ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι, Χειμ. εξαμ. 2022

Ασκήσεις, Φυλλαδιο 8

1. Εξετασετε αν οι $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$, $g(x) = x\sin(\frac{1}{x})$, ειναι ομοιομορφα συνεχεις στο $(0, 1]$.

2. Βρειτε συναρτηση $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ παραγωγισιμη σε καθε σημειο του πεδιου ορισμου της, της οποιας η παραγωγος δεν ειναι συνεχης συναρτηση στο σημειο $x_0 = 0$.

3. Εξετασετε αν οι συναρτησεις ειναι παραγωγισιμες στο σημειο $x_0 = 0$.

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ $\quad (b)$ $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ $\quad (c)$ $h(x) = x|x|$.

4. Εξετασετε αν η συναρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sin(\frac{x}{2})} - \frac{1}{x}, & 0 < |x| < \pi, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ ειναι παραγωγισιμη στο 0.

5. (α) Αν $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ειναι παραγωγισιμη στο $c \in (a, b)$ δειξετε οτι $\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c-h)}{2h} = f'(c)$.
(β) Βρειτε συναρτηση $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ ωστε το οριο $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(-h)}{2h}$ υπαρχει αλλα η f δεν ειναι παραγωγισιμη στο 0.

6. Εστω $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ παραγωγισιμη και ισχυει $f(0) = 0$ και $|f'(x)| \leq \sqrt[3]{|x|}$ για καθε $x \in (-1, 1)$. Δειξετε οτι η σειρα $\sum_{n=2}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ συγκλινει.

7. Εστω $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ παραγωγισιμη με $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$. Δειξετε οτι η σειρα $\sum_{n=2}^{\infty} f(1/n)$ δεν ειναι αθροισιμη. Γενικα, για ποιες ακολουθιες (x_n) με ορους στο $(0, 1)$ και $x_n \to 0$ ειναι η σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$ αθροισιμη;

8. (Μια ακομη αποδειξη οτι η αρμονικη σειρα δεν ειναι αθροισιμη). Με χρηση του θεωρηματος μεσης τιμης δειξετε οτι $\frac{1}{n+1} < \log(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$ για καθε $n \in \mathbb{N}$. Δειξετε στην συνεχεια οτι
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \log(n) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}, \quad n \geq 2$$
και συμπερανετε οτι $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n)}{S_n} = 1$ οπου S_n ειναι το n-υοστο μερικο αθροισμα της σειρας $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

9. Εστω $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγισιμη συναρτηση για την οποια ισχυει $f'(x) = \frac{1}{x}$ για καθε $x \in (0, \infty)$ και $f(1) = 0$. Δειξετε οτι $f(xy) = f(x) + f(y)$ για καθε $x, y \in (0, \infty)$.

10. Εστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ συναρτηση. Αν υπαρχουν $0 < M < \infty$ και $1 < \rho < \infty$ ωστε να ισχυει $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^{\rho}$ για καθε $x, y \in (a, b)$ δειξετε οτι η f ειναι σταθερη.

11. Δειξετε οτι για καθε $x \geq 0$ ισχυουν οι ανισοτητες:
$$\sin(x) \leq x,\ \sin(x) \geq x - \frac{x^3}{3!},\ \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!},\ \sin(x) \geq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!},\ \text{κ.ο.κ.}$$
$$\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2!},\ \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!},\ \cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!},\ \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!},\ \text{κ.ο.κ.}$$

12. Βρειτε τα ορια: (i) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x + \frac{x^3}{3!}}{x^5}$, $\quad (ii)$ $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}}{\sin^4(x)}$, $\quad (iii)$ $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{1 - \frac{\sin(x)}{x}} \right)$.

13. $(*)$ (α) Δειξετε οτι για την $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$ η παραγωγος καθε ταξης υπαρχει στο $x_0 = 0$, και $f^{(n)}(0) = 0$ για καθε $n \in \mathbb{N}$.
(β) Βρειτε συναρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ωστε $g(x) = 0$ για $x \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$ και $g(x) > 0$ για $x \in (0, 1)$, η οποια ειναι απειρες φορες παραγωγισιμη σε καθε $x \in \mathbb{R}$. (Υποδ. $g(x) = e^{-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}}$ για $x \in (0, 1)$ και $g(x) = 0$ για $x \notin (0, 1)$).