Ανάλυση Fourier

Εξεταση περιόδου Ιανουαρίου 2006

1.(α) Βρείτε την σειρα Fourier της συναρτησης

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

(επεκταμενης περιοδικά).
(β) Διατυπώσετε το Θεώρημα Riemann-Lebesgue.

2. (α) Εξετάσετε ως προς την συγκλιση σε κάθε σημείο, τη σειρα Fourier της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 1 \leq |x| \leq \pi, \\ \sqrt[3]{|x|}, & 0 \leq |x| < 1 \end{cases}$$

(β) Διατυπώσετε το βασικό θεώρημα που χρησιμοποιείτε στην απάντηση σας.

3.(α) Δώσετε τον ορισμό της αθροισιμότητας σειρών κατα Cesaro. Δώσετε παραδειγμα σειράς που δεν συγκλίνει η οποία είναι Cesaro αθροίσιμη.
(β) Δείξετε οτι αν μια σειρα $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ είναι Cesaro αθροίσιμη και $na_n \to 0$ καθως $n \to \infty$ τοτε η σειρα συγκλίνει.

4. (α) Βρείτε την σειρά Fourier της $f(x) = |x|$, $-\pi \leq x \leq \pi$ και στην συνέχεια την τιμή του αθροίσματος $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$.
(β) Χρησιμοποιόντας την Cesaro αθροισιμότητα, δείξετε οτι αν f και g ειναι 2π - περιοδικές και ολοκληρώσιμες συναρτησεις των οποίων οι σειρές Fourier ταυτίζονται, τοτε $f \equiv g$ σε καθε διάστημα οπου οι f, g ειναι συνεχείς.

5. (α) Υπαρχει συνάρτηση $f \in L^2[0, 2\pi]$ της οποίας η σειρα Fourier να είναι

$$S(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)} \cos(nx) \quad ?$$

(β) Υπαρχει συναρτηση f, 2π - περιοδική και δυο φορες παραγωγίσιμη με δεύτερη παράγωγο συνεχή σε ολο το $\mathbb{R}$ της οποίας η σειρα Fourier να ειναι

$$S(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \cos(nx) \quad ?$$

Δικαιολογησετε τις απαντήσεις σας.

Απαντήσετε σε 4 απο τα 5 θέματα. Κάθε θέμα είναι 2,5 μοναδες