Ασκήσεις Μιγαδικών Συναρτήσεων, Εαρινο Εξαμηνο 2023

Φυλ. 6

1. (Γενικευμενο Λημμα Schwarz). Εστω $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ αναλυτικη με $|\phi(z)| < 1$ για καθε $z \in \mathbb{D}$. Δειξετε οτι
   α. Αν $z, w \in \mathbb{D}$ τοτε $\left|\frac{\phi(z)-\phi(w)}{1-\overline{\phi(z)}\phi(w)}\right| \leq \left|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}\right|$.

   β. Αν $z \in \mathbb{D}$ τοτε $|\phi'(z)| \leq \frac{1-|\phi(z)|^2}{1-|z|^2}$.

2. Εστω $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ ολομορφη, και φραγμενη δηλ. $M = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| < \infty$. Δειξετε οτι:
   (i) $|f'(0)| \leq M + |f(0)|$.
   (ii) $|f(z)| \leq (M + |f(0)|)|z| + |f(0)|$, για καθε $z \in \mathbb{D}$.

3. Βρειτε το αναπτυγμα Laurent της συναρτησης $f(z) = z + \frac{1}{1-z}$ στους δακτυλιους:
   (α) $\Delta(0, 0, 1)$, (β) $\Delta(0, 1, \infty)$, (γ) $\Delta(1, 0, 1)$, (δ) $\Delta(1, 1, \infty)$

4. Βρειτε το αναπτυγμα Laurent της συναρτησης $f(z) = z^3 \sin(\frac{1}{z})$ στον δακτυλιο $\Delta(0, 0, \infty)$.

5. Βρειτε το αναπτυγμα Laurent της συναρτησης $f(z) = \frac{2z}{1+z^2}$ σε ολους τους δακτυλιους που δημιουργουνται απο τα ανωμαλα σημεια της.

6. Βρειτε και ταξινομησετε τις μεμονωμενες ανωμαλιες των συναρτησεων
$$(a)\ f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2} + \frac{z^2 - 5z + 6}{z - 2},\ \ (b)\ g(z) = z^3(\cos(1/z) - 1),\ \ (c)\ h(z) = \frac{\sin(\pi z)}{z - 1}$$

7. Βρειτε και ταξινομησετε τις μεμονωμενες ανωμαλιες των συναρτησεων
$$(a)\ f(z) = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2,\ (b)\ f(z) = \frac{z\cos(z) - z}{\sin^3(z)},\ (c)\ f(z) = \frac{1}{z^4 + z^2},\ (d)\ f(z) = \frac{(z+1)^3 - 1}{z^3}$$

8. Χαρακτηρισετε το ανωμαλο σημειο 0 για τις συναρτησεις
$$(a)\ f(z) = \frac{\sin(z)}{z^2} - \frac{1}{z}, \qquad (b)\ g(z) = \frac{z + (1-z)(1-e^z)}{z^2(1-z)}$$
   (Υποδ. Βρειτε την σειρα Laurent).

9. Αν $f(z)$ ειναι ακεραια συναρτηση και για καποιο $k \in \mathbb{N}$ συναρτηση $g(z) = z^k f(1/z)$ ειναι φραγμενη σε καποιο δακτυλιο $\Delta(0, 0, \delta)$ με $\delta > 0$ δειξετε οτι η $f(z)$ ειναι πολυωνυμο.

10. Εστω $f(z)$ ακεραια συναρτηση που δεν ειναι πολυωνυμο. Δειξετε οτι για καθε $c \in \mathbb{C}$ υπαρχει ακολουθια μιγαδικων $\{z_n\}$ με $z_n \to \infty$ ωστε $f(z_n) \to c$.

11. Υποθετουμε οτι οι $f(z), g(z)$ εχουν ουσιωδη ανωμαλια στο 0. Τι ειδους ανωμαλια μπορει να εχει η $f(z) + g(z)$ στο 0; Δωσετε παραδειγματα.

12. Βρειτε και χαρακτηρισετε ολα τα ανωμαλα σημεια της $f(z) = \frac{z}{e^{iz}-1}$.

13. Αν η $f(z)$ ειναι ολομορφη και μη μηδενικη στον δισκο $D(0, r)$, $r > 0$, τι ειδους ανωμαλια εχει η $g(z) = f(z)e^{\frac{1}{z}}$ στο 0;

14. Αν οι $f(z)$ και $g(z)$ εχουν πολο στο z_0, τι ειδους ανωμαλια μπορει να εχουν οι $f(z)g(z)$ και $f(z)/g(z)$ στο z_0;

15. Βρειτε τα μεμονωμενα ανωμαλα σημεια της $f(z) = \frac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$