Στοιχεία Συναρτησιακής Ανάλυσης.

Τελικη Εξεταση, 7 Ιουνιου 2005.

1. Στον χωρο $C[0,1]$ των συνεχων συναρτησεων $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ θεωρουμε τις νορμες

$$\|f\|_\infty=\sup_{0\le t\le 1}|f(t)|,\qquad \|f\|_1=\int_0^1|f(t)|\,dt,\qquad \|f\|_2=\left(\int_0^1|f(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

και $f,f_n\in C[0,1]$, $n=1,2,3,\cdots$. Δειξετε οτι:
(α) Αν $f_n\xrightarrow{\|\,\|_\infty} f$ τοτε $f_n\xrightarrow{\|\,\|_1} f$.
(β) Αν $f_n\xrightarrow{\|\,\|_2} f$ τοτε $f_n\xrightarrow{\|\,\|_1} f$.
(γ) Ισχυει το αντιστροφο του (α);

2. Εστω H χωρος Hilbert και Y γνησιος υποχωρος του H.
(α) Αν ο ειναι Y κλειστος και $Y\neq\{0\}$ δειξετε οτι υπαρχει μη μηδενικο συναρτησοειδες $F\in H^*$ με $Y^\perp\subset \mathrm{Ker}(F)$.
(β) Αν ο Y ειναι πυκνος στον H δειξετε οτι $Y^\perp=\{0\}$.

3. (α) Διατυπώσετε προσεκτικα το Θεώρημα ανοικτης απεικονισης.
(β) Αν $(X,\|\,\|)$ χωρος με νορμα και $F:X\to\mathbb{R}$ μη μηδενικο γραμμικο συναρτησοειδες δειξετε οτι $F(X)=\mathbb{R}$.
(γ) Αν $(X,\|\,\|)$ χωρος με νορμα και $F,G\in X^*$ ειναι γραμμικως ανεξαρτητα φραγμενα γραμμικα συναρτησοειδη δειξετε οτι $\mathrm{Ker}(F)\neq\mathrm{Ker}(G)$.

4. (α) Διατυπωσετε προσεκτικα και λεπτομερως το Θεωρημα Riesz για τον δυικο ενος χωρου Hilbert.
(β) Εστω X χωρος με εσωτερικο γινομενο και $x,y\in X$. Δειξετε οτι τα επομενα ειναι ισοδυναμα:
(ι) $x\perp y$
(ιι) $\|x+\lambda y\|=\|x-\lambda y\|$ για καθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

5. (α) Εστω X,Y χωροι Banach και $T:X\to Y$ φραγμενος γραμμικος τελεστης με $T(X)=Y$. Υποθετομε οτι $\|T(x)\|\geq\|x\|$ για καθε $x\in X$. Δειξετε οτι ο $T^{-1}:Y\to X$ ειναι φραγμενος.
(β) Διατυπωσετε προσεκτικα το Θεωρημα Hahn-Banach.

Απαντήσετε σε 4 απο τα 5 θέματα.
Καλη επιτυχια.