Μιγαδικη Αναλυση, Εαρινό Εξάμηνο 2022

Ασκήσεις, Φυλ. 2

1. Βρείτε τις εικόνες των παρακάτω συνόλων μέσω της εκθετικής συνάρτησης $f(z) = e^z$.

$$A = \{z : \mathrm{Re}(z) > 1\},\ \ B = \{z : \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)\},\ \ C = \{z : -1 < \mathrm{Re}(z) < 1,\ \text{και}\ -1 < \mathrm{Im}(z) < 1\},$$
$$D = \{z : 0 < \mathrm{Re}(z) < 1, \mathrm{Im}(z) > 0\} \cup \{z : 0 < \mathrm{Im}(z) < 1, \mathrm{Re}(z) > 0\}$$

<u>**Υπόδειξη:**</u> Θέτουμε $z = x + iy$. Τότε $f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$ και εξετάζουμε τη μορφή κάθε συνόλου. Για το A θέλουμε $\mathrm{Re}(z) > 1$, δηλαδή $x > 1$ ή ισοδύναμα $e^x > e$. Επομένως το μέτρο του $f(z)$ θα είναι πάντα μεγαλύτερο του e. Επίσης, για σταθεροποιημένο x, αφήνοντας το y ελεύθερο να διατρέχει το $\mathbb{R}$, το σύνολο $\{e^x \cdot e^{iy} : y \in \mathbb{R}\}$ αποτελεί κύκλο κέντρου 0 και ακτίνας e^x. Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω, $f(A) = \mathbb{C} \setminus \overline{D(0, e)}$. Όμοια εργαζόμαστε και για τα υπόλοιπα.

2. Δειξετε οτι:
(α) Η συναρτηση $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$ απεικονιζει τον μοναδιαιο δισκο $\mathbb{D}$ επι του του δεξιου ημιεπιπεδου $\Pi^+ = \{z : \mathrm{Re}(z) > 0\}$, και ειναι 1-1.
(β) Η συναρτηση $g(z) = e^z$ απεικονιζει το αριστερο ημιεπιπεδο $\Pi^- = \{z : \mathrm{Re}(z) < 0\}$ στον τρυπημενο μοναδιαιο δισκο στο $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, και οτι για καθε $w \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ υπαρχουν απειρα το πληθος $z \in \Pi^-$ ωστε $g(z) = w$.
(γ) Συμπερανετε οτι η συναρτηση $h(z) = e^{-\frac{1+z}{1-z}}$ απεικονιζει τον $\mathbb{D}$ στο $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ και για καθε $w \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ υπαρχουν απειρα το πληθος $z \in \mathbb{D}$ ωστε $h(z) = w$.
<u>**Υπόδειξη:**</u> (α) Θέτουμε $z = x + iy$, οπότε για $z \in \mathbb{D}$, θα πρέπει $x^2 + y^2 < 1$. Κάνοντας πράξεις, δείχνουμε ότι $f(z) = f(x + iy) = \cdots = \frac{1-x^2-y^2+iy}{(1-x)^2+y^2}$. Άμεσα, $\mathrm{Re}f(z) > 0$. Για το επί και για το 1-1, μπορούμε να πάμε με τον ορισμό.
(β) Για $z = x + iy$ και $z \in \Pi^-$, θα έχουμε $x < 0$. Τότε, $|e^z| = |e^{x+iy}| = e^x \in (0, 1)$. Επίσης, λόγω της περιοδικότητας των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, έχουμε $e^z = e^{x+iy} = e^{x+iy+i2k\pi}$, για κάθε ακέραιο k.
Για το (γ) συνδυάζουμε τα δύο πρώτα ερωτήματα.

3. Βρειτε ολα τα $z \in \mathbb{C}$ για τα οποια $e^z = 1 + i$
<u>**Υπόδειξη:**</u> Γράφουμε $e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + ie^x \sin x$. Εξισώνοντας πραγματικά με φανταστικά μέρη, προκύπτει το σύστημα
$$\begin{cases} e^x \cos y = 1 \\ e^x \sin y = 1. \end{cases}$$
Λύνουμε το σύστημα και προκύπτουν οι άπειρες το πλήθος λύσεις $z = \sqrt{2} + i(2k\pi + \frac{\pi}{4}), k \in \mathbb{Z}$.

4. Βρειτε ολες τις τιμες των: 2^i, $\quad i^i$, $\quad (-1)^{2i}$
<u>**Υπόδειξη:**</u> Για το πρώτο, έχουμε $2^i = e^{i\log 2} = e^{i(\log|2|+i2k\pi)} = e^{-2k\pi+i\log 2} = e^{-2k\pi}[\cos(\log 2) + i\sin(\log 2)], k \in \mathbb{Z}$. Με παρόμοιο σκεπτικό εργαζόμαστε και για τα υπόλοιπα.

