ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι, Τμημα 1β+1γ, Χειμ. εξαμ. 2011

Ασκήσεις, Φυλλαδιο 1

1. Για το συνολο $A = \{\frac{1}{n} - \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}\}$ βρειτε:
   (ι) Το συνολο Φ_A ολων των ανω φραγματων του A, δηλ.
   $$\Phi_A = \{M \in \mathbb{R} : \text{το } M \text{ ειναι ανω φραγμα του } A\}$$
   (ιι) Το συνολο ϕ_A ολων των κατω φραγματων του A, δηλ.
   $$\phi_A = \{m \in \mathbb{R} : \text{το } m \text{ ειναι κατω φραγμα του } A\}$$
2. Βρειτε το inf και sup (οταν αυτα υπαρχουν) των συνολων
   $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n})$ $\quad B = (0,1) \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n})$
   $C = \{(-1)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ $\quad D = \{\sqrt{n} + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$
   $E = \{x \in \mathbb{R} : x > x^2\}$ $\quad F = \{\frac{1}{n} - \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}\}$
3. Εστω A, B μη κενα φραγμενα συνολα με $B \subset A \subset \mathbb{R}$. Δειξετε οτι
   $$\inf A \leq \inf B \leq \sup B \leq \sup A$$
4. Αν $A \subset \mathbb{R}$ ειναι τετοιο ωστε για καθε $\epsilon > 0$ να εχομε
   $$a < 1 + \epsilon, \quad \text{για καθε } a \in A,$$
   δειξετε οτι $\sup A \leq 1$.
5. Αν A, B ειναι μη κενα φραγμενα υποσυνολα του $\mathbb{R}$ δειξετε οτι το $A \cup B$ ειναι φραγμενο και
   $$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\} \qquad \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$$
6. Αν A, B ειναι μη κενα φραγμενα υποσυνολα του $\mathbb{R}$, οριζομε $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$. Δειξετε οτι
   $$\sup(A + B) = \sup A + \sup B \qquad \inf(A + B) = \inf A + \inf B.$$
7. Εστω A, B μη κενα υποσυνολα του $\mathbb{R}$ με την ιδιοτητα: για καθε $a \in A$ και για καθε $b \in B$ ισχυει
   $$a \leq b.$$
   Δειξετε οτι $\sup A \leq \inf B$.
8. Δειξετε οτι το αθροισμα, το γινομενο και το πηλικο δυο ρητων αριθμων ειναι ρητοι αριθμοι.
9. Αν r ειναι ρητος και α αρρητος, τοτε το αθροισμα $r + \alpha$, το γινομενο $r\alpha$ και το πηλικο $\frac{r}{\alpha}$ ειναι αρρητοι.
10. Αν α, β ειναι αρρητοι, τι μπορουμε να πουμε για το αθροισμα $\alpha + \beta$, το γινομενο $\alpha\beta$ και το πηλικο $\frac{\alpha}{\beta}$;
11. Δειξετε οτι αν $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ τοτε:
    (α) στο διαστημα (a, b) υπαρχουν απειροι το πληθος ρητοι αριθμοι.
    (β) στο διαστημα (a, b) υπαρχουν απειροι το πληθος αρρητοι αριθμοι.
12. Βρειτε την κλασματικη μορφη των ρητων
    $$a = 1,232323..., \qquad b = 0,37601601601..., \qquad c = 0,999...$$
13. Για $x \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$ δειξετε οτι $[\frac{x}{n}] = [\frac{[x]}{n}]$.
14. Εξετασετε αν υπαρχει ευκολη αποδειξη οτι καθένας απο τους αριθμους
    $$\pi + e, \quad \pi - e, \quad \pi^\pi$$
    ειναι, ή δεν ειναι, ρητος ή υπερβατικος.