Μαθημα 35

3. Εξετασετε αν οι συναρτησεις ειναι παραγωγισιμες στο σημειο $x_0 = 0$.

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ (b) $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ (c) $h(x) = x|x|$.

Εξεταζουμε αν υπαρχει το $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

(α) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x} - 0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$

$\Rightarrow f'(0) = 0$

(β) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} \overset{L.H.}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{2x} =$

$\overset{L.H.}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2} = 0$

$\Rightarrow f'(0) = 0$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x|x| - 0}{x} = \lim\limits_{x\to 0} |x| = 0 \Rightarrow f'(0) = 0.$

4. Εξετασετε αν η συναρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sin(\frac{x}{2})} - \frac{1}{x}, & 0 < |x| < \pi, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ ειναι παραγωγισιμη στο 0.

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2\sin(\frac{x}{2})} - \frac{1}{x}}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x - 2\sin(\frac{x}{2})}{2x^2 \sin(\frac{x}{2})} \overset{L.H.}{=}$

$\overset{LH}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x/2)}{4x \sin(x/2) + x^2 \cos(x/2)} \overset{L.H.}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\sin(x/2)}{4\sin(x/2) + 2x\cos(x/2) + 2x\cos(x/2) - \frac{1}{2}x^2 \sin(x/2)} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\sin(x/2)}{(4 - \frac{1}{2}x^2)\sin(\frac{x}{2}) + 4x\cos(x/2)} \overset{LH}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{4}\cos(x/2)}{-x\sin(x/2) + \frac{1}{2}(4 - \frac{1}{2}x^2)\cos(x/2) + 4\cos(x/2) - 2\sin(x/2)}$

$= \frac{\frac{1}{4}}{0 + 2 + 4 - 0} = \frac{1}{24}, \quad f'(0) = \frac{1}{24}.$

5. (α) Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ειναι παραγωγισιμη στο $c\in(a,b)$ δειξετε οτι $\lim_{h\to0}\frac{f(c+h)-f(c-h)}{2h}=f'(c)$.
(β) Βρειτε συναρτηση $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ ωστε το οριο $\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(-h)}{2h}$ υπαρχει αλλα η f δεν ειναι παραγωγισιμη στο 0.

(α) $$\frac{f(c+h)-f(c-h)}{2h}=\frac{f(c+h)-f(c)+f(c)-f(c-h)}{2h}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{f(c+h)-f(c)}{h}+\frac{f(c)-f(c-h)}{h}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{f(c+h)-f(c)}{h}+\frac{f(c-h)-f(c)}{-h}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{f(c+h)-f(c)}{h}+\frac{f(c+u)-f(c)}{u}\right)\quad\left(\begin{array}{l}u=-h\\ u\to0\Leftrightarrow h\to0\end{array}\right)$$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(c+h)-f(c-h)}{2h}=\frac{1}{2}\left(\lim_{h\to0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}+\lim_{u\to0}\frac{f(c+u)-f(c)}{u}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(f'(c)+f'(c)\right)=f'(c)$$

(β) $f(x)=|x|$, $$\frac{f(h)-f(-h)}{2h}=\frac{|h|-|-h|}{2h}=\frac{0}{2h}\xrightarrow{h\to0}0$$

αλλα $f'(0)$ δεν υπαρχει.

6. Εστω $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ παραγωγισιμη και ισχυει $f(0)=0$ και $|f'(x)|\le\sqrt[3]{|x|}$ για καθε $x\in(-1,1)$. Δειξετε οτι η σειρα $\sum_{n=2}^{\infty}f(\frac{1}{n})$ συγκλινει.

Απο Θ.Μ.Τ, $\frac{f(\frac{1}{n})-f(0)}{\frac{1}{n}-0}=f'(\xi)$ με $0<\xi<\frac{1}{n}$, επομενως

$$f(\tfrac{1}{n})=\tfrac{1}{n}f'(\xi)\Rightarrow|f(\tfrac{1}{n})|=\tfrac{1}{n}|f'(\xi)|\le\tfrac{1}{n}\sqrt[3]{|\xi|}\le\tfrac{1}{n}\sqrt[3]{\tfrac{1}{n}}=\frac{1}{n^{1+1/3}}$$

Απο κριτηριο συγκρισης $\sum_{n=2}^{\infty}|f(\frac{1}{n})|\le\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{1+1/3}}<\infty$, δηλ

η σειρα συγκλινει απολυτα, αρα συγκλινει.

