ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι, Χειμ. εξαμ. 2022

Ασκήσεις, Φυλλαδιο 7

1. Δειξετε οτι η $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{αν } x \text{ αρρητος} \\ 1, \ \text{αν } x \text{ ρητος}, \end{cases}$ ειναι συνεχης στα σημεια $-1, 1$ και σε κανενα αλλο σημειο.

2. Βρειτε τα ορια.
$$(a) \lim_{x \to 0} \sqrt{x} \sin(\frac{1}{x}), \quad (b) \lim_{x \to 0} x^2 \sin(\frac{1}{x}), \quad (c) \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(\sqrt{x})}{x}.$$

3. Δειξετε οτι αν $f : [0, 1] \to [0, 1]$ ειναι συνεχης συναρτηση τοτε υπαρχει $\xi \in [0, 1]$ με $f(\xi) = \xi$.

4. Βρειτε τα σημεια ασυνεχειας της συναρτησης $f : (0, 1) \to \mathbb{R}, \ f(x) = (\frac{1}{x})$ (κλασματικο μερος του $\frac{1}{x}$) και κανετε το γραφημα της.

5. Εστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συναρτηση που ικανοποιει την συναρτησιακη εξισωση Cauchy:
$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \text{για καθε} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$
Δειξετε οτι:
(α) $f(0) = 0$ και $f(-x) = -f(x)$ για καθε $x \in \mathbb{R}$.
(β) Υπαρχει $c \in \mathbb{R}$ ωστε $f(\frac{1}{n}) = \frac{c}{n}$ για καθε $n \in \mathbb{N}$.
(γ) $f(r) = cr$ για καθε $r \in \mathbb{Q}$.
(δ) Αν η f ειναι επιπλεον συνεχης τοτε $f(x) = cx$ για καθε $x \in \mathbb{R}$.

6. Βρειτε σε ποια σημεια ειναι συνεχης η συναρτηση $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \text{ αρρητος}, \\ |\cos(x)|, & \text{αν } x \text{ ρητος}. \end{cases}$

7. Εστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχής με $f(0) = f(1)$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [0, \frac{1}{2}]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = f(\xi + \frac{1}{2})$.

8. Εστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχης με την ιδιότητα: Για καθε $x \in [a, b]$ υπαρχει $y \in [a, b]$ ωστε $|f(y)| \leq \frac{1}{2}|f(x)|$. Δείξετε ότι υπαρχει $\xi \in [a, b]$ ωστε $f(\xi) = 0$.

9. Αν $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ειναι συνεχεις θετουμε $A = \{x \in [a, b] : f(x) = g(x)\}$, και υποθετουμε $A \neq \emptyset$. Δειξετε οτι $\sup A \in A$ και $\inf A \in A$.

10. Αν $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ειναι συνεχεις και ισχυει $f(x) > g(x)$ για καθε $x \in [a, b]$ δειξετε οτι υπαρχει $\rho > 0$ ωστε $f(x) > g(x) + \rho$ για καθε $x \in [a, b]$.

11. Αν $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ειναι συνεχης και $x_1, x_2, \cdots, x_n \in [a, b]$ δειξετε οτι υπαρχει $y \in [a, b]$ ωστε $f(y) = \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$.

12. Αν $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ ειναι συνεχης και το οριο $\lim_{x \to \infty} f(x)$ υπαρχει και ειναι πεπερασμενο, δειξετε οτι η f ειναι φραγμενη στο $[0, \infty)$.