

## Ασκήσεις Μιγαδικών Συναρτήσεων, Εαρινό Εξάμηνο 2023

Φυλ. 3

1. Βρείτε την εικόνα της λωρίδας  $\{z : -\frac{\pi}{2} < \text{Im}(z) < \frac{\pi}{2}\}$  μέσω της  $f(z) = \frac{e^z-1}{e^z+1}$ .
2. Εστω  $\Omega$  ανοικτό συνεκτικό υποσυνολο του  $\mathbb{C}$  και  $u(x, y) = u(x + iy) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  συναρτηση. Υποθετουμε οτι υπάρχουν οι μερικες παραγωγοι  $\frac{\partial u}{\partial x}$  και  $\frac{\partial u}{\partial y}$  και μηδενιζονται σε καθε σημειο του  $\Omega$ . Τοτε η  $u$  ειναι σταθερη συναρτηση.
3. Αν  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  ειναι αναλυτικη στο ανοικτο συνεκτικο  $\Omega$  και η  $u(z) = \text{Re}(f(z))$  ειναι σταθερη συναρτηση τοτε η  $f$  ειναι σταθερη συναρτηση.
4. Βρείτε μια παραμετροποιηση της περιμετρου του τετραγωνου με κορυφες  $1 + i, 1 - i, -1 + i, -1 - i$ ,  
(με θετικη φορα) δηλ. βρείτε καμπυλη  $\gamma(t) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  της οποιας το ιχνος  $\hat{\gamma}$  ειναι η εν λογω περιμετρος.
5. Βρείτε το ολοκληρωμα  $\int_{\gamma} \frac{e^z}{z} dz$  οπου  $\gamma$  η καμπυλη της προηγουμενης ασκησης.
6. Βρείτε το ολοκληρωμα  $\int_{\gamma} \frac{e^z}{z} dz$  οπου  $\gamma(t) = e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , και στην συνεχεια βρείτε το πραγματικο ολοκληρωμα  $\int_0^{2\pi} e^{\cos(t)} \cos(\sin(t)) dt$ .
7. Υπολογιστε τα  
 (a)  $\int_{\gamma} \frac{z^2 + z - 1}{z(z-2)} dz$ ,  $\gamma(t) = e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .      (b)  $\int_{\gamma} \frac{ze^z + iz^2}{z-1} dz$ ,  $\gamma(t) = 2e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .  
 (c)  $\int_{\gamma} \frac{\sin(z^2 + 1)}{z^2 - 3z + 2} dz$ ,  $\gamma(t) = (3/2)e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .      (d)  $\int_{\gamma} \frac{\cos(\pi z)}{z^2 + 1} dz$ ,  $\gamma(t) = i + e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .
8. Υπολογιστε το  $\int_{\gamma} \frac{\cos(z)}{z(z-1)} dz$   
 (1) στην καμπυλη  $|z| = 1/3$ ,  
 (2) στην καμπυλη  $|z-1| = 1/3$ ,  
 (3) στην καμπυλη  $|z-i| = 1/3$ .
9. Υπολογιστε τα  
 (a)  $\int_{\gamma} \frac{z^2 + z - 1}{z^2(z-2)} dz$ ,  $\gamma(t) = e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .      (b)  $\int_{\gamma} \frac{ze^z}{(z-1)^2} dz$ ,  $\gamma(t) = 2e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .  
 (c)  $\int_{\gamma} \frac{\sin(z)}{z^3} dz$ ,  $\gamma(t) = e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .      (d)  $\int_{\gamma} \left( e^z + \frac{\cos(z)}{z} \right)^2 dz$ ,  $\gamma(t) = 2e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .
10. Βρείτε το  $\int_{\gamma} \left( \frac{z}{z-1} \right)^n dz$  οπου  $\gamma$  ειναι η περιφερεια  $|z-1| = 1$ .