Μιγαδικη Αναλυση, Εαρινό Εξάμηνο 2023

Ασκήσεις, Φυλ. 2

1. Βρείτε τις εικόνες των παρακάτω συνόλων μέσω της εκθετικής συνάρτησης $f(z) = e^z$.

$$A = \{z : \mathrm{Re}(z) > 1\},\ \ B = \{z : \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)\},\ \ C = \{z : -1 < \mathrm{Re}(z) < 1,\ \text{και}\ -1 < \mathrm{Im}(z) < 1\},$$
$$D = \{z : 0 < \mathrm{Re}(z) < 1, \mathrm{Im}(z) > 0\} \cup \{z : 0 < \mathrm{Im}(z) < 1, \mathrm{Re}(z) > 0\}$$

2. Δειξετε οτι:
(α) Η συναρτηση $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$ απεικονιζει τον μοναδιαιο δισκο $\mathbb{D}$ επι του του δεξιου ημιεπιπεδου $\Pi^+ = \{z : \mathrm{Re}(z) > 0\}$, και ειναι 1-1.
(β) Η συναρτηση $g(z) = e^z$ απεικονιζει το αριστερο ημιεπιπεδο $\Pi^- = \{z : \mathrm{Re}(z) < 0\}$ στον τρυπημενο μοναδιαιο δισκο στο $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, και οτι για καθε $w \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ υπαρχουν απειρα το πληθος $z \in \Pi^-$ ωστε $g(z) = w$.
(γ) Συμπερανετε οτι η συναρτηση $h(z) = e^{-\frac{1+z}{1-z}}$ απεικονιζει τον $\mathbb{D}$ στο $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ και για καθε $w \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ υπαρχουν απειρα το πληθος $z \in \mathbb{D}$ ωστε $h(z) = w$.

3. Βρειτε ολα τα $z \in \mathbb{C}$ για τα οποια $e^z = 1 + i$

4. Βρειτε ολες τις τιμες των: $2^i,\quad i^i,\quad (-1)^{2i}$

5. Βρειτε το πραγματικο και φανταστικο μερος των $e^{e^z},\ z^z$, οπου $z \in \mathbb{C}\ z \neq 0$.

6. Βρειτε ολα τα $z \in \mathbb{C}$ για τα οποια $\cos(z) = 2$

7. Για $z \in \mathbb{C}$, λυσετε την εξισωση $\cos(w) = z$. Τι συμπερασματα προκυπτουν για την 'αντιστροφη συναρτηση' $\arccos(z)$;

8. Δειξετε οτι υπαρχει $t_0 \in \mathbb{R}$ ωστε $|\cos(it)| > 100$ για $|t| > t_0$.

9. Δειξετε οτι:
(α) $\cos(z + w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$,
(β) $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$,
(γ) $\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$,
για καθε $z, w \in \mathbb{C}$.

10. Βρειτε το συνολο $\{z \in \mathbb{C} : \cos(z) = 0\}$ των ριζων της συναρτησης $f(z) = \cos(z)$.

11. Εστω $a \in \mathbb{D}$. Δειξετε οτι ο ομογραφικος μετασχηματισμος $T_a(z) = \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$ απεικονιζει τον μοναδιαιο δισκο $\mathbb{D}$ επι του εαυτου του.

12. Υπολογισετε το $\int_\gamma (z^2 + \frac{1}{z})\, dz$, (α) στην καμπλυλη $\gamma(t) = e^{it},\ 0 \le t \le 2\pi$, (β) στην καμπυλη $\gamma(t) = 1 + it,\ 0 \le t \le 1$.

13. Αν γ_1, γ_2 ειναι δυο απλες καμπυλες με το ιδιο ιχνος στο Ω και $f : \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχης συναρτηση δειξετε οτι
$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_{\gamma_2} f(z)\, dz$$

14. Υπολογισετε το $\int_\gamma (|z|^2 + 2\bar{z})\, dz$ στην καμπλυλη $\gamma(t) = \begin{cases} t + it^2, & 0 \le t \le 1 \\ \sqrt{2}e^{i\frac{t\pi}{4}}, & 1 < t \le 2. \end{cases}$

15. Υπολογισετε το ολοκληρωμα $\int_\gamma (z + \frac{1}{z-1})\, dz$ οπου γ ειναι η περιμετρος του παραλληλογραμμου με κορυφες i, $-i$, $2 + i$ $2 - i$