# Στοιχεία Συναρτησιακής Ανάλυσης.

Δευτερη πρόοδος, 24-05-2005

**1.** Εστω $(X, \| \|)$ χωρος με νορμα και $B(X)$ ο χωρος των φραγμενων γραμμικων τελεστων $T : X \to X$.
(α) Αν $T \in B(X)$ και $G$ υποσυνολο της μοναδιαίας σφαίρας $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ που είναι πυκνό στην $S$, δείξετε οτι $\|T\| = \sup_{y \in G} \|T(y)\|$.
(β) Αν $\{T_n\}$ ειναι ακολουθια Cauchy στον $B(X)$ και $\{x_n\}$ ακολουθια Cauchy στον $X$ δειξετε οτι η $\{y_n = T_n(x_n)\}$ ειναι ακολουθια Cauchy στον $X$.
(γ) Διατυπώσετε το Θεώρημα (αρχη) του ομοιομορφου φράγματος.

**2.** Εστω $H$ χωρος Hilbert και $Y$ μη κενο υποσυνολο του $H$.
(α) Δειξετε οτι το $Y^{\perp}$ ειναι κλειστος γραμμικος υποχωρος του $H$.
(β) Αν το $Y$ ειναι επιπλεον γραμμικος υποχωρος του $H$ δειξετε οτι ο $Y$ ειναι κλειστος αν και μονον αν $Y = Y^{\perp\perp}$.
(γ) Στην περιπτωση $H = l_2$ με το συνηθες εσωτερικο γινομενο και $Y = c_{00}$ ο γραμμικος υποχωρος όλων των τελικα μηδενικων ακολουθιών, βρειτε το $Y^{\perp}$ και $Y^{\perp\perp}$.

**3.** (α) Διατυπώσετε το Θεώρημα Riesz για την αναπαρασταση των φραγμένων γραμμικων συναρτησοειδων σε χώρο Hilbert.
(β) Ποιο ειναι το στοιχειο του $l_2$ που αναπαριστα το συναρτησοειδες $F \in (l_2)^*$ που οριζεται: $F(x_1, x_2, \cdots) = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$;
(γ) Αν $Y$ κλειστος γραμμικος γνησιος υποχωρος ενος χωρου Hilbert $H$, δειξετε οτι υπαρχει $F \in H^*$, $F \neq 0$ με $Y \subseteq \mathrm{Ker}(F)$.

**4.** (α) Δώσετε τον ορισμο του δυϊκου χωρου $X^*$ ενος χωρου με νορμα $X$, και στη συνέχεια διατυπώσετε το Θεώρημα Hahn-Banach.
(β) Αν $X$ ειναι χωρος με νορμα και $f, g \in X^*$ με $\mathrm{Ker}(f)$=$\mathrm{Ker}(g)$ δείξετε οτι υπαρχει $r \in \mathbb{R}$ ωστε $f = rg$.
(γ) Δωσετε παραδειγμα ενος **μη φραγμενου** γραμμικού συναρτησοειδους στο χωρο $c_{00}$ με την συνηθη sup νορμα.

**5.** (προαιρετικό) (α) Εστω $X$ χωρος Banach και $T : X \to X$ γραμμικος τελεστης. Δειξετε οτι ο $T$ ειναι φραγμενος αν και μονον αν $F \circ T \in X^*$ για καθε $F \in X^*$.
(β) Αν $\| \|_1$ και $\| \|_2$ ειναι δυο νορμες σε ενα γραμμικο χώρο $X$ και ο $X$ ειναι Banach ως προς καθε μια απο τις δυο νορμες και επιπλεον υπαρχει σταθερα $C$ ωστε $\|x\|_1 \leq C\|x\|_2$ για καθε $x \in X$, δειξετε οτι οι δυο νορμες ειναι ισοδυναμες (υποδειξη: Θεωρημα ανοικτης απεικονισης).

Απαντήσετε σε 3 απο τα 4 πρώτα θέματα. Το 5 ειναι για προσθετες μοναδες
Τα θεματα ειναι ισοδυναμα. Καλη επιτυχια.