Ασκήσεις Μιγαδικών Συναρτήσεων, Εαρινο Εξαμηνο 2023

Φυλ. 5

1. Δειξετε οτι υπαρχει συναρτηση $f(z)$ ολομορφη στον μοναδιαιο δισκο $\mathbb{D}$ τετοια ωστε $f(z)^4 + 1 = z^4$ για καθε $z \in \mathbb{D}$. Ποσες τετοιες συναρτησεις υπαρχουν;
2. Εξετασετε αν μπορουν να ορισθουν οι $\log(e^z - i)$ και $\log(\cos(z))$ σαν ολομορφες συναρτησεις στον $\mathbb{D}$.
3. Βρειτε την ακτινα συγκλισης καθε σειρας (α) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$, (β) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} z^n$, (γ) $\sum_{n=0}^{\infty} n^3 z^n$ (δ) $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$, (ε) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{2^n}$, (ζ) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n$, (η) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} z^n$
4. Βρειτε την ακτινα συγκλισης καθε σειρας

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad a_n = \begin{cases} n \text{ αν } n \text{ αρτιος} \\ 2^n \text{ αν } n \text{ περιττος} \end{cases} \qquad (b) \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \quad b_n = \begin{cases} 2^k \text{ αν } n = k^2, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 3^{-n} \text{ αν } n \neq k^2, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

5. (α) Βρειτε ολα τα $z \in \mathbb{C}$ για τα οποια η σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n$ συγκλινει.

   (β) Βρειτε το 'μεγαλυτερο' ανοικτο $\Omega \subset \mathbb{C}$ στο οποιο η συναρτηση $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n$ ειναι αναλυτικη.
6. Αν η δυναμοσειρα $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ εχει ακτινα συγκλισης R, ποια ειναι η ακτινα σγκλισης της $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{2n}$;
7. Αν οι δυναμοσειρες $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ εχουν ακτινες συγκλισης R_1 και R_2 αντιστοιχα, δειξετε οτι για την ακτινα συγκλισης R της σειρας $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$ ισχυει $R \geq \min(R_1, R_2)$.
8. Βρειτε τις δυναμοσειρες για την συναρτηση $f(z) = \frac{z}{z-3}$ (α) με κεντρο το $z_0 = 0$, (β) με κεντρο το $z_0 = 1$ (γ) με κεντρο το $z_0 = i$, και τις αντιστοιχες ακτινες συγκλισης.
9. Βρειτε την δυναμοσειρα για την συναρτηση $f(z) = ze^z$ με κεντρο το σημειο $z_0 = 2$ (Υποδ.: $ze^z = (z-2)e^z + 2e^z = (z-2)e^{z-2}e^2 + 2e^{z-2}e^2$).
10. Δειξετε οτι η συναρτηση $f(z) = \log(\frac{1}{1-z})$ ειναι καλα ορισμενη και αναλυτικη στον μοναδιαιο δισκο $\mathbb{D}$, και βρειτε το αναπτυγμα της σε δυναμοσειρα με κεντρο το 0.
11. Μια ακεραια συναρτηση λεγεται αρτια αν $f(-z) = f(z)$ για καθε $z \in \mathbb{C}$. Δειξετε οτι αν $f(z)$ ειναι αρτια ακεραια τοτε οι συντελεστες της δυναμοσειρας της με κεντρο το $z_0 = 0$, με περιττους δεικτες, ειναι ολοι μηδεν.
12. Αν $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ειναι αναλυτικη και εχει ριζα ταξης m σε καποιο $z_0 \in \Omega$ τοτε η f γραφεται $f(z) = g(z)^m$ για καθε z σε καποιο ανοικτο δισκο $D(z_0, r)$, $r > 0$.
13. Αν f, g ειναι ακεραιες συναρτησεις και $f(e^{in}) = g(e^{in})$ για καθε $n \in \mathbb{N}$ δειξετε οτι $f \equiv g$.
14. Εστω Ω ανοικτο συνεκτικο και $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολομορφη. Υποθετομε οτι υπαρχει $a \in \Omega$ ωστε $|f(a)| \leq |f(z)|$ για καθε $z \in \Omega$. Δειξετε οτι ειτε $f(a) = 0$ ειτε η f ειναι σταθερη στο Ω.
15. Υπαρχει αναλυτικη συναρτηση $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ ωστε $f(\frac{1}{n}) = \frac{n^2+1}{n^2}$ για καθε $n = 2, 3, 4, \cdots$ και $f(\frac{i}{2}) = \frac{i}{2}$;
16. Με χρηση της αρχης του ταυτισμου δειξετε οτι $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$ για καθε $z \in \mathbb{C}$.