

Στοιχεία Συναρτησιακής Ανάλυσης.

Δεύτερη πρόοδος, 30-03-2005, Λυσεις

1. (α) Επειδη $\|T\| = \sup_{x \in S} \|T(x)\|$ και $G \subset S$ θα εχομε

$$\sup_{y \in G} \|T(y)\| \leq \sup_{x \in S} \|T(x)\| = \|T\|.$$

Θα δειξομε τωρα την αντιστροφη ανισοτητα. Εστω $x \in S$, τοτε υπαρχουν $y_n \in G$ με $y_n \rightarrow x$. Απο την συνεχεια του T , $T(y_n) \rightarrow T(x)$, και απο συνεχεια της νορμας, $\|T(y_n)\| \rightarrow \|T(x)\|$. Τοτε $\|T(y_n)\| \leq \sup_{y \in G} \|T(y)\|$ για καθε n , και περνωντας στο οριο, $\|T(x)\| \leq \sup_{y \in G} \|T(y)\|$. Αυτο ισχυει για το τυχαιο $x \in S$ αρα

$$\sup_{x \in S} \|T(x)\| \leq \sup_{y \in G} \|T(y)\|,$$

που ειναι η ζητουμενη ανισοτητα.

(β) Οι $\{T_n\}$, $\{x_n\}$ ειναι Cauchy, αρα φραγμενες, δηλ. υπαρχουν M_1 και M_2 με $\|T_n\| \leq M_1$ και $\|x_n\| \leq M_2$ για καθε n . Τοτε

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\| &= \|T_n(x_n) - T_m(y_m)\| = \|T_n(x_n) - T_n(y_m) + T_n(y_m) - T_m(y_m)\| \\ &\leq \|T_n(x_n) - T_n(y_m)\| + \|T_n(y_m) - T_m(y_m)\| \\ &= \|T_n(x_n - x_m)\| + \|(T_n - T_m)(y_m)\| \leq \|T_n\| \|x_n - x_m\| + \|T_n - T_m\| \|x_m\| \\ &\leq M_1 \|x_n - x_m\| + M_2 \|T_n - T_m\| \end{aligned}$$

Αν $\varepsilon > 0$, υπαρχει N_1 ωστε $\|x_n - x_m\| \leq \varepsilon/2M_1$ για $n, m \geq N_1$. Επισης υπαρχει N_2 ωστε $\|T_n - T_m\| \leq \varepsilon/2M_2$ για $n, m \geq N_2$. Για $N_0 = \max\{N_1, N_2\}$ και $n, m \geq N_0$ θα εχομε τοτε $\|y_n - y_m\| \leq M_1(\varepsilon/2M_1) + M_2(\varepsilon/2M_2) = \varepsilon$, δηλ. η $\{y_n = T_n(x_n)\}$ ειναι Cauchy.

2. (α) Αν $z_1, z_2 \in Y^\perp$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ τοτε για $y \in Y$ εχομε $\langle \lambda z_1 + \mu z_2, y \rangle = \lambda \langle z_1, y \rangle + \mu \langle z_2, y \rangle = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0$. δηλ. $\lambda z_1 + \mu z_2 \in Y^\perp$ αρα ο Y^\perp ειναι γραμμικος υποχωρος.

Επισης αν $\{z_n\}$ ακολουθια απο τον Y^\perp με $z_n \rightarrow z \in H$ τοτε για $y \in Y$, $\langle z, y \rangle = \lim \langle z_n, y \rangle = 0$, δηλ. $z \in Y^\perp$ και ο Y^\perp ειναι κλειστος γραμμικος υποχωρος.

