Ασκήσεις Μιγαδικών Συναρτήσεων, Εαρινο Εξαμηνο 2023

Φυλ. 4

1. Εστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολομορφη με $f(z) = e^z$ για καθε z με $|z| = 1$. Δειξετε οτι $f(z) = e^z$ για καθε z με $|z| < 1$. (Υποδ.: ολοκληρωτικος τυπος Cauchy για την $h(z) = f(z) - e^z$).
2. Αν $f(z)$ ειναι ακεραια συναρτηση και $|f(z)| \leq \log(2 + |z|)$ για καθε $z \in \mathbb{C}$ δειξετε οτι η f ειναι σταθερη.
3. Αν $f(z)$ ειναι ακεραια συναρτηση και $|f(z)| \leq 1 + |z|^3$ για καθε $z \in \mathbb{C}$ δειξετε οτι η f ειναι πολυωνυμο. Ποιος ειναι ο βαθμος του πολυωνύμου;
4. Αν f ειναι ακεραια συναρτηση και $\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z} = 0$ δειξετε οτι η f ειναι σταθερη.
5. Αν $f(z) = u(z) + iv(z)$ είναι ακεραία με $u(z) \geq 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$ τότε η f είναι σταθερη. (Υποδ.: θεωρησετε την $e^{-f(z)}$).
6. Εστω $f(z)$ ακεραια. Υποθετομε οτι υπαρχει $M \in \mathbb{R}$ ωστε $\mathrm{Re}(f(z)) \leq M$ για καθε $z \in \mathbb{C}$. Δειξετε οτι η f ειναι σταθερη.
7. Υποθετομε οτι $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ειναι ολομορφη και υπαρχει θετικη σταθερα C ωστε $|f(z)| \leq Ce^x$ για καθε $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Δειξετε οτι υπαρχει $c \in \mathbb{C}$ με $|c| \leq C$ ωστε $f(z) = ce^z$ για καθε $z \in \mathbb{C}$.
8. Εστω $f(z)$ ακεραια συναρτηση, μη σταθερη. Δειξετε οτι υπαρχει ακολουθια $\{z_n\}$ στο $\mathbb{C}$ τετοια ωστε $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = 0$ (Υποδ.: αν η f εχει ριζα τοτε φανερο. Αν δεν εχει ριζα τοτε η $g = 1/f$ ειναι επισης ακεραια, μη σταθερη, αρα μη φραγμενη αρα υπαρχουν $z_n \in \mathbb{C}$ με $g(z_n) \to \infty$ κ.λ.π.)
9. Εστω $f(z)$ ακεραια συναρτηση. Υποθετουμε οτι το πεδιο τιμων $f(\mathbb{C})$ "παραλειπει" ενα μη κενο ανοικτο συνολο Ω, δηλ. $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C} \setminus \Omega$, τοτε το $f(\mathbb{C})$ μονοσυνολο, δηλ. η f ειναι σταθερη. (Υποδ.: Για $a \in \Omega$ υπαρχει $\delta > 0$ ωστε $D(a, \delta) \subset \Omega$, τοτε $|f(z) - a| \geq \delta$ για καθε $z \in \mathbb{C}$ και η $g(z) = 1/(f(z) - a)$ ειναι ακεραια και φραγμενη).
10. Αν f ειναι ολομορφη στον μοναδιαιο δισκο $\mathbb{D}$ και ισχυει $|f(z) - z| \leq 1 - |z|$ για καθε $z \in \mathbb{D}$ δειξετε οτι $f(z) = z$ για καθε $z \in \mathbb{D}$.
11. Για $n \geq 1$ και $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$ θετουμε
$$f(z) = (1 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n)\cos(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$
Δειξετε οτι για καθε $R > 0$ υπαρχει $z_0 \in D(0, R)$ ωστε $|f(z_0)| > 1$.
12. Εστω f ακεραια συναρτηση. Για $r > 0$ θετουμε $m(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|\, dt$. Δειξετε οτι αν $m(r) \leq M < \infty$ για καθε $r > 0$ τοτε η f ειναι σταθερη. (Υποδ. Για $z \in \mathbb{C}$ με χρηση του ολοκληρωτικου τυπου Caychy σε καμπυλες $\gamma(t) = re^{it}$ με $r > |z|$ προκυπτει $|f'(z)| \leq rM/(r - |z|)^2)$.