7. Εστω $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ παραγωγισιμη με $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$. Δειξετε οτι η σειρα $\sum_{n=2}^{\infty} f(1/n)$ δεν ειναι αθροισιμη. Γενικα, για ποιες ακολουθιες (x_n) με ορους στο $(0,1)$ και $x_n \to 0$ ειναι η σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$ αθροισιμη;

Παρατηρουμε πρωτα οτι $f(x) > 0$ για $x \in (0, \delta)$ (για καποιο $\delta > 0$).

Πραγματι $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \to 0} 1 \Rightarrow \frac{f(x)}{x} > \frac{1}{2}$ για $x \in (0, \delta)$, $\delta > 0$

$\Rightarrow f(x) > \frac{1}{2} x > 0$ για $x \in (0, \delta)$

Επομενως $f(\frac{1}{n}) > 0$ για $n \geq N_0$ (για καποιο $N_0 \in \mathbb{N}$), δηλ

η $\sum_{n=N_0}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ εχει θετικους ορους. Τωρα,

$$\frac{f(\frac{1}{n}) - f(0)}{\frac{1}{n} - 0} = \frac{f(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1$$

Επομενως απο κριτηριο συγκρισης η $\sum_{n=N_0}^{\infty} f(1/n)$ εχει ιδιο

χαρακτηρα ως προς την συγκλιση με την $\sum \frac{1}{n}$, δηλ δεν

συγκλινει.

Με το ιδιο σκεπτικο, $\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$ ειναι αθροισιμη $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ειναι

αθροισιμη

8. (Μια ακομη αποδειξη οτι η αρμονικη σειρα δεν ειναι αθροισιμη). Με χρηση του θεωρηματος μεσης τιμης δειξετε οτι $\frac{1}{n+1} < \log(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$ για καθε $n \in \mathbb{N}$. Δειξετε στην συνεχεια οτι

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} < \log(n) \leq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}, \quad n \geq 2$$

και συμπερανετε οτι $\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n)}{S_n} = 1$ οπου S_n ειναι το n-νοστο μερικο αθροισμα της σειρας $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Για την $f(x) = \log x$, απο ΘΜΤ στο διαστημα $[n, n+1]$,

$$\frac{\log(n+1)-\log(n)}{n+1-n} = f'(\xi) = \frac{1}{\xi}, \qquad n < \xi < n+1$$

δηλ

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log\frac{n+1}{n} = \frac{1}{\xi}, \qquad n < \xi < n+1$$

Επεται οτι

$$\frac{1}{n+1} < \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \qquad \forall n = 1, 2, \ldots,$$

δηλ

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2} < \log\left(1+\frac{1}{1}\right) < 1 \\ \frac{1}{3} < \log\left(1+\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} < \log\left(1+\frac{1}{n-1}\right) < \frac{1}{n-1} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2} < \log 2 - \log(1) < 1 \\ \frac{1}{3} < \log 3 - \log 2 < \frac{1}{2} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} < \log(n) - \log(n-1) < \frac{1}{n-1} \end{array}\right.$$

Προσθετοντας

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} < \log(n) < 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1} < 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$

Επομενως αν $S_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ τα μερικα αθροισματα της $\sum\frac{1}{n}$

τοτε $S_n - 1 < \log(n) < S_n$

$$\Rightarrow 1-\frac{1}{S_n} < \frac{\log(n)}{S_n} < 1 \qquad \Rightarrow \frac{S_n}{\log n} > 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n > \log n \Rightarrow \lim(S_n) = \infty$$

και επεται οτι $\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n)}{S_n} = 1.$

9. Εστω $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ παραγωγισιμη συναρτηση για την οποια ισχυει $f'(x)=\frac{1}{x}$ για καθε $x\in(0,\infty)$ και $f(1)=0$. Δειξετε οτι $f(xy)=f(x)+f(y)$ για καθε $x,y\in(0,\infty)$.

