

Ασκήσεις Μιγαδικών Συναρτήσεων, Εαρινό Εξαμήνιο 2023
Φύλ. 8

1. Υπολογίστε τα: (α) $\int_{|z|=1} \frac{1}{z(e^z-1)} dz$, (β) $\int_{|z|=2} \frac{1}{(z-1)^2 e^z} dz$.
2. Υπολογίστε το $\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ όταν: (1) $f(z) = z^4 + 1$ και $\gamma(t) = 2e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$. (2) $f(z) = \frac{z^2}{(1-z)^3}$ και $\gamma(t) = 2e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$.
3. Βρείτε τα ολοκληρώματα: (1) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$, (2) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x+x^2}{(1+x^2)(4+x^2)} dx$, (3) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$, (4) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2-1}{x^4+3x^2+2} dx$.
4. Αν a είναι πραγματικός αριθμός βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^3} dx$.
5. Βρείτε τα ολοκληρώματα: (1) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+4} dx$, (2) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(x)}{1+x^4} dx$, (3) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^2+4x+5} dx$.
6. Δειξτε: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(3x)}{(1+x^2)^2} dx = \frac{2\pi}{e^3}$
7. Δειξτε ότι $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx = \pi$ (Υποδ. $f(z) = \frac{1-e^{2iz}}{z^2}$).
8. Βρείτε τα ολοκληρώματα: (1) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sin \theta} d\theta$, (2) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta}{5+3 \cos \theta} d\theta$.
9. Βρείτε τα ολοκληρώματα: (1) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2+\cos \theta)^2} d\theta$, (2) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{a-\cos \theta} d\theta$, ($a \in \mathbb{R}, a > 1$).
10. Δειξτε ότι

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2a \cos \theta + a^2} d\theta = \begin{cases} \frac{2\pi}{1-a^2}, & 0 < a < 1 \\ \frac{2\pi}{a^2-1}, & 1 < a < \infty. \end{cases}$$

11. Βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_0^{2\pi} \frac{1}{7-6 \cos \theta + 2 \sin \theta} d\theta$.
12. Βρείτε το ολοκλήρωμα

$$\int_{|z|=7} \frac{1+z}{1-\cos z} dz.$$

13. Βρείτε το ολοκλήρωμα

$$\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z(1-z^2)^2} dz.$$