5. Βρειτε το πραγματικο και φανταστικο μερος των e^{e^z}, z^z, οπου $z \in \mathbb{C}$ $z \neq 0$.
<u>**Υπόδειξη:**</u> Για το z^z γράφουμε $z = x + iy$ και $z = re^{i\theta}, \theta = \mathrm{Arg}(z)$. Τότε $z^z = e^{z\mathrm{Log}z} = e^{(x+iy)\mathrm{Log}(re^{i\theta})} = e^{(x+iy)(\log r+i\theta)}$. Κάνουμε τις πράξεις και εύκολα βρίσκουμε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος. Για το e^{e^z} αρκεί να θέσουμε $z = x + iy$ και το αποτέλεσμα προκύπτει πιο γρήγορα.

6. Βρειτε ολα τα $z \in \mathbb{C}$ για τα οποια $\cos(z) = 2$
<u>**Υπόδειξη:**</u> Θυμόμαστε ότι για $z = x + iy$, έχουμε $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$. Άρα

θέλουμε να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{cases} \cos x \cosh y = 2 \\ \sin x \sinh y = 0. \end{cases}$$

Από τη δεύτερη εξίσωση, προκύπτει ότι $\sin x = 0$ (η $\sinh y = 0$ οδηγεί σε άτοπο) και άρα $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Επιστρέφουμε στην πρώτη και βλέπουμε ότι εν τέλει πρέπει $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Έπειτα, βρίσκουμε το y θυμόμενοι ότι $\cosh y = \frac{e^y+e^{-y}}{2}$.

7. Για $z \in \mathbb{C}$, λυσετε την εξισωση $\cos(w) = z$. Τι συμπερασματα προκυπτουν για την 'αντιστροφη συναρτηση' $\arccos(z)$;
   Υπόδειξη: Για z γνωστό, θα έχουμε $\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2} = z$, που μετά από πράξεις δίνει $e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$. Χρησιμοποιούμε διακρίνουσα για να βρούμε το e^{iw} και επιστρέφουμε στο w θυμόμενοι ότι $e^{iw} = e^{iw+i2k\pi}$, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Θα βρούμε αριθμήσιμες το πλήθος λύσεις και η $\arccos(z)$ θα πρέπει να οριστεί με κλάδους.
8. Δειξετε οτι υπαρχει $t_0 \in \mathbb{R}$ ωστε $|\cos(it)| > 100$ για $|t| > t_0$.
   Υπόδειξη: Έχουμε $|\cos(it)| = |\frac{e^t+e^{-t}}{2}| = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$. Άρα, θέλουμε $e^t + e^{-t} > 200$ ή ισοδύναμα $e^{2t} - 200e^t + 1 > 0$. Θέτοντας $\zeta = e^{2t}$, λύνουμε τη δευτεροβάθμια ανίσωση $\zeta^2 - 200\zeta + 1 > 0$ και προκύπτει το ζητούμενο.
9. Δειξετε οτι:
   (α) $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$,
   (β) $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$,
   (γ) $\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$,
   για καθε $z, w \in \mathbb{C}$.
   Υπόδειξη: (α)Έχουμε $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ και $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$. Όμοιες είναι εκφράσεις και για τα $\cos w, \sin w$. Αντικαθιστούμε στο δεξί μέλος και μετά από εύκολες πράξεις θα προκύψει $\frac{e^{i(z+w)}-e^{-i(z+w)}}{2}$ που είναι ίσο με το $\cos(z+w)$.
   Με παρόμοιο σκεπτικό εργαζόμαστε και στα (β) και (γ).
10. Βρειτε το συνολο $\{z \in \mathbb{C} : \cos(z) = 0\}$ των ριζων της συναρτησης $f(z) = \cos(z)$.
    Υπόδειξη: Γίνεται ακριβώς όπως η Άσκηση 6.
11. Εστω $a \in \mathbb{D}$. Δειξετε οτι ο ομογραφικος μετασχηματισμος $T_a(z) = \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$ απεικονιζει τον μοναδιαιο δισκο $\mathbb{D}$ επι του εαυτου του.
    Υπόδειξη: Το γεγονός ότι όλοι οι ομογραφικοί μετασχηματισμοί μπορούν να θεωρηθούν 1-1 απεικονίσεις του εκτεταμένου μιγαδικού επιπέδου $\hat{\mathbb{C}}$ επί του εαυτού του, σε συνδυασμό με τις Ασκήσεις 7 και 8 του 1ου Φυλλαδίου, δίνουν άμεσα το ζητούμενο.
12. Υπολογισετε το $\int_\gamma (z^2 + \frac{1}{z})\, dz$, (α) στην καμπλυλη $\gamma(t) = e^{it},\ 0 \le t \le 2\pi,$ (β) στην καμπυλη $\gamma(t) = 1 + it,\ 0 \le t \le 1$.
    Υπόδειξη: (α) Για $\gamma(t) = e^{it}$, έχουμε άμεσα ότι $\gamma'(t) = ie^{it}$. Τότε, σύμφωνα με γνωστό θεώρημα, $\int\limits_\gamma (z^2 + \frac{1}{z})dz = \int\limits_0^{2\pi} (\gamma(t)^2 + \frac{1}{\gamma(t)})\gamma'(t)dt = \int\limits_0^{2\pi} ie^{it}(e^{i2t} + e^{-it})dt = \int\limits_0^{2\pi} (ie^{i3t} + i)dt$. Στη συνέχεια ολοκληρώνουμε κατά τον κλασικό τρόπο (ή εναλλακτικά ξεχωρίζουμε πραγματικά και φανταστικά μέρη με την ταυτότητα του Euler) και βρίσκουμε το αποτέλεσμα.
    Όμοια διαδικασία ακολουθούμε και στο (β), απλά με κάπως περισσότερες πράξεις.

