ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι, Τμημα β+γ, Χειμ. εξαμ. 2011

Ασκήσεις, Φυλλαδιο 9

1. Δειξετε οτι αν $n \in \mathbb{N}$ και $x \geq 0$ τοτε
$$e^x \geq 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots \frac{1}{n!}x^n.$$
2. Δειξετε οτι $\sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x$ για $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.
3. Δειξετε οτι η εξισωση
$$\sin(\cos(x)) = x$$
εχει ακριβως μια λυση στο διαστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$.
4. Βρειτε το συνολο συγκλισης καθε δυναμοσειρας
$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n)}{n}x^n,\ (b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \log(n)(x-2)^n,\ (c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}x^n,\ (d)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n}x^n,\ (e)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}(x+1)^n,\ (f)\ \sum_{n=0}^{\infty} n^4(x-2)^n.$$
5. Βρειτε την ακτινα συγκλισης καθε δυναμοσειρας
$$(a)\ 1 + 3x + \frac{x^2}{2^2} + 3^3x^3 + \frac{x^4}{2^4} + 3^5x^5 + \frac{x^6}{2^6} + \cdots, \quad (b)\ \sum_{n=0}^{\infty}(3 + \cos(n))x^n, \quad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n,$$
οπου στην τελευταια $a_n = n!$ αν n αρτιος και $a_n = \frac{1}{n!}$ αν n περιττος.
6. Βρειτε την ακτινα συγκλισης της δυναμοσειρας $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ σε καθε μια απο τις παρακατω περιπτωσεις
(1) Αν $2 \leq a_n \leq 3$ για καθε $n \in \mathbb{N}$.
(2) Αν $n \leq a_n \leq n^2$ για καθε $n \in \mathbb{N}$
(3) Αν $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2},\ n \text{ αρτιος} \\ \frac{1}{2^n},\ n \text{ περιττος}, \end{cases}$
(4) Αν $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2},\ n = 3k, \\ \frac{1}{2^n},\ n = 3k+1 \\ 2^{2n},\ n = 3k+2 \end{cases}$
με $k \in \mathbb{Z}$.
7. Βρειτε ολα τα x για τα οποια η σειρα συγκλινει
$$(a)\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n, \quad (b)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}\frac{(x+1)^n}{x-1}, \quad (c)\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{|x|+1}\right)^n, \quad (d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}$$
8. Δειξετε οτι οι σειρες
$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin(e^{nx}), \quad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(\frac{x}{n})$$
συγκλινουν για καθε $x \in \mathbb{R}$.

Σημειωση: Οι σειρες στις ασκησεις 7,8 δεν ειναι δυναμοσειρες.