Θεωρουμε την $g(x)=f(xy)$ (y σταθερο, $y\in(0,\infty)$)

Τοτε $g'(x)=f'(xy)\,(xy)'=f'(xy)\,y=\frac{1}{xy}\cdot y=\frac{1}{x}=f'(x)$

Επεται οτι $\left(g(x)-f(x)\right)'=0 \Rightarrow g(x)-f(x)=c$ σταθερα

Για $x=1$ θα εχουμε $g(1)-f(1)=c \Rightarrow g(1)=c$

δηλ $c=g(1)=f(1y)=f(y)$

Δηλ

$g(x)=f(x)+c=f(x)+f(y)$ ($\forall$ y σταθεροποιημενο)

$\Rightarrow f(xy)=f(x)+f(y)$

10. Εστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ συναρτηση. Αν υπαρχουν $0<M<\infty$ και $1<\rho<\infty$ ωστε να ισχυει $|f(x)-f(y)|\le M|x-y|^{\rho}$ για καθε $x,y\in(a,b)$ δειξετε οτι η f ειναι σταθερη.

Εστω $c\in(a,b)$ σταθεροποιημενο, τοτε $\forall\, x\in(a,b)$

$$\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right| \le M\,|x-c|^{p-1}$$

Αφηνουμε $x\to c$ τοτε $|x-c|^{p-1}\longrightarrow 0$ ($p-1>0$ απο υποθεση)

Αρα

$$\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right| \xrightarrow{x\to c} 0 \Rightarrow |f'(c)|=0 \Rightarrow f'(c)=0$$

στο τυχον $c\in(a,b)$. Επεται οτι η f ειναι σταθερη.

11. Δειξετε οτι για καθε $x \geq 0$ ισχυουν οι ανισοτητες:

$$\sin(x) \leq x,\ \sin(x) \geq x - \frac{x^3}{3!},\ \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!},\ \sin(x) \geq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!},\ \text{κ.ο.κ.}$$

$$\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2!},\ \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!},\ \cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!},\ \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!},\ \text{κ.ο.κ.}$$

- Θετουμε $f(x) = x - \sin x$, $x \geq 0$

$f'(x) = 1 - \cos x \geq 0 \Rightarrow f$ μη φθινουσα στο $[0, \infty)$

$\Rightarrow f(x) \geq f(0) = 0$

$\Rightarrow x - \sin x \geq 0 \Rightarrow \sin x \leq x$ για $x \geq 0$

- Θετουμε $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2!}$, $x \geq 0$

$f'(x) = -\sin x + x \geq 0 \Rightarrow f$ μη φθινουσα στο $[0, \infty)$

$\Rightarrow f(x) \geq f(0) = 0$

$\Rightarrow \cos x - 1 + \frac{x^2}{2!} \geq 0 \Rightarrow \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2!}$

- Θετουμε $f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{3!}$, $x \geq 0$

$f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2!} \geq 0 \Rightarrow f$ μη φθινουσα στο $[0, \infty)$

$\Rightarrow f(x) \geq f(0) = 0$

$\Rightarrow \sin x \geq x - \frac{x^3}{3!}$

- Θετουμε $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!}$, $x \geq 0$

$f'(x) = -\sin x + x - \frac{x^3}{3!} \leq 0 \Rightarrow f$ μη αυξουσα

$\Rightarrow f(x) \leq f(0)$

$\Rightarrow \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$

Συνεχιζοντας με τον ιδιο τροπο, επονται οι ανισοτητες.

12. Βρειτε τα ορια: (i) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x+\frac{x^3}{3!}}{x^5}$, (ii) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1+\frac{x^2}{2}}{\sin^4(x)}$, (iii) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{1-\frac{\sin(x)}{x}}\right)$.

Κανόνας L. Hopital,

13. $(*)$ (α) Δειξετε οτι για την $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x>0, \\ 0, & x\le 0, \end{cases}$ η παραγωγος καθε ταξης υπαρχει στο $x_0=0$, και $f^{(n)}(0)=0$ για καθε $n\in\mathbb{N}$.
(β) Βρειτε συναρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ωστε $g(x)=0$ για $x\in(-\infty,0]\cup[1,\infty)$ και $g(x)>0$ για $x\in(0,1)$, η οποια ειναι απειρες φορες παραγωγισιμη σε καθε $x\in\mathbb{R}$. (Υποδ. $g(x)=e^{-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}}$ για $x\in(0,1)$ και $g(x)=0$ για $x\notin(0,1)$).

(α) Στο Μάθημα 32 δείξαμε ότι η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x>0 \\ 0 & x\le 0\end{cases}$

έχει παράγωγο κάθε τάξης σε κάθε $x\in\mathbb{R}$, και ιδιαίτερα

στο 0, $f^{(k)}(0)=0$ για κάθε $k=1,2,3,\dots$.

