

Ανάλυση Fourier

Δεύτερη πρόοδος, 17-12-2005

1.(α) Δώσετε τον ορισμό της αθροισιμότητας σειρών κατά Cesaro. Δώσετε παραδειγμα σειράς που δεν συγκλίνει η οποία είναι Cesaro αθροίσιμη.

(β) Δείξτε ότι αν μια σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ είναι Cesaro αθροίσιμη και $na_n \rightarrow 0$ καθώς $n \rightarrow \infty$ τότε η σειρά συγκλίνει.

2. (α) Ορίστε τον πυρήνα Fejer και περιγράψτε τις βασικές ιδιότητες του.

(β) Διατυπώστε το θεώρημα Fejer για την Cesaro αθροισιμότητα σειρών Fourier.

(γ) Αν f είναι 2π -περιοδική, ολοκληρώσιμη και υπάρχουν $m, M \in \mathbb{R}$ ώστε $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε x , δείξτε ότι οι Fejer μέσοι οροί $\sigma_n(x)$ της σειράς Fourier της f ικανοποιούν επίσης τη σχέση: $m \leq \sigma_n(x) \leq M$ για κάθε x και για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

3. (α) Βρείτε την σειρά Fourier της $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0 \\ +1, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$ και στην συνέχεια βρείτε

την τιμή του αθροίσματος $s = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$

(β) Περιγράψτε τον σκελετό της αποδείξης ότι το τριγωνομετρικό σύστημα είναι βάση του $L^2[0, 2\pi]$.

4. (α) Δώστε τον ορισμό της αθροισιμότητας σειρών κατά Abel. Δώστε παράδειγμα σειράς που **δεν** είναι Abel αθροίσιμη.

(β) Δίδεται η σειρά Fourier $\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$ της συνάρτησης $f(x) = x^2$, $-\pi < x \leq \pi$, (επεκταμένη περιοδικά). Δείξτε ότι

$$(a) \lim_{r \rightarrow 1^-} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} r^n \right) = -\frac{\pi^2}{12}. \quad \left(= \frac{1}{4} \left(-\frac{\pi^2}{3} \right) \right)$$

$$(b) \lim_{r \rightarrow 1^-} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} r^{2k} \right) = -\frac{\pi^2}{12}. \quad \left(= \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{3} \right)$$

5. (προαιρετικό) (α) Κατασκευάστε μια φραγμένη ακολουθία αριθμών η οποία δεν είναι συγκλίνουσα κατά Cesaro.

(β) Δείξτε ότι το σύνολο $\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos x, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos 2x, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos 3x, \dots \right\}$ αποτελεί βάση του χώρου $L^2[0, \pi]$.

Απαντήστε σε 3 από τα 4 πρώτα θέματα. Κάθε θέμα είναι 3,3333... μονάδες