

Στοιχεία Συναρτησιακής Ανάλυσης.

Εξέταση περιόδου Σεπτεμβρίου 2005.

1. (α) Διατυπώσετε προσεκτικά και λεπτομερώς το Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz για τον δυϊκό ενός χώρου Hilbert.

(β) Αν H είναι χώρος Hilbert και $x_n, y_n \in H$ με $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow 1$, δείξτε ότι $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$.

2. (α) Εστω H χώρος Hilbert και $\{x_n\}$ ακολουθία ορθογωνίων ανα δυο διανυσματων του H . Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει στον H αν και μονον αν η αριθμητική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ συγκλίνει.

(β) Αν X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $X \neq \{0\}$, δείξτε ότι για κάθε $x \in X$, $\|x\| = \sup\{|\langle x, y \rangle| : y \in X, \|y\| = 1\}$.

3.(α) Εστω l^2 ο χώρος των τετραγωνικά αθροισίμων ακολουθιών με την συνήθη νόρμα. Χρησιμοποιώντας την ακολουθία $\{x_n\}$ με $x_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ (το 1 στην n -οστή θέση) δείξτε ότι η κλειστή μοναδιαία μπάλα του l^2 δεν είναι συμπαγές σύνολο.

(β) Εστω $X = \{p(z) : p(z) \text{ πολυώνυμο}\}$ ο γραμμικός χώρος όλων των πολυωνύμων στο $[0, 1]$, με νόρμα

$$\|p(z)\| = \sup_{t \in [0,1]} |e^{-t} p(t)|$$

Δείξτε ότι η $\|\cdot\|$ είναι νόρμα στον X . Είναι ο X πλήρης ως προς αυτή την νόρμα;

4. (α) Διατυπώσετε την αρχή του ομοιόμορφα φραγμένου για χώρους με νόρμα.

(β) Δώστετε από ένα παράδειγμα σε κάθε περίπτωση με πλήρη δικαιολόγηση:

(β1) Χώρου με εσωτερικό γινόμενο που δεν είναι χώρος Hilbert.

(β2) Γραμμικού τελεστή μεταξύ χώρων με νόρμα που δεν είναι φραγμένος.

(β3) Γνήσιου γραμμικού υποχώρου του c_0 (με την συνήθη νόρμα) που είναι πυκνός στον c_0 .

5. (α) Ποτε δυο νόρμες πάνω σε γραμμικό χώρο X λέγονται ισοδυναμες; Δώστετε παράδειγμα μιας νόρμας στον χώρο $C[0, 1]$ των συνεχών συναρτησεων $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ που να μην είναι ισοδυναμη με την συνήθη νόρμα του $C[0, 1]$.

(β) Δείξτε ότι η $L : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$L(f) = \int_0^1 f(t) \sin(\pi t) dt$$

είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στο $C[0, 1]$ και υπολογίστετε την νόρμα του.

Απαντήστε σε 4 από τα 5 θέματα.

Καλή επιτυχία.