limits_\gamma \frac{f_1(z)}{z-0} dz = 2\pi i f_1(0) = -2\pi i.$$

(2) Εδώ $\gamma(t) = 1 + \frac{1}{3}e^{it}, t \in [0, 2\pi)$, οπότε τώρα τα $0, \frac{1}{3}$ λειτουργούν αντίστροφα. Παίρνουμε κατάλληλη συνάρτηση f_2 και εφαρμόζουμε τον O.T.C.
(3) Αυτήν τη φορά $\gamma(t) = i + \frac{1}{3}e^{it}$, οπότε $0, 1 \in \mathrm{Ext}(\gamma)$. Άρα, η συνάρτηση που ολοκληρώνουμε είναι ολόμορφη σε απλά συνεκτικό τόπο που περιέχει τη γ. Το Θεώρημα Cauchy μας δίνει την απάντηση.

9. Υπολογισετε τα

$$(a) \int_\gamma \frac{z^2+z-1}{z^2(z-2)} \, dz, \ \gamma(t) = e^{it}, 0 \le t \le 2\pi. \qquad (b) \int_\gamma \frac{ze^z}{(z-1)^2} \, dz, \ \gamma(t) = 2e^{it}, 0 \le t \le 2\pi.$$

$$(c) \int_\gamma \frac{\sin(z)}{z^3} \, dz, \ \gamma(t) = e^{it}, 0 \le t \le 2\pi. \quad (d) \int_\gamma \left(e^z + \frac{\cos(z)}{z}\right)^2 dz, \ \gamma(t) = 2e^{it}, 0 \le t \le 2\pi.$$

Υπόδειξη: (a) Αυτήν τη φορά χρησιμοποιούμε τον Ολοκληρωτικό Τύπο Cauchy για Παραγώγους. Ισχύουν $0 \in \mathrm{Int}(\gamma)$ και $2 \in \mathrm{Ext}(\gamma)$. Θέτουμε $f(z) = \frac{z^2+z-1}{z-2}$ και η f είναι ολόμορφη σε απλά συνεκτικό τόπο που περιέχει τη γ. Τότε

$$\int\limits_\gamma \frac{z^2+z-1}{z^2(z-2)} dz = \int\limits_\gamma \frac{f(z)}{(z-0)^{1+1}} dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(0).$$

Υπολογίζουμε την παράγωγο της f και βρίσκουμε το ζητούμενο.
Με παρόμοιο τρόπο υπολογίζουμε και τα ολοκληρώματα (b),(c) και (d).

10. Βρειτε το $\int_\gamma \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz$ οπου γ ειναι η περιφερεια $|z-1| = 1$.
Υπόδειξη: Η δοθείσα περιφέρεια είναι ο κύκλος κέντρου 1 και ακτίνας 1. Άμεσα, $1 \in \mathrm{Int}(\gamma)$. Θέτουμε $f(z) = z^n, n \in \mathbb{N}$, και η f είναι ακέραιη. Τότε, από τον O.T.C. βρίσκουμε

$$\int\limits_\gamma \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz = \int\limits_\gamma \frac{f(z)}{(z-1)^{n-1+1}} dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!} f^{(n-1)}(1) = 2\pi n i.$$