(β) Έχοντας την συνάρτηση $f(x)$ του (α), θεωρούμε την συνάρτηση

$$h(x)=f(1-x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x}} = e^{\frac{1}{x-1}} & x<1 \\ 0 & x\geq 1\end{cases}$$

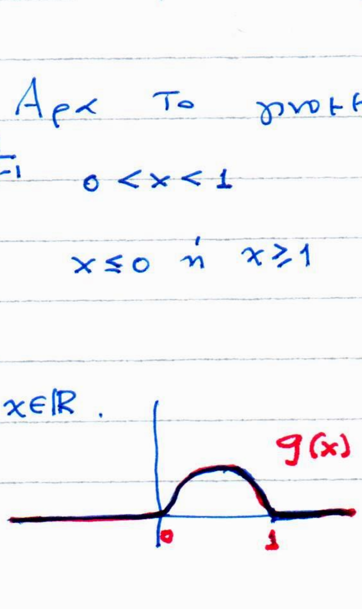
Επειδή η h είναι σύνθεση της $f(x)$ και της $y=1-x$, (και οι

δύο άπειρες φορές παραγωγίσιμες) έπεται ότι η h είναι

άπειρες φορές παραγωγίσιμη σε κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα το γινόμενο

$$g(x)=f(x)\,h(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}e^{\frac{1}{x-1}} & 0<x<1 \\ 0 & x\le 0 \text{ ή } x\geq 1\end{cases}$$

είναι επίσης άπειρες φορές παραγωγίσιμη σε κάθε $x\in\mathbb{R}$.

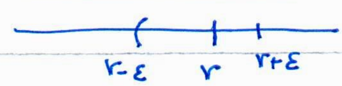


Φυλ 9

1. Το κριτηριο ριζας για σειρες $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ προυποθετει την υπαρξη του οριου $r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Δειξετε το ακολουθο γενικωτερο κριτηριο: Αν
$$r = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$$
τοτε η σειρα συγκλινει αν $r < 1$ και αποκλινει οταν $r > 1$.

Αν $r = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ τοτε

- $\forall \varepsilon > 0$ υπαρχουν απειροι το πληθος οροι της $\sqrt[n]{|a_n|}$ που ειναι μεγαλυτεροι $r-\varepsilon$, και
- $\forall \varepsilon > 0$ υπαρχουν πεπερασμενοι το πληθος οροι της $\sqrt[n]{|a_n|}$ μεγαλυτεροι του $r+\varepsilon$.



Αν $r < 1$ τοτε $\frac{1+r}{2} < 1$, και υπαρχει $N_0 \in \mathbb{N}$ ωστε

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1+r}{2} \quad \text{για } n \geq N_0.$$

Επεται οτι $|a_n| < \left(\frac{1+r}{2}\right)^n$ για $n \geq N_0$. Επειδη $\frac{1+r}{2} < 1$ η γεωμετρικη σειρα $\sum \left(\frac{1+r}{2}\right)^n$ συγκλινει οποτε απο κριτηριο συγκρισης η $\sum_{n=N_0}^{\infty} |a_n|$ και επομενως και η $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ συγκλινει οποτε συγκλινει και η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

Αν $r > 1$ τοτε $\frac{1+r}{2} > 1$ και υπαρχουν απειροι το πληθος $n \in \mathbb{N}$ ωστε $\sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1+r}{2}$ οποτε $|a_n| > \left(\frac{1+r}{2}\right)^n \longrightarrow \infty$, δηλ η $a_n \not\to 0$ οποτε η $\sum a_n$ δεν συγκλινει.

2. Βρειτε το συνολο συγκλισης καθε δυναμοσειρας:

$$(\alpha)\ \sum_{n=0}^{\infty} n(x-1)^n,\ (\beta)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)}(x-1)^n,\ (\gamma)\ \sum_{n=0}^{\infty} n^2(x-2)^n,\ (\delta)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(x+1)^n,$$

$$(\epsilon)\ \sum_{n=0}^{\infty} 2^n(x-1)^n,\ (\zeta)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n)}{n}x^n,\ (\eta)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}x^n,\ (\theta)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}(x+1)^n,\ (\iota)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}(x-2)^n.$$

(α) $a_n = n$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} \longrightarrow 1$, δηλ $R=1$, η σειρα συγκλινει

για καθε x με $|x-1|<1$ δηλ $0<x<2$.

