Ανισοτητες Hölder και Minkowski

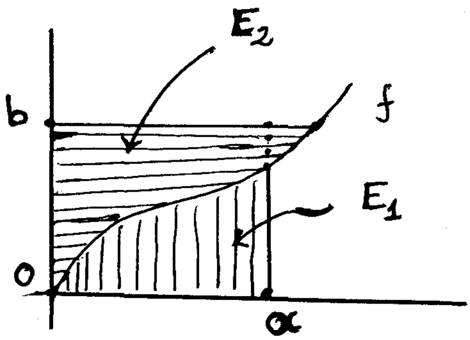
1. Προκαταρτικά.

Δυο δειχτες $p, q \in (1, \infty)$ λεγονται συζυγεις αν $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Για συζυγεις δειχτες ισχυει: $p + q = pq$ και $(p-1)(q-1) = 1$. Για καθε $p \in (1, \infty)$ υπαρχει μοναδικο q που ειναι ο συζυγης δειχτης του p.

Ανισότητα Young. *Αν $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ ειναι γνήσια αυξουσα συνεχης και επι συναρτηση με $f(0) = 0$ και g η αντιστροφη της, τοτε για $a, b > 0$* ισχυει

$$ab \leq \int_0^a f(t)dt + \int_0^b g(s)ds$$

Αποδειξη. Συγκρινουμε εμβαδα στο σχημα:



Έχουμε:

$$ab = \text{εμβαδον ορθογωνιου } ([0, a] \times [0, b]) \leq E_1 + E_2 = \int_0^a f(t)\, dt + \int_0^b g(s)\, ds.$$

Πορισμα. Αν $a, b \geq 0$ και p, q ειναι συζυγεις δειχτες τοτε

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Αποδειξη. Εφαρμοζομε την ανισοτητα Young για την συναρτηση $f(t) = t^{p-1}, p > 1$ της οποίας η αντίστροφη είναι $g(s) = s^{q-1}$. Εχομε λοιπόν

$$ab \leq \int_0^a t^{p-1}dt + \int_0^b s^{q-1}ds.$$

Υπολογίζουμε τα ολοκληρώματα και παίρνουμε την ανισότητα.

2. Ανισοτητα Hölder για πεπερασμενα αθροισματα. *Αν p, q ειναι συζυγεις δειχτες και $x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n \in \mathbb{R}$ (ή στο $\mathbb{C}$) τοτε*

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Αποδειξη. Θετομε

$$X=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \text{και} \qquad Y=\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Αν ενα εκ των X, Y ειναι μηδεν τοτε ειτε ολα τα x_k ειτε ολα τα y_k ειναι μηδεν και η ανισοτητα ισχυει. Υποθέτομε λοιπόν $X>0$ και $Y>0$, και θετομε

$$x'_k=\frac{x_k}{X} \quad \text{και} \quad y'_k=\frac{y_k}{Y}.$$

Απο το πορισμα

$$|x'_k y'_k|\le\frac{|x'_k|^p}{p}+\frac{|y'_k|^q}{q}$$

για $k=1,2,\dots n$, και προσθετοντας κατα μελη εχομε

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}|x'_k y'_k| &\le\sum_{k=1}^{n}\frac{|x'_k|^p}{p}+\sum_{k=1}^{n}\frac{|y'_k|^q}{q}\\ &=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p}\left(\frac{|x_k|}{X}\right)^p+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{q}\left(\frac{|y_k|}{Y}\right)^q\\ &=\frac{1}{pX^p}\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)+\frac{1}{qY^q}\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)\\ &=\frac{1}{pX^p}(X^p)+\frac{1}{qY^q}(Y^q)\\ &=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\end{aligned}$$

Αρα $1\ge\sum_{k=1}^{n}|x'_k y'_k|=\sum_{k=1}^{n}\frac{|x_k|}{X}\frac{|y_k|}{Y}$, δηλαδη

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k y_k|\le XY=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Ανισοτητα Hölder. *Αν p, q ειναι συζυγεις δεικτες και $\{x_n\}, \{y_n\}$ ακολουθιες, τοτε*

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k y_k|\le\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Αποδειξη. Για καθε n ισχυει

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}|x_k y_k| &\le\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\le\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

Αφηνομε το n στο αριστερό αθροισμα να τεινει στο ∞ και εχομε το ζητουμενο.

3. Ανισοτητα Minkowski για πεπερασμενα αθροισματα *Αν* $1 \le p < \infty$ *και* $x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n \in \mathbb{R}$ *(ή στο* $\mathbb{C}$*) τοτε*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Αποδειξη. Αν $p = 1$ η ανισοτητα ισχυει. Υποθετομε $p > 1$. Αν $\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p = 0$ εχομε την ανισοτητα τετριμμενα. Υποθετομε $\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \neq 0$ και εχομε

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p &= \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{p-1} |x_k + y_k| \\ &\le \sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|) |x_k + y_k|^{p-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} |x_k| |x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} |y_k| |x_k + y_k|^{p-1},\end{aligned}$$

Εστω τωρα q ο συζυγης δειχτης του p. Τοτε $1 < q < \infty$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ και με εφαρμογη της ανισοτητας Hölder για πεπερασμενα αθροισματα προκυπτει,

$$\begin{aligned}&\le \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}},\end{aligned}$$

και επειδη $(p-1)q = p$ και $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$, καταληγομε

$$= \left(\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Συμμαζευοντας τα παραπανω εχομε

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \le \left(\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Διαιρουμε τωρα και τα δυο μελη με την ποσοτητα $\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{1-\frac{1}{p}}$ την οποια υποθεσαμε μη μηδενικη και εχομε το ζητουμενο.

Ανισοτητα Minkowski. *Αν* $1 \le p < \infty$ *και* $\{x_n\}, \{y_n\}$ *ακολουθιες στο* $\mathbb{R}$ *(ή στο* $\mathbb{C}$*) τοτε*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Αποδειξη. Για καθε n ισχυει

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\le \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Αφηνομε το n στο αριστερο αθροισμα να τεινει στο ∞ και εχομε το ζητουμενο.

4. Ολοκληρωτικες μορφες

Ανισοτητα Hölder (ολοκληρωτικη μορφη). *Αν* f, g *ειναι συνεχεις συναρτησεις στο διαστημα* $[a, b]$ *και* p, q *συζυγεις δεικτες, τοτε*

$$\int_a^b |f(t)g(t)|\, dt \le \left(\int_a^b |f(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(t)|^q\, dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Ανισοτητα Minkowski (ολοκληρωτικη μορφη). *Αν* $1 \le p < \infty$ *και* f, g *ειναι συνεχεις συναρτησεις στο διαστημα* $[a, b]$ *τοτε*

$$\left(\int_a^b |f(t) + g(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |f(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Παρατηρηση. Η ανισοτητα Hölder για $p = q = 2$ ειναι γνωστη σαν ανισοτητα Cauchy-Schwarz ή ακομη και σαν ανισοτητα Bunyakovskii.