(β) Ο $Y^{\perp\perp} = (Y^\perp)^\perp$ ειναι παντα κλειστος (απο το (α)) αρα αν $Y = Y^{\perp\perp}$ τοτε ο Y ειναι κλειστος. Υποθετομε τωρα οτι Y κλειστος. Γνωριζομε οτι $Y \subset Y^{\perp\perp}$ (αν $y \in Y$ τοτε $\langle y, v \rangle = 0$ για καθε $v \in Y^\perp$ οποτε $y \in Y^{\perp\perp}$) αρα αρκει να δειξομε $Y^{\perp\perp} \subset Y$. Αφου ο Y κλειστος ο H γραφεται $H = Y \oplus Y^\perp$. Εστω $x \in Y^{\perp\perp}$, τοτε $x = y + z$ με $y \in Y$ και $z \in Y^\perp$. Απο την υποθεση $y \in Y \subset Y^{\perp\perp}$ αρα $z = x - y \in Y^{\perp\perp}$. Τοτε ομως $z \in Y^\perp \cap Y^{\perp\perp}$ αρα $z = 0$ οποτε $x = y \in Y$. Αφου το x ηταν τυχαιο εχομε $Y^{\perp\perp} \subset Y$ αρα $Y = Y^{\perp\perp}$.

(γ) Εστω $x = (x_1, x_2, \dots) \in (c_{00})^\perp$, και θεωρουμε τα $e_n = (0, 0, \dots, 1, \dots) \in c_{00}$ (το 1 στην n -οστη θεση). Τοτε για καθε n θα εχομε $x_n = \langle x, e_n \rangle = 0$ οποτε $x = (0, 0, \dots)$, δηλ. $(c_{00})^\perp = \{0\}$. Επειται οτι $(c_{00})^{\perp\perp} = \{0\}^\perp = l_2$.

3. (β) Απο το Θεωρημα Riesz υπαρχει μοναδικο $v = (v_1, v_2, \dots) \in l_2$ ωστε $F(x) = \langle x, v \rangle$ για καθε $x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2$. Επιλεγοντας διαδοχικα $x = e_k = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots)$ (το 1 στην k -οστη θεση) εχομε $1/n = F(e_k) = \langle e_k, v \rangle = v_k$ για $1 \leq k \leq n$ και $0 = F(e_k) = \langle e_k, v \rangle = v_k$ για $k > n$. Αρα $v = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots)$.

(γ) Αφου ο Y κλειστος ο H γραφεται $H = Y \oplus Y^\perp$. Εστω $w \in H \setminus Y$ τοτε $w = y + v$ με $y \in Y$ και $v \in Y^\perp$. Το $v \neq 0$ γιατι αλλιως θα ηταν $w = y \in Y$, ατοπο. Οριζομε $f_v : H \rightarrow \mathbb{R}$, $f_v(x) = \langle x, v \rangle$. Το $f_v \in H^*$ και $f_v(y) = \langle y, v \rangle = 0$ για καθε $y \in Y$, δηλ. $Y \subset \text{Ker}(f_v)$. Επισης $f_v \neq 0$ γιατι $f_v(v) = \|v\|^2 \neq 0$.

4. (β) Αν $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g) = X$ τότε $f = g \equiv 0$ και $f = 1 \cdot g$ (τετριμενα).

Αν $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g)$ είναι γνήσιος υποχώρος του X , τότε υπάρχει $x_0 \in X$ με $f(x_0) \neq 0$ (αρα και $g(x_0) \neq 0$). Θετούμε $z_0 = \frac{1}{f(x_0)}x_0$ οπότε $f(z_0) = 1$. Τότε για $x \in X$, $x - f(x)z_0 \in \text{Ker}(f)$ (γιατί $f(x - f(x)z_0) = f(x) - f(x)f(z_0) = f(x) - f(x) = 0$). Αρα $x - f(x)z_0 \in \text{Ker}(g)$ δηλ. $g(x) - f(x)g(z_0) = g(x - f(x)z_0) = 0$. Έπεται ότι $g(x) = rf(x)$ για κάθε $x \in X$ με $r = g(z_0) \neq 0$.