Για $x=0$, $\sum n(0-1)^n = \sum (-1)^n n$ δεν συγκλινει, $(-1)^n n \not\to 0$

$x=2$, $\sum n(2-1)^n = \sum n$ " " , $n \not\to 0$

Συνολο συγκλισης $A=(0,2)$

(β) $a_n = \frac{1}{n+1}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \longrightarrow 1$, δηλ $R=1$, και η σειρα

συγκλινει για καθε x μ $0<x<2$

Για $x=0$, $\sum \frac{1}{n+1}(0-1)^n = \sum (-1)^n \frac{1}{n+1}$ συγκλινει

$x=2$ $\sum \frac{1}{n+1}(2-1)^n = \sum \frac{1}{n+1}$ αποκλινει

Συνολο συγκλισης $A=[0,2)$

(γ) $a_n = n^2$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \longrightarrow 1$, $R=1$, και η σειρα

συγκλινει για $x \in (1,3)$

Για $x=3$, $\sum n^2(3-2)^n = \sum n^2$ δεν συγκλινει

$x=1$, $\sum n^2(1-2)^n = \sum (-1)^n n^2$ δεν συγκλινει

Συνολο συγκλισης $A=(1,3)$

(δ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(x+1)^n$

$a_n = \frac{1}{n^2}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \longrightarrow 1$, η σειρά συγκλίνει

για $|x+1| < 1$ δηλ. για $-2 < x < 0$

Για $x = 0$, $\sum \frac{1}{n^2}(0+1)^n = \sum \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει

$x = -2$, $\sum \frac{1}{n^2}(-2+1)^n = \sum (-1)^n \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει.

Σύνολο σύγκλισης $A = [-2, 0]$

(ε) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n (x-1)^n$

$a_n = 2^n$, $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{2^n} = 2$, η σειρά

συγκλίνει για $|x-1| <$ δηλ $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$

Για $x = \frac{3}{2}$ $\sum 2^n\left(\frac{3}{2}-1\right)^n = \sum 2^n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum 1$ δεν συγκλίνει

$x = \frac{1}{2}$ $\sum 2^n\left(\frac{1}{2}-1\right)^n = \sum 2^n\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum (-1)^n$ δεν συγκλίνει

Σύνολο σύγκλισης $A = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

(ζ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n} x^n$, $a_n = \frac{\log n}{n}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\log(n+1)}{\log(n)} \frac{n}{n+1} \longrightarrow 1$,

η σειρά συγκλίνει για $-1 < x < 1$

Για $x = 1$, $\sum \frac{\log n}{n}$ δεν συγκλίνει $\left(\frac{\log n}{n} > \frac{1}{n} \right)$

$x = -1$ $\sum (-1)^n \frac{\log n}{n}$ συγκλίνει (Θ. Leibniz)

Σύνολο σύγκλισης $A = [-1, 1)$

(η) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$ $\quad a_n = \frac{2^n}{n!}$, $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!\, 2^{n+1}}{(n+1)!\, 2^n} = \frac{1}{n+1} \cdot 2 \longrightarrow 0$,

ακτίνα σύγκλισης $R = \frac{1}{0} = \infty$, η σειρά συγκλίνει $\forall x \in \mathbb{R}$.

(θ) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} (x+1)^n$.

$a_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}$, $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \longrightarrow \frac{1}{2}$, ακτίνα σύγκλισης $R = 2$,

η σειρά συγκλίνει για $|x+1| < 2$ δηλ. $-3 < x < 1$

Για $x = 1$, $\quad \sum \frac{\sqrt{n}}{2^n} (1+1)^n = \sum \sqrt{n}$ αποκλίνει

$x = -3$ $\quad \sum \frac{\sqrt{n}}{2^n} (-3+1)^n = \sum (-1)^n \sqrt{n}$ αποκλίνει

Σύνολο σύγκλισης $A = (-3, 1)$

(ι) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} (x-2)^n$ $\quad a_n = \frac{2^n}{n}$, $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)\, 2}{n} \longrightarrow 2$,

Ακτίνα σύγκλισης $R = \frac{1}{2}$, συγκλίνει για $|x-2| < \frac{1}{2}$

δηλ. $\frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}$

Για $x = \frac{5}{2}$ $\quad \sum \frac{2^n}{n} \left(\frac{5}{2} - 2\right)^n = \sum \frac{2^n}{n} \frac{1}{2^n} = \sum \frac{1}{n}$ αποκλίνει

$x = \frac{3}{2}$ $\quad \sum \frac{2^n}