ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι, Χειμ. εξαμ. 2022

Ασκήσεις, Φυλλάδιο 3

1. Βρειτε το οριο καθε ακολουθιας
$$a_n = \sqrt[n]{1+n^2}, \quad b_n = \sqrt[n]{\log(n)}, \quad c_n = \sqrt[n]{2n^2-2n+1}, \quad d_n = \sqrt[n]{1+2+3+\cdots+n}$$

2. Αν $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m$ ειναι πολυωνυμο με θετικους συντελεστες δειξετε οτι η ακολουθια $a_n = \sqrt[n]{p(n)}$ εχει οριο τον αριθμο 1.

3. Εξετασετε την συγκλιση και βρειτε το οριο για οσες απο τις ακολουθιες υπαρχει.
$$a_n = \sqrt{n^2+3n} - n, \quad b_n = \frac{(-1)^{n+1}n}{n+1} - \frac{n+1}{n}, \quad c_n = \frac{(n+1)(3n-1)(2-7n)}{n(n^2+n)(2n-1)}.$$

4. Δειξετε οτι:
(1) Αν $-1 < a < 1$ και $k \in \mathbb{N}$, τοτε $a_n = n^k a^n \to 0$.
(2) Αν $a > 0$ και $b \in \mathbb{R}$ τοτε $a_n = \frac{(\log(n))^b}{n^a} \to 0$.

5. Εξετασετε την συγκλιση και βρειτε το οριο για οσες απο τις ακολουθιες υπαρχει.
$$a_n = \frac{\sin(n)}{n}, \quad b_n = n\sin(\frac{1}{n}), \quad c_n = n\sin(\frac{1}{\sqrt{n}}), \quad d_n = (1+\frac{1}{2n})^n.$$

6. Εξετασετε την συγκλιση των ακολουθιων
$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}, \quad b_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n.$$

7. Εξετασετε την συγκλιση και βρειτε το οριο για οσες απο τις ακολουθιες υπαρχει.
$$a_n = \frac{2^n n!}{n^n}, \quad b_n = \frac{3^n n!}{n^n}, \quad c_n = n(\sqrt[n]{2}-1)^n, \quad d_n = (1-\frac{1}{n})^n.$$

8. Θεωρουμε την ακολουθια
$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}, \quad n \in \mathbb{N}$$
(1) Δειξετε οτι $a_n \geq \frac{1}{2}$ για καθε n, και αρα $\lim a_n$, αν υπαρχει, ειναι ≥ 0.
(2) Που υπαρχει το λαθος στον παρακατω υπολογισμο;
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n} = 0+\cdots+0 = 0.$$

9. Με χρηση του ορισμου δειξετε η ακολουθια $a_n = (-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}$ δεν ειναι ακολουθια Cauchy.

10. Δειξετε οτι η ακολουθια που οριζεται $a_1 = 1$ και $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ για $n \geq 1$ συγκλινει και βρειτε το οριο. (Υποδ. η (a_n) ειναι αυξουσα και ανω φραγμενη απο το 2, επαγωγη.)

11. Εξετασετε την συγκλιση και βρειτε το οριο της ακολουθιας $x_1 = \frac{3}{2}$ και $x_{n+1} = \sqrt{3x_n - 2}$ για $n \geq 1$. (Υποδ. με επαγωγη δειξετε: (α) $3/2 \leq x_n \leq 2$ για καθε n. (β) η (x_n) ειναι αυξουσα.)