**Μιγαδική Ανάλυση, Εαρινό Εξάμηνο 2022**

Ασκησεις, Φυλ. 1

1. Υπολογισετε (α) $\sqrt{i}$, (β) $\sqrt[4]{i}$, (γ) $\sqrt{1+i}$.

   **Υπόδειξη:** (α) Για το $\sqrt{i}$ ψάχνουμε όλους τους μιγαδικούς $z = x + iy$ τέτοιους ώστε $z^2 = i$ ή ισοδύναμα $(x + iy)^2 = i$. Κάνοντας τις πράξεις, βρίσκουμε $x^2 - y^2 + i2xy = i$. Εξισώνοντας πραγματικά και φανταστικά μέρη, λαμβάνουμε το σύστημα

   $$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 1. \end{cases}$$

   Λύνουμε το σύστημα και έχουμε τους ζητούμενους μιγαδικούς αριθμούς.
   Με παρόμοιο σκεπτικό εργαζόμαστε και για τα (β) και (γ).

2. Λυσετε την εξισωση $z^2 - iz + 1 = 0$.

   **Υπόδειξη:** Χρησιμοποιούμε τον κλασικό τύπο της διακρίνουσας. Έχουμε $\Delta = (-i)^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = -1 - 4 = -5$. Επομένως, η εξίσωση έχει δύο λύσεις $z = \frac{-(-i)\pm\sqrt{-5}}{2\cdot 1} = \frac{i\pm i\sqrt{5}}{2} = \frac{i}{2}(1 \pm \sqrt{5})$.

3. Δειξετε οτι για καθε $z \in \mathbb{C}$,

   $$|\mathrm{Re(z)}| \le |z| \le |\mathrm{Re(z)}| + |\mathrm{Im(z)}|, \qquad |\mathrm{Im(z)}| \le |z| \le |\mathrm{Re(z)}| + |\mathrm{Im(z)}|.$$

   **Υπόδειξη:** Γράφοντας $|z| = \sqrt{\mathrm{Re(z)}^2 + \mathrm{Im(z)}^2}$ και με χρήση της γνωστής ανίσωσης

   $$x, y \le \sqrt{x^2 + y^2} \le x + y,$$

   προκύπτουν τα ζητούμενα.

4. Περιγραψετε γεωμετρικα τα συνολα:

   $$A = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < \frac{1}{2}\}, \qquad B = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z^2) = 1\},$$

   $$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : \left|\frac{z-1}{z-i}\right| = 1\}, \qquad \Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \mathrm{Arg}(z)\}.$$

   **Υπόδειξη:** Για το $A$, θυμόμαστε ότι τα σύνολα της μορφής $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}, z_0 \in \mathbb{C}, r > 0$, περιγράφουν δίσκους κέντρου $z_0$ και ακτίνας $r$.
   Για το $B$, από την Άσκηση 1 βλέπουμε ότι $\mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2$, όπου $z = x + iy$. Άρα, θέλουμε τους μιγαδικούς $z = x + iy$ με $x^2 - y^2 = 1$ και έχουμε μία υπερβολή.
   Για το $\Gamma$ ζητάμε όλους τους μιγαδικούς αριθμούς που ισαπέχουν από το 1 και το $i$. Άρα, θα έχουμε μία μεσοκάθετο.
   Για το $\Delta$, θέτουμε $z = |z|e^{i\mathrm{Arg}(z)} = |z|\cos \mathrm{Arg}(z) + i|z|\sin \mathrm{Arg}(z) = |z|\cos|z| + i|z|\sin|z|$. Άρα, λαμβάνουμε την καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις $(t\cdot\cos t, t\cdot\sin t), t \in (0, 2\pi)$, δηλαδή μία σπείρα.

5. Σχεδιασετε τα συνολα και εξετασετε αν ειναι ανοικτα, κλειστα ή κανενα απο τα δυο στο μιγαδικο επιπεδο.

   $A = \{z : a < \arg(z - i) < b\}$, οπου $0 \le a < b < 2\pi$,
   $B = \{z : |z - \bar{z}_0| = |\bar{z} - z_0|\}$, $z_0$ σταθερος μιγαδικος,
   $C = \{z : \mathrm{Im}(z) \ge 0, 1 < |z| < 2\}$, $D = \{z : \mathrm{Re}(z^2) \le 0\}$,

$E = \{z : \mathrm{Re}(z^2) > 1\}$

**Υπόδειξη:** Για το $A$, έχουμε ότι το σύνολο $\{z : a < \arg(z) < b\}$ είναι απλά μία γωνία με κορυφή το 0 και άνοιγμα που εξαρτάται από τα $a, b$. Το $A$ είναι το ίδιο σύνολο μετατοπισμένο μία μονάδα προς τα πάνω, δηλαδή μία γωνία με κορυφή $i$. Άμεσα, με χρήση των ορισμών προκύπτει ότι το $A$ είναι ανοικτό.
Για το $B$ σκεπτόμαστε ότι $|z - \bar{z_0}| = |\overline{z - \bar{z_0}}| = |\bar{z} - z_0|$, για οποιονδήποτε μιγαδικό αριθμό $z$.
Το $C$ θα είναι η τομή ενός δακτυλίου με εσωτερική ακτίνα 1 και εξωτερική ακτίνα 2 με το κλειστό άνω ημιεπίπεδο. Για τα $D$ και $E$ εργαζόμαστε όπως στην Άσκηση 4, στο σύνολο $B$. Τα τοπολογικά ζητούμενα προκύπτουν άμεσα εκ των ορισμών.

