ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι, Χειμ. εξαμ. 2022

Ασκήσεις, Φυλλαδιο 2

1. Αν (a_n) ειναι ακολουθια θετικων ορων με $a_n \to a$ και $k \geq 2$ φυσικος αριθμος, δειξετε οτι $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[k]{a_n}) = \sqrt[k]{a}$.
2. Βρειτε το οριο καθε ακολουθιας
$$a_n = \frac{n!}{n^n}, \qquad b_n = \frac{5^n}{n!}, \qquad c_n = \frac{\sin(n^2)}{\sqrt{n}}, \qquad d_n = \frac{\sin(2^n) + \sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}}.$$
3. Εξετασετε την συγκλιση και βρειτε το οριο καθε μιας απο τις ακολουθιες.
$$a_n = \sqrt[n]{2^n - 1}, \qquad b_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}, \qquad c_n = \sqrt[n]{2^n + \sin(n)}, \qquad d_n = \sqrt[n]{2^n + n^2},$$
4. Εξετασετε την συγκλιση και βρειτε το οριο καθε μιας απο τις ακολουθιες.
$$a_n = \sqrt[n]{2^{-n} + 2^n}, \qquad b_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n}, \qquad c_n = \sqrt[n]{n\log(n) + \log^3(n) + \sqrt{n}}$$
(Σημ.: $\log$ συμβολιζει τον φυσικο λογαριθμο)
5. Υποθετουμε οτι (a_n) ειναι μια ακολουθια θετικων πραγματικων αριθμων με $a_n \to a$.
(1) Αν $0 < a < \infty$ δειξετε οτι η ακολουθια $s_n = \sqrt[n]{a_n}$ εχει οριο $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$.
(2) Ισχυει το ιδιο αν $a = 0$ ή $a = \infty$;
6. Εστω (a_n) ακολουθια για την οποια υπαρχουν $m, M \in \mathbb{R}$ ωστε $0 < m \leq a_n \leq M < \infty$ για καθε $n \in \mathbb{N}$. Δειξετε οτι $s_n = \sqrt[n]{a_n} \to 1$.
7. Δειξετε οτι οι ακολουθιες
$$a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n}, \quad b_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n-1}, \quad n \in \mathbb{N}$$
δεν ειναι ανω φραγμενες.
8. Δειξετε οτι η ακολουθια
$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}, \quad n \in \mathbb{N},$$
ειναι αυξουσα και ανω φραγμενη.
9. Αν $a \in (0,1)$ δειξετε οτι η ακολουθια
$$a_n = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n, \quad n \in \mathbb{N},$$
ειναι ανω φραγμενη.
10. Αν (a_n) ειναι φραγμενη ακολουθια δειξετε οτι και η ακολουθια (b_n) με
$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$
ειναι επισης φραγμενη.