ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι, Χειμ. εξαμ. 2022

Ασκήσεις, Φυλλαδιο 5

1. Ποιες απο τις σειρες ειναι αθροισιμες;

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+\sqrt{n}}{n^2+1},\ (b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log(n)}{n},\ (c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\sin(\frac{1}{n}),\ (d)\ \sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}),\ (e)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log(n)}{n^3}.$$

2. Ποιες απο τις σειρες ειναι αθροισιμες;

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!},\quad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n},\quad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}},\quad (d)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log(n))^2}.$$

3. (α) Αν $a_n > 0$ για καθε n και η σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλινει, δειξετε οτι η σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ συγκλινει.
(β) Αν $a_n > 0$, $b_n > 0$ για καθε n και οι σειρες $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλινουν δειξετε οτι η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλινει.

4. Εστω a_n ακολουθια θετικων αριθμων. Δειξετε οτι η σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλινει αν και μονον αν η σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ συγκλινει.

5. Δειξετε οτι: $(\alpha)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}=\frac{3}{4}$, $\qquad(\beta)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=1$, $\qquad(\gamma)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+n}}=1$.

6. Απο το συνολο $\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\}$ διαγραφομε τα στοιχεια με παρονομαστη τελειο τετραγωνο $(n=k^2, k\in\mathbb{N})$, και αυτα με παρονομαστη τελειο κυβο $(n=k^3, k\in\mathbb{N})$. Δειξετε οτι η σειρα με ορους ολα τα υπολοιπα στοιχεια αποκλινει.

7. Ποιες απο τις παρακατω σειρες συγκλινουν;

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{2^n},\quad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{n})^n}{n!},\quad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n},\quad (d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n},\quad (e)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3 2^n}{n!},$$

8. Ποιες απο τις παρακατω σειρες συγκλινουν;

$$(a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n2^n}{n+3^n},\quad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2n}}{2^{n^2}},\quad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{\frac{n}{2}}}{(\sqrt[n]{2}+1)^n},\quad (d)\ \sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{-n^2},\quad (e)\ \sum_{n=3}^{\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})^{-n}.$$

9. Εξετασετε την συγκλιση των σειρων

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\log(2n)},\quad (b)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log(n))^2},\quad (c)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}(\log(n))^2},\quad d)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1+\log(n)}{n(\log(n))^2},\quad (e)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\log(n)}}.$$

10. Εστω $a, b > 0$. Εξετασετε την συγκλιση της σειρας $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log(n^a))^b}$.

11. Εστω $p > 0$ και $b \in \mathbb{R}$. Δειξετε οτι η σειρα

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\log(n))^b}{n^p},$$

(1) αν $p > 1$ και $b \in \mathbb{R}$ συγκλινει.
(2) αν $0 < p < 1$ και $b \in \mathbb{R}$ αποκλινει.
(3) Αν $p = 1$ τοτε για $b < -1$ συγκλινει ενω για $b \geq -1$ αποκλινει.