(γ) Ένα παράδειγμα είναι $F : c_{00} \rightarrow \mathbb{R}$ με $F(x_1, x_2, \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Είναι μη φραγμένο γιατί αν υποθέσουμε το αντίθετο, για τα διανύσματα $a_n = (1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots) \in c_{00}$ (n το πλήθος μονάδες στις n πρώτες θέσεις) θα ισχύει $n = F(a_n) \leq C \|a_n\|_{\infty} = C \cdot 1 = C$, για μια σταθερά C και όλα τα n , άτοπο.

5. (α) Αν $T : X \rightarrow X$ φραγμένος και $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές τότε η σύνθεση $F \circ T$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές.

Αντιστρόφα υποθέτουμε ότι $F \circ T$ φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές για κάθε $F \in X^*$. Αν υποθέσουμε ότι ο $T : X \rightarrow X$ δεν είναι φραγμένος, τότε υπάρχουν x_n με $\|x_n\| = 1$ και $\|T(x_n)\| \rightarrow \infty$. Για κάθε n υπάρχει $F_n \in X^*$ με $\|F_n\| = 1$ και $F_n(T(x_n)) = \|T(x_n)\|$ (Πορίσμα του Hahn-Banach). Τότε

$$\|F_n \circ T\| = \sup_{\|x\|=1} |F_n \circ T(x)| \geq F_n(T(x_n)) = \|T(x_n)\| \rightarrow \infty, \quad (*)$$

Όμως για $x \in X$, $|F_n \circ T(x)| \leq \|F_n\| \|T(x)\| = 1 \cdot \|T(x)\| = \|T(x)\|$, δηλ. οι απεικονίσεις $F_n \circ T : X \rightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιούν τις συνθήκες της αρχής του ομοιομορφου φραγματος (με $M_x = \|T(x)\|$). Αρα υπάρχει M ώστε $\|F_n \circ T\| \leq M$ για κάθε n , το οποίο αντιβάνει στην (*), και έχουμε άτοπο. Έπεται ότι ο T φραγμένος.

2η λύση (με χρήση του Θεωρήματος του κλειστού γραφηματος). Αρκεί να δείχθει ότι ο $T : X \rightarrow X$ έχει κλειστό γραφήμα. Εστω $\{x_n\}$ ακολουθία στον X ώστε $x_n \rightarrow x$ και $T(x_n) \rightarrow y$. Αφού $F \circ T$ συνεχής για κάθε $F \in X^*$ θα έχουμε $F(T(x_n)) \rightarrow F(T(x))$. Επίσης αφού $T(x_n) \rightarrow y$ θα έχουμε $F(T(x_n)) \rightarrow F(y)$ για κάθε $F \in X^*$. Από την μοναδικότητα των ορίων, $F(T(x)) = F(y)$ για κάθε $F \in X^*$. Από πορίσμα του Hahn-Banach έπεται $T(x) = y$ αρα το γραφήμα του T είναι κλειστό. Από το Θεώρημα του κλειστού γραφηματος έπεται ότι ο T είναι φραγμένος.

(β) Θεωρούμε τον ταυτοτικό τελεστή $I : (X, \|\cdot\|_2) \rightarrow (X, \|\cdot\|_1)$. Ο I είναι γραμμικός, 1-1, και επι και είναι φραγμένος από την υποθεση, $\|I(x)\|_1 = \|x\|_1 \leq C \|x\|_2$. Επίσης οι $(X, \|\cdot\|_2)$ και $(X, \|\cdot\|_1)$ είναι Banach αρα από το πορίσμα του θεωρήματος ανοικτής απεικόνισης ο αντιστροφος $I^{-1} = I : (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow (X, \|\cdot\|_2)$ είναι φραγμένος. Δηλ. υπάρχει σταθερά K ώστε $\|I(x)\|_2 = \|x\|_2 \leq K \|x\|_1$. Έπεται ότι οι νόρμες είναι ισοδύναμες.