ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι, Χειμ. Εξαμ. 2022

Ασκήσεις, Φυλλάδιο 9

1. Το κριτηριο ριζας για σειρες $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ προυποθετει την υπαρξη του οριου $r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Δειξετε το ακολουθο γενικωτερο κριτηριο: Αν
$$r = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$$
τοτε η σειρα συγκλινει αν $r < 1$ και αποκλινει οταν $r > 1$.

2. Βρειτε το συνολο συγκλισης καθε δυναμοσειρας:
$$(\alpha)\ \sum_{n=0}^{\infty} n(x-1)^n,\ \ (\beta)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)}(x-1)^n,\ \ (\gamma)\ \sum_{n=0}^{\infty} n^2(x-2)^n,\ \ (\delta)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(x+1)^n,$$
$$(\epsilon)\ \sum_{n=0}^{\infty} 2^n(x-1)^n,\ \ (\zeta)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n)}{n}x^n, (\eta)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}x^n,\ \ (\theta)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}(x+1)^n,\ \ (\iota)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}(x-2)^n.$$

3. Βρειτε την ακτινα συγκλισης καθε δυναμοσειρας
$$(a)\ 1 + 3x + \frac{x^2}{2^2} + 3^3x^3 + \frac{x^4}{2^4} + 3^5x^5 + \frac{x^6}{2^6} + \cdots,\quad (b)\ \sum_{n=0}^{\infty}(3+\cos(n))x^n,\quad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty}(n! + \frac{1}{n!})x^n,$$

4. Βρειτε την ακτινα συγκλισης της δυναμοσειρας $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ σε καθε μια απο τις παρακατω περιπτωσεις
(1) $a_n = 2 + \sin(n^2)$, (2) $2 \le a_n \le 3$, (3) $n \le a_n \le n^2$, (4) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2},\ n \text{ αρτιος} \\ \frac{1}{2^n},\ n \text{ περιττος}, \end{cases}$
(5) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2},\ n = 3k, \\ \frac{1}{3^n},\ n = 3k+1 \\ 2^n,\ n = 3k+2 \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$.

5. Βρειτε ολα τα x για τα οποια καθε μια απο τις σειρες συγκλινει (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$, (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n$.

6. Βρειτε τα πολυωνυμα Taylor $P_{5,a}(x)$ της συναρτησης $f(x) = \frac{1}{1+x}$ στα σημεια (α) $a = 0$, (β) $a = 1$.

7. Γραψετε το πολυωνυμο $P(x) = 1 + 2x - x^2 + 5x^3 - x^4$ σε δυναμεις του $(x-1)$.

8. Βρειτε το πολυωνυμο Taylor βαθμου 8 στο $a = 0$ για την συναρτηση $f(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6$

9. Για τις παρακατω συναρτησεις βρειτε τα αντιστοιχα πολυωνυμα Taylor

$f(x) = e^{x^2}$,	$P_{3,0}(x)$.
$g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$,	$P_{4,1}(x)$.
$h(x) = \sqrt{3+\cos(x)}$,	$P_{2,0}(x)$.
$k(x) = \sin(x)$,	$P_{6,\frac{\pi}{6}}(x)$.
$\phi(x) = e^x - (1 + x + \dfrac{x^2}{2})$,	$P_{5,0}(x)$.
$s(x) = \sqrt[3]{1+x}$,	$P_{3,0}(x)$.

10. Βρειτε το αναπτυγμα σε δυναμοσειρα καθε μιας απο τις παρακατω συναρτησεις στο αντιστοιχο σημειο

$f(x) = e^x$,	$x_0 = 1$.
$g(x) = \dfrac{1}{x}$,	$x_0 = 1$.
$h(x) = \log(1+x)$,	$x_0 = 0$.
$\phi(x) = \cos x$,	$x_0 = \pi$.

11. Βρειτε το μεγιστο σφαλμα κατα την προσεγγιση της $f(x) = \cos(x)$ απο το πολυωνυμο $P_{4,0}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ στο διαστημα $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

12. Βρειτε το μεγιστο σφαλμα κατα την προσεγγιση του $\sqrt{e}$ απο την τιμη $P_{4,0}(1/2)$ οπου $P_{4,0}(x)$ ειναι το πολυωνυμο Taylor της $f(x) = e^x$ ταξης 4 στο 0.

13. Βρειτε το μικροτερου βαθμου πολυωνυμο Taylor $P_{n,0}(x)$ της $f(x) = e^x$, τετοιο ωστε να ισχυει $|e^x - P_{n,0}(x)| \leq \frac{1}{10^4}$ για καθε $x \in [-1, 1]$.

14. Βρειτε το μικροτερου βαθμου πολυωνυμο Taylor στο $x_0 = 0$ που προσεγγιζει την συναρτηση $f(x) = x + \sin(x)$ με προσεγγιση καλυτερη απο $\frac{1}{10^3}$ σε ολο το διαστημα $[-1, 1]$