

Ασκήσεις Μιγαδικών Συναρτήσεων, Εαρινό Εξάμηνο 2023
Φύλ. 7

1. Υποθέτουμε ότι η f είναι ολομορφή μη σταθερή στο ανοικτό Ω και έχει ρίζα τάξης 1 στο σημείο $z_0 \in \Omega$. Δειξτε ότι

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{f}, z_0\right) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

2. Βρείτε το $\operatorname{Res}(f, 0)$ και $\operatorname{Res}(f, 1)$ για την $f(z) = \frac{z+1}{z(z-1)^2}$

3. Βρείτε το $\operatorname{Res}(f, z_0)$ σε όλα τα ανωμαλα σημεία z_0 της $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$

4. Βρείτε το $\operatorname{Res}(f, z_0)$ στα ανωμαλα σημεία για τις

$$f(z) = z^4 \cos\left(\frac{1}{z}\right), \quad f(z) = \frac{z^3}{z^4 - 1}, \quad f(z) = z^2 e^{\frac{-1}{z}} - \frac{1}{z} e^{\frac{1}{z}}.$$

5. Αν $f(z)$ είναι ολομορφή στο $\Delta(1, 0, 1)$ με απλό πόλο στο $z_0 = 1$ και $g(z) = f(z^2)$ βρείτε το $\operatorname{Res}(g, 1)$ συναρτήσει του $\operatorname{Res}(f, 1)$.

6. Βρείτε τα ολοκληρώματα

$$(1) \int_{|z|=2} \frac{1}{z^4 + z^2} dz, \quad (2) \int_{|z|=1} z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz, \quad (3) \int_{\gamma} \frac{1}{z(z^2 - 1)(z^2 + 16)} dz,$$

όπου στο τελευταίο γ είναι η περιμετρος του τετραγώνου με κορυφές $(\pm 2, \pm 2)$.

7. Βρείτε τα ολοκληρώματα

$$(1) \int_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1} dz, \quad (2) \int_{|z-1|=1} \frac{1}{z^4 - 1} dz, \quad (3) \int_{|z|=1} \frac{\sin(z) + \sin\left(\frac{1}{z}\right)}{z} dz$$

8. Κατασκευάσετε συναρτηση $f(z)$ ολομορφή στο $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ με πόλο στο τάξης 2 στο 0, με ουσιώδη ανωμαλία στο 1, και με $\operatorname{Res}(f, 0) = 1$ και $\operatorname{Res}(f, 1) = 0$.