ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι, Χειμ. εξαμ. 2022

Φυλλάδιο 6

1. Εξετασετε την συγκλιση και την απολυτη συγκλιση των σειρων

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}),\quad (b)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(\log(n))^3},\quad (c)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+\log(n)},\quad (d)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n!}.$$

2. Εξετασετε αν συγκλινει η σειρα $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ οπου $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n},\ n \text{ αρτιος} \\ \frac{1}{2^n},\ n \text{ περιττος.} \end{cases}$

3. Βρειτε τις τιμες $x \in \mathbb{R}$ για τις οποιες συγκλινει καθε σειρα

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty}nx^n,\quad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^2}, (c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n,\quad (d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^n.$$

4. Θεωρουμε την ακολουθια (a_n) με ορους:

$$1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{5},\ -\frac{1}{6},\ \dots .$$

(1) Αν S_n ειναι τα μερικα αθροισματα της σειρας $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ δειξετε οτι $0 \le S_n \le 1$ για καθε n.
(2) Δειξετε οτι η σειρα δεν συγκλινει.

5. Εξετασετε τη συγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ οπου $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n},\ \text{αν ο } n \text{ ειναι τελειο τετραγωνο φυσικου αριθμου} \\ \frac{1}{n^2},\ \text{αν ο } n \text{ δεν ειναι τελειο τετραγωνο φυσικου αριθμου} \end{cases}$

6. Αν $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, και $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to a$, $a > 0$, δειξετε οτι $\sqrt[n]{a_n} \to a$.

7. Αν $a_n = 2^{(-1)^n - n}$ βρειτε το $\lim \sqrt[n]{a_n}$ και δειξετε οτι $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} < \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} < \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$

8. Εστω $a_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, και S_n τα μερικα αθροισματα της σειρας $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$. Δειξετε οτι η $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{S_n}$ συγκλινει αν και μονον αν η $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ αποκλινει.

9. (*) Θετομε $s = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$, και θεωρουμε την ακολουθη αναδιαταξη της σειρας

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots$$

Δειξετε οτι η αναδιατεταγμενη σειρα συγκλινει, με αθροισμα $s/2$.
Υποδειξη: $S_{3n} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} = (1 - \frac{1}{2}) - \frac{1}{4} + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6}) - \frac{1}{8} + \cdots + (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2}) - \frac{1}{4n} = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}) = \frac{1}{2}\sigma_{2n}$, οπου $\sigma_n = \sum_{n=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k} \to s$, και $\lim(S_{3n}) = \lim(S_{3n+1}) = \lim(S_{3n+2})$.