13. Αν γ_1, γ_2 ειναι δυο απλες καμπυλες με το ιδιο ιχνος στο Ω και $f : \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχης συναρτηση δειξετε οτι

$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_{\gamma_2} f(z)\, dz$$

<u>**Υπόδειξη:**</u> Θέτουμε $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \Omega$ και $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \Omega$. Σε περίπτωση που οι γ_1, γ_2 έχουν πεδίο ορισμού μία ένωση τέτοιων διαστημάτων, λειτουργούμε παρόμοια. Πρακτικά, η μία καμπύλη είναι αναπαραμετροποίηση της άλλης, λόγω του ίδιου ίχνους, και άρα υπάρχει αύξουσα συνάρτηση $\sigma : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$ τέτοια ώστε $\gamma_1(t) = \gamma_2(\sigma(t)), t \in [a_1, b_1]$. Άρα,

$$\int\limits_{\gamma_1} f = \int\limits_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)dt = \int\limits_{a_1}^{b_1} f(\gamma_2(\sigma(t)))\gamma_2'(\sigma(t))\sigma'(t)dt = \int\limits_{a_2}^{b_2} f(\gamma_2(s))\gamma_2'(s)ds = \int\limits_{\gamma_2} f,$$

κάνοντας μία απλή αλλαγή μεταβλητής.

14. Υπολογισετε το $\int_\gamma (|z|^2 + 2\overline{z})\, dz$ στην καμπλυλη $\gamma(t) = \begin{cases} t + it^2, & 0 \le t \le 1 \\ \sqrt{2}e^{i\frac{t\pi}{4}}, & 1 < t \le 2. \end{cases}$

<u>**Υπόδειξη:**</u> Αρχικά, $\gamma'(t) = \begin{cases} 1 + 2it, & 0 < t < 1 \\ \frac{i\pi\sqrt{2}}{4}e^{i\frac{t\pi}{4}}, & 1 < t < 2. \end{cases}$ Έπειτα, ακολουθώντας την κλασική διαδικασία, σπάμε το ολοκλήρωμα και έχουμε

$$\int\limits_{\gamma} (|z|^2 + 2\overline{z})dz = \int\limits_{0}^{1} (|t + it^2|^2 + 2(t - it^2))(1 + 2it)dt + \int\limits_{1}^{2} (2 + 2\sqrt{2}e^{-i\frac{t\pi}{4}})\frac{i\pi\sqrt{2}}{4}e^{i\frac{t\pi}{4}}\, dt.$$

Στη συνέχεια, κάνουμε τις πράξεις και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα.

15. Υπολογισετε το ολοκληρωμα $\int_\gamma (z + \frac{1}{z-1})\, dz$ οπου γ ειναι η περιμετρος του παραλληλογραμμου με κορυφες i, $-i$, $2 + i$, $2 - i$

<u>**Υπόδειξη:**</u> Το βασικό κομμάτι της άσκησης είναι να βρεθεί μία παραμετρικοποίηση της περιμέτρου του παραλληλογράμμου. Θα βρούμε καμπύλη $\gamma : [0, 4] \to \mathbb{C}$ που να έχει ίχνος τη ζητούμενη περίμετρο. Θα ξεκινήσουμε από το i και θα διαγράψουμε την περίμετρο κατά τη θετική φορά. Θυμόμαστε ότι το ευθύγραμμο τμήμα $L = [z_1, z_2]$ μπορεί να παραμετρικοποιηθεί ως $L(t) = (1 - t)z_1 + tz_2, t \in [0, 1]$. Με αυτό στο μυαλό, γράφουμε

$$\gamma(t) = \begin{cases} (1 - t)i + t(-i), & t \in [0, 1] \\ (2 - t)(-i) + (t - 1)(2 - i), & t \in [1, 2] \\ (3 - t)(2 - i) + (t - 2)(2 + i), & t \in [2, 3] \\ (4 - t)(2 + i) + (t - 3)i, & t \in [3, 4]. \end{cases}$$

Ύστερα, όπως στις προηγούμενες ασκήσεις, υπολογίζουμε την παράγωγο της γ, αντικαθιστούμε στο ολοκλήρωμα και το σπάμε σε τέσσερα επιμέρους και τέλος, κάνουμε τις πράξεις ώσπου να βρούμε το αποτέλεσμα.
(Εναλλακτικά, λύνεται σαφώς ταχύτερα σπώντας το ολοκλήρωμα και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Cauchy και τον Ολοκληρωτικό Τύπο Cauchy.)