ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι, Χειμ. εξαμ. 2022

Ασκήσεις, Φυλλάδιο 1

1. Βρειτε το συνολο Φ_A ολων των ανω φραγματων του A, και το συνολο φ_A ολων των κατω φραγματων του A, οταν:
$$(a)\ A = \{\frac{1}{n} - \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}\}, \quad (b)\ A = \{\frac{n}{n+m} : n, m \in \mathbb{N}\}$$
2. Βρειτε το inf και sup (οποτε υπαρχουν) των συνολων
$$A = \{\frac{1}{n} - \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}\}, \quad B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}), \quad C = (0,1) - \bigcup_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$$
3. Αν A, B ειναι μη κενα φραγμενα υποσυνολα του $\mathbb{R}$ δειξετε οτι το $A \cup B$ ειναι φραγμενο και οτι
$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\} \qquad \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$$
(Για $x, y \in \mathbb{R}$, $\max\{x, y\}$ συμβολιζει τον μεγαλυτερο απο τους δυο, και $\min\{x, y\}$ τον μικροτερο απο τους δυο)
4. Αν $x, y \in \mathbb{R}$ δειξετε οτι, $\max\{x, y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2}$ και $\min\{x, y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2}$.
5. Αν A, B ειναι μη κενα φραγμενα υποσυνολα του $\mathbb{R}$, οριζομε $A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$. Δειξετε οτι
$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B \qquad \inf(A + B) = \inf A + \inf B.$$
6. (α) Δειξετε οτι αν r ειναι ρητος και α αρρητος, τοτε το αθροισμα $r + \alpha$, το γινομενο $r\alpha$ (αν $r \neq 0$) και το πηλικο $\frac{r}{\alpha}$ ειναι αρρητοι.
(β) Αν α ειναι υπερβατικος αριθμος δειξετε οτι ο α^n ειναι υπερβατικος για καθε $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$.
7. Γραψετε ως κλασματα ακεραιων οσους απο τους παρακατω αριθμους ειναι ρητοι
$$\alpha = 1,232323..., \quad \beta = 0,10110011100011110000... \quad \gamma = 0,17999..., \quad \delta = 0,123456789101112..., \quad \varepsilon = 0,37601601601...$$
8. Εστω A το συνολο
$$A = \{x \in (0,1) : \text{το δεκαδικο αναπτυγμα του } x \text{ περιεχει μονον τα ψηφία 3 και 7}\}$$
Δειξετε οτι το A δεν ειναι αριθμήσιμο.
9. Εστω B το συνολο που περιεχει τις ριζες καθε ταξης, καθε φυσικου αριθμου. Δειξετε οτι το B ειναι αριθμησιμο.
10. Αποδειξετε τις ταυτοτητες
$$(a)\ 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \quad x \in \mathbb{R}, x \neq 1, n \in \mathbb{N}$$
$$(b)\ x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + y^{n-1}), \quad x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$
11. Αν $b_1, b_2, \cdots, b_n$ ειναι θετικοι πραγματικοι αριθμοι με γινομενο $b_1 b_2 \cdots b_n = 1$ δειξετε οτι $b_1 + b_2 + \cdots + b_n \geq n$. (υποδ.: επαγωγη επι του n)
12. (Ανισοτητα αριθμητικου, γεωμετρικου και αρμονικου μεσου). Αν $a_1, a_2, \cdots, a_n$ ειναι θετικοι πραγματικοι αριθμοι δειξετε οτι
$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$
(υποδ.: χρησιμοποιησετε την προηγουμενη ασκηση).
13. Δοθεντος $x \in \mathbb{R}$ θεωρουμε το συνολο,
$$A = \{(nx) : n \in \mathbb{N}\} = \{(x), (2x), (3x), \cdots, (nx), \cdots\}$$
οπου $(x) = x - [x]$, το κλασματικο μερος του x. Βρειτε το $\sup A$ και $\inf A$ οταν ο x ειναι θετικος ρητος.

17* (α) (συνεχεια της προηγουμενης) Βρειτε το $\sup A$ και $\inf A$ οταν ο x ειναι αρρητος αριθμος.
(β) Βρειτε το $\sup B$ και $\inf B$ του συνολου
$$B = \{\sin(n) : n \in \mathbb{N}\} = \{\sin(1), \sin(2), \sin(3), \cdots, \sin(n), \cdots\}$$
(γ) Εξετασετε αν το συνολο
$$C = \left\{\frac{1}{\sin(n)} : n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{\frac{1}{\sin(1)}, \frac{1}{\sin(2)}, \frac{1}{\sin(3)}, \cdots, \frac{1}{\sin(n)}, \cdots\right\}$$
ειναι ανω φραγμενο.