ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι, Χειμ. εξαμ. 2022

Ασκήσεις, Φυλλάδιο 4

1. Εστω $a > 0$. Θετουμε $x_1 = 1$ και $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ για $n \geq 1$. Μελετησετε την ακολουθια (x_n) και βρειτε το οριο της.

2. Βρειτε την τιμη του συνεχους κλασματος
$$a = 1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}}$$
ερμηνευοντας την σαν οριο της αναδρομικης ακολουθιας: $a_1 = 1$ και $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$ για $n \geq 2$ (Υποδ. Δειξετε οτι $1 < a_n < 2$ για καθε n, και οτι η ακολουθια συγκλινει)

3. Δειξετε οτι $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}) = 0$.

4. Γενικωτερα αν (a_n) ακολουθια με $a_n \to a$ δειξετε οτι η ακολουθια (b_n) με $b_n = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ συγκλινει στο ιδιο οριο a.

5. Βρειτε τους οριακους αριθμους και το $\limsup$ και $\liminf$ καθε ακολουθιας
$$a_n = (-1)^{n+1}\frac{n2^{\sin(\frac{n\pi}{2})}}{n+1}, \quad b_n = 1 + 2^{(-1)^n}, \quad c_n = \sqrt[n]{1 + 2^{(-1)^n}} \quad d_n = \cos(\frac{n!\pi}{m}), m \in \mathbb{N}.$$

6. Βρειτε τους οριακους αριθμους της ακολουθιας (a_n) με ορους
$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \cdots \frac{7}{8}, \frac{1}{16} \cdots \frac{15}{16}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \cdots, \frac{2^n-1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}, \cdots$$

7. Εστω (a_n) φραγμενη ακολουθια και $S = \{a \in \mathbb{R} : \text{το } a \text{ ειναι οριακος αριθμος της } (a_n)\}$. Αν (x_n) ειναι ακολουθια σημειων του S με $x_n \to x$ δειξετε οτι $x \in S$.

8. Αν $C = \{c_1, c_2, c_3, \cdots\}$ ειναι αριθμησιμο συνολο πραγματικων αριθμων δειξετε οτι υπαρχει ακολουθια (a_n) ωστε καθε σημειο του C να ειναι οριακος αριθμος της (a_n).

9. Αν (a_n), (b_n) ειναι δυο φραγμενες ακαλουθιες, δειξετε οτι υπαρχει επιλογη φυσικων αριθμων $m_1 < m_2 < \cdots < m_k < \cdots$, ωστε οι υπακολουθιες (a_{m_k}) και (b_{m_k}) να ειναι και οι δυο συγκλινουσες. Γενικευσετε το συμπερασμα για πεπερασμενες το πληθος φραγμενες ακολουθιες.

10. Αν (a_n) ειναι ακολουθια θετουμε $b_n = a_n + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Δειξετε οτι τα συνολα των οριακων αριθμων των (a_n) και (b_n) ταυτιζονται.

11. Αν (a_n) ειναι φραγμενη ακολουθια και $a \in \mathbb{R}$ δειξετε οτι $a = \limsup a_n$ αν και μονον αν: Για καθε $\varepsilon > 0$ το συνολο $\{n \in \mathbb{N} : a - \varepsilon < a_n\}$ ειναι απειρο και το συνολο $\{n \in \mathbb{N} : a + \varepsilon < a_n\}$ ειναι πεπερασμενο.

12. Θεωρουμε την αναδρομικη ακολουθια που οριζεται ως εξης: $x_1 \in \mathbb{N}$ και για $n \geq 1$,
$$x_{n+1} = \begin{cases} \frac{3x_n+1}{2}, & x_n \text{ περιττος} \\ \frac{x_n}{2}, & x_n \text{ αρτιος} \end{cases}$$
Βρειτε τις ακολουθιες (x_n) που αντιστοιχουν στις αρχικες τιμες $x_1 = 4, x_1 = 9, x_1 = 12, x_1 = 27$.