**Μιγαδική Ανάλυση, Εαρινό Εξάμηνο 2023**

Ασκησεις, Φυλ. 1

1. Υπολογισετε (α) $\sqrt{i}$, (β) $\sqrt[4]{i}$, (γ) $\sqrt{1+i}$ (Υποδ., π.χ. για την πρωτη βρειτε ολους τους μιγαδικους $z = x + iy$ τετοιους ωστε $z^2 = i$).
2. Λυσετε την εξισωση $z^2 - iz + 1 = 0$.
3. Δειξετε οτι για καθε $z \in \mathbb{C}$,
$$|\mathrm{Re(z)}| \leq |z| \leq |\mathrm{Re(z)}| + |\mathrm{Im(z)}|, \qquad |\mathrm{Im(z)}| \leq |z| \leq |\mathrm{Re(z)}| + |\mathrm{Im(z)}|.$$
4. Περιγραψετε γεωμετρικα τα συνολα:
$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < \frac{1}{2}\}, \qquad B = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z^2) = 1\},$$
$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : \left|\frac{z-1}{z-i}\right| = 1\}, \qquad \Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \mathrm{Arg}(z)\}.$$
5. Σχεδιασετε τα συνολα και εξετασετε αν ειναι ανοικτα, κλειστα ή κανενα απο τα δυο στο μιγαδικο επιπεδο.
$A = \{z : a < \arg(z - i) < b\}$, οπου $0 \leq a < b < 2\pi$,
$B = \{z : |z - \bar{z_0}| = |\bar{z} - z_0|\}$, $z_0$ σταθερος μιγαδικος,
$C = \{z : \mathrm{Im}(z) \geq 0, 1 < |z| < 2\}$, $D = \{z : \mathrm{Re}(z^2) \leq 0\}$,
$E = \{z : \mathrm{Re}(z^2) > 1\}$
6. Η εξισωση $|z - w_0| = r$ περιγραφει κυκλο στο $\mathbb{C}$ κεντρου $w_0$ και ακτινας $r$.
(α) Δείξετε ότι η εξίσωση αυτη γραφεται ισοδυμανα ως
$$\alpha|z|^2 + \beta\mathrm{Re}(z) + \gamma\mathrm{Im}(z) + \delta = 0, \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0.$$
(β) Ποια ειναι η αντιστοιχη εξισωση ευθείας στο επιπεδο;
(γ) Βρειτε το κεντρο και την ακτινα του κυκλου $2|z|^2 + 3\mathrm{Re}(z) + 4\mathrm{Im}(z) - 10 = 0$.
7. Αν $z, w \in \mathbb{C}$ και $|z| < 1$, $|w| < 1$, δείξετε ότι $\left|\frac{z-w}{1-\overline{w}z}\right| < 1$.
8. Αν $z, w \in \mathbb{C}$ και $|z| = 1$, $|w| < 1$, δείξετε ότι $\left|\frac{z-w}{1-\overline{w}z}\right| = 1$.
9. (α) Βρειτε τα σημεια στην σφαιρα Riemann με στερεογραφικες εικονες τους μιγαδικους $\alpha = 2 + 3i$, $\beta = 1 + i$, $\gamma = i$.
(β) Βρειτε τους μιγαδικους αριθμους που αντιστοιχουν στα σημεια $(1/\sqrt{8}, 1/4, 3/4)$ και $(0, \sqrt{3}/4, 1/4)$, της σφαιρας του Riemann μεσω της στερεογραφικης προβολης.
10. Δειξετε οτι καθε κυκλος στην σφαιρα του Riemann μετασχηματιζεται μεσω της στερεογραφικης προβολης σε κυκλο ή ευθεια στο μιγαδικο επιπεδο.
11. Δείξετε οτι η συνάρτηση $f(z) = z\mathrm{Re}(z)$ ειναι μιγαδικά παραγωγίσιμη στο σημείο $z_0 = 0$ και σε κανένα άλλο σημείο.
12. Δειξετε οτι η συναρτηση $f(z) = \sqrt{|xy|}$, $z = x + iy$, ικανοποιει τις εξισωσεις Cauchy-Riemann στο σημειο $z_0 = 0$ αλλα δεν ειναι μιγαδικα παραγωγισιμη στο σημειο αυτο.
13. Θετουμε $f(z) = \begin{cases} \frac{xy^2(x+iy)}{x^2+y^4}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0, \end{cases}$ οπου $z = x + iy$. Δειξετε οτι:
(α) Οι μερικες παραγωγοι των $u = \mathrm{Re}(f)$ και $v = \mathrm{Im}(f)$ υπαρχουν στο $z_0 = 0$,
(β) Οι συνθηκες Cauchy-Riemann ικανοποιουνται στο $z_0 = 0$,
(γ) Τα ορια $\lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z-0}$ υπαρχουν οταν $z \to 0$ κατα μηκος οποιασδηποτε ευθειας που περνα απο το 0, και η τιμη του οριου ειναι η ιδια για ολες τις ευθειες,
(δ) Η $f(z)$ δεν ειναι μιγαδικα παραγωγισιμη στο $z_0 = 0$ (Υποδ.: $z \to 0$ πανω σε παραβολες $x = y^2$)