6. Η εξισωση $|z - w_0| = r$ περιγραφει κυκλο στο $\mathbb{C}$ κεντρου $w_0$ και ακτινας $r$.
(α) Δείξετε ότι η εξίσωση αυτη γραφεται ισοδυμανα ως

$$\alpha|z|^2 + \beta\mathrm{Re}(z) + \gamma\mathrm{Im}(z) + \delta = 0, \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0.$$

(β) Ποια ειναι η αντιστοιχη εξισωση ευθείας στο επιπεδο;
(γ) Βρειτε το κεντρο και την ακτινα του κυκλου $2|z|^2 + 3\mathrm{Re}(z) + 4\mathrm{Im}(z) - 10 = 0$.

**Υπόδειξη:** (α) Έχουμε $|z - w_0|^2 = r^2$ με $|z - w_0|^2 = (z - w_0)(\bar{z} - \bar{w_0})$. Εκτελώντας τις πράξεις, έχουμε το ζητούμενο.
(β) Σκεφτόμαστε ότι κάθε ευθεία μπορεί να θεωρηθεί ως μεσοκάθετος ενός ευθυγράμμου τμήματος με άκρα $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Άρα, θα έχει εξίσωση $|z - z_1| = |z - z_2|$. Εκτελούμε τις πράξεις όπως στο (α) και βρίσκουμε την αντίστοιχη εξίσωση.
(γ) Η εξίσωση μπορεί να πάρει τη μορφή $2x^2 + 2y^2 + 3x + 4y - 10 = 0$, όπου $x = \mathrm{Re}(z)$ και $y = \mathrm{Im}(z)$. Δημιουργούμε αναπτύγματα ταυτοτήτων και η εξίσωση θα πάρει τη μορφή $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$. Τότε το κέντρο του κύκλου θα είναι το $x_0 + iy_0$ και η ακτίνα θα είναι ίση με $r$.

7. Αν $z, w \in \mathbb{C}$ και $|z| < 1$, $|w| < 1$, δείξετε ότι $\left|\frac{z-w}{1-\bar{w}z}\right| < 1$.
**Υπόδειξη:** Θέτουμε $z = re^{i\phi}, r < 1, \phi \in [0, 2\pi)$ και $w = te^{i\psi}, t < 1, \psi \in [0, 2\pi)$. Κάνουμε τις πράξεις στην παράσταση $|z - w|^2 - |1 - \bar{w}z|^2 = |re^{i\phi} - te^{i\psi}|^2 - |1 - te^{-i\psi}re^{i\phi}|^2$ και βλέπουμε ότι το αποτέλεσμα θα προκύψει αρνητικό.

8. Αν $z, w \in \mathbb{C}$ και $|z| = 1$, $|w| < 1$, δείξετε ότι $\left|\frac{z-w}{1-\bar{w}z}\right| = 1$.
**Υπόδειξη:** Εργαζόμαστε ακριβώς όπως στην Άσκηση 7 και βλέπουμε ότι το αποτέλεσμα θα προκύψει 0.

9. (α) Βρειτε τα σημεια στην σφαιρα Riemann με στερεογραφικες εικονες τους μιγαδικους $\alpha = 2 + 3i$, $\beta = 1 + i$, $\gamma = i$.
(β) Βρειτε τους μιγαδικους αριθμους που αντιστοιχουν στα σημεια $(1/\sqrt{8}, 1/4, 3/4)$ και $(0, \sqrt{3}/4, 1/4)$, της σφαιρας του Riemann μεσω της στερεογραφικης προβολης.

**Υπόδειξη:**(α) Αν $z = x+iy$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός, τότε το σημείο της σφαίρας Riemann με στερεογραφική προβολή το $z$ είναι το

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x}{1 + |z|^2}, \frac{y}{1 + |z|^2}, \frac{|z|^2}{1 + |z|^2}\right).$$

Άρα, για $\alpha = 2+3i$, το ζητούμενο σημείο θα είναι το $(\frac{2}{14}, \frac{3}{14}, \frac{13}{14}) = (\frac{1}{7}, \frac{3}{14}, \frac{13}{14})$. Όμοια δουλεύουμε και για τα άλλα δύο.
(β) Αντίστροφα, αν $(x_1, x_2, x_3)$ είναι σημείο της σφαίρας Riemann, τότε η στερεογραφική του προβολή είναι ο μιγαδικός αριθμός $z = \frac{x_1 + ix_2}{1-x_3}$. Άρα, για το σημείο $(\frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, η στερεογραφική προβολή θα είναι ο $z = \sqrt{2} + i$. Ανάλογα για το δεύτερο σημείο.

10. Δειξετε οτι καθε κυκλος στην σφαιρα του Riemann μετασχηματιζεται μεσω της στερεογραφικης προβολης σε κυκλο ή ευθεια στο μιγαδικο επιπεδο.

**Υπόδειξη:** Ένας κύκλος στη σφαίρα του Riemann είναι η τομή της σφαίρας με ένα επίπεδο με εξίσωση $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$.
1η Περίπτωση: Αν ο κύκλος περνάει από τον βόρειο πόλο $(0,0,1)$, τότε, αναγκαστικά $c = d$. Όπως στην προηγούμενη άσκηση, θυμόμαστε ότι

$$(x_1, x_2, x_3) = (\frac{x}{1+|z|^2}, \frac{y}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2}{1+|z|^2}).$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση του επιπέδου, θα προκύψει εξίσωση όμοια με αυτήν της Άσκησης 6(β) και άρα θα έχουμε μία ευθεία.
2η Περίπτωση: Αν ο κύκλος δεν περνάει από τον βόρειο πόλο, τότε $c \neq d$. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με πριν, θα προκύψει εξίσωση όμοια με αυτήν της Άσκησης 6(α) και έτσι, θα έχουμε έναν κύκλο.

11. Δείξετε οτι η συνάρτηση $f(z) = z\mathrm{Re}(z)$ ειναι μιγαδικά παραγωγίσιμη στο σημείο $z_0 = 0$ και σε κανένα άλλο σημείο.

**Υπόδειξη:** Για $z = x + iy$, η συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως $f(z) = f(x,y) = (x+iy)x = x^2 + ixy$. Δείχνουμε ότι η συγκεκριμένη συνάρτηση έχει παντού συνεχείς μερικές παραγώγους, αλλά ικανοποιεί τις εξισώσεις Cauchy-Riemann μόνο στο 0 και πουθενά αλλού.

12. Δειξετε οτι η συναρτηση $f(z) = \sqrt{|xy|}$, $z = x+iy$, ικανοποιει τις εξισωσεις Cauchy-Riemann στο σημειο $z_0 = 0$ αλλα δεν ειναι μιγαδικα παραγωγισιμη στο σημειο αυτο.

**Υπόδειξη:** Μπορούμε να εξετάσουμε την ικανοποίηση των εξισώσεων Cauchy-Riemann χρησιμοποιώντας τον ορισμό των μερικών παραγώγων. Για παράδειγμα, για να υπολογίσουμε τη μερική παράγωγο στο 0 του πραγματικού μέρους της $f$ ως προς $x$ υπολογίζουμε το όριο

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{Re}f(x,0) - \mathrm{Re}f(0,0)}{x-0}.$$

Για να δείξουμε ότι η $f$ δεν είναι μιγαδικά παραγωγίσιμη στο 0, πάλι χρησιμοποιούμε τον ορισμό, δηλαδή δείχνουμε ότι δεν υπάρχει το όριο

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0)}{x+iy-0}.$$

13. Θετουμε $f(z) = \begin{cases} \frac{xy^2(x+iy)}{x^2+y^4}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0, \end{cases}$ οπου $z = x + iy$. Δειξετε οτι:
(α) Οι μερικες παραγωγοι των $u = \mathrm{Re}(f)$ και $v = \mathrm{Im}(f)$ υπαρχουν στο $z_0 = 0$,
(β) Οι συνθηκες Cauchy-Riemann ικανοποιουνται στο $z_0 = 0$,
(γ) Τα ορια $\lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z-0}$ υπαρχουν οταν $z \to 0$ κατα μηκος οποιασδηποτε ευθειας που περνα

απο το 0, και η τιμη του οριου ειναι η ιδια για ολες τις ευθειες,
(δ) Η $f(z)$ δεν ειναι μιγαδικα παραγωγισιμη στο $z_0 = 0$ (Υποδ.: $z \to 0$ πανω σε παραβολες $x = y^2$)

**Υπόδειξη:** (α) Η ύπαρξη των μερικών παραγώγων αποδεικνύεται με τη χρήση του ορισμού και των κατάλληλων ορίων, όπως στην Άσκηση 12. Άμεσα προκύπτει και το (β).
(γ) Αν $z = x + iy$, για να έχουμε $z \to 0$ κατά μήκος ευθείας που περνά από το 0, θα πρέπει $y = ax, a \in \mathbb{R}$ και $x \to 0$. Άρα, έχουμε το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x+iy) - f(0)}{x+iy} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,ax)}{x+iax}.$$

Το όριο προκύπτει 0 για οποιαδήποτε επιλογή του $a \in \mathbb{R}$.
(δ) Όμοια με το (γ), παίρνουμε το όριο σε παραβολές της μορφής $x = ay^2$ και αυτή τη φορά το όριο εξαρτάται από το επιλεχθέν $a$. Άρα, το $\lim\limits_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z-0}$ δεν υπάρχει.