

ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι, Τμήμα β+γ, Χειμ. εξαμ. 2011

Ασκήσεις, Φυλλάδιο 10

1. Βρείτε τα πολυωνυμα Taylor  $P_{5,x_0}$  της συναρτησης  $f(x) = \frac{1}{1+x}$  στα σημεια (α)  $x_0 = 0$ , (β)  $x_0 = 1$ .
2. Γραψετε το πολυωνυμο  $P(x) = 1 + 2x - x^2 + 5x^3 - x^4$  σε δυναμεις του  $(x - 1)$ .
3. Βρείτε το πολυωνυμο Taylor βαθμου 8 στο  $x_0 = 0$  για την συναρτηση,

$$f(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6$$

4. Για τις παρακατω συναρτησεις βρείτε τα αντιστοιχα πολυωνυμα Taylor

$$f(x) = e^{x^2}, \quad P_{3,0}(x).$$

$$g(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad P_{4,1}(x).$$

$$h(x) = \sqrt{3 + \cos(x)}, \quad P_{2,0}(x).$$

$$k(x) = \sin(x), \quad P_{6,\frac{\pi}{6}}(x).$$

$$\phi(x) = \log\left(\frac{1}{1-x}\right), \quad P_{5,0}(x).$$

$$\psi(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right), \quad P_{5,0}(x).$$

$$s(x) = \sqrt[3]{1+x}, \quad P_{3,0}(x).$$

5. Βρείτε το αναπτυγμα σε δυναμοσειρα καθε μιας απο τις παρακατω συναρτησεις στο αντιστοιχο σημειο

$$f(x) = e^x, \quad x_0 = 1.$$

$$g(x) = \frac{1}{x}, \quad x_0 = 1.$$

$$h(x) = \log\left(\frac{1}{1-x}\right), \quad x_0 = 0.$$

$$\phi(x) = \cos x, \quad x_0 = \pi.$$

6. Βρείτε το σφαγμα για την προσεγγιση της  $f(x) = \cos(x)$  απο το πολυωνυμο  $P_{4,0}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$  στο διαστημα  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ .
7. Βρείτε το πολυωνυμο Taylor  $P_{N,0}(x)$  που δινει προσεγγιση  $\frac{1}{10^4}$  για την συναρτηση  $f(x) = e^{-x}$  στο διαστημα  $[-1, 1]$ .
8. Κανετε τις γραφικες παραστασεις της συναρτησης  $f(x) = \sin(x)$  και των πολυωνυμων Taylor της,  $P_{1,0}(x), P_{3,0}(x), P_{5,0}(x), P_{7,0}(x)$ , στο ιδιο συστημα αξωνων, στο διαστημα  $[-2\pi, 2\pi]$ .
9. Για  $n \in \mathbb{N}$  πολλες φορες χρησημοποιουμε την προσεγγιση  $\sqrt{n^2+1} \sim n + \frac{1}{2n}$ . (Π.χ.  $\sqrt{101} \sim 10 + \frac{1}{20} = 10,05$  ενω η ακριβης τιμη ειναι  $\sqrt{101} = 10,049876\dots$ ). Εξηγειστε γιατι η χρηση της παραπανω προσεγγισης ειναι σωστη. Για ποια  $n$  γινεται καλυτερη η προσεγγιση;
10. Βρείτε το σφαγμα της προσεγγισης της  $f(x) = \sqrt{x}$  απο το πολυωνυμο Taylor  $P_{2,9}(x)$  στο διαστημα  $[8, 10]$ .
11. Εστω  $f(x)$  ειναι αρκουντως παραγωγισημη και  $P_{3,0}(x)$  το πολυωνυμο Taylor στο 0 βαθμου 3. Δειξτε οτι το πολυωνυμο Taylor στο 0 βαθμου 4 για την  $g(x) = xf(x)$  ειναι  $\Pi_{4,0}(x) = xP_{3,0}(x)$ .
12. Βρείτε το πολυωνυμο Taylor στο 0 βαθμου 4 για την συναρτηση  $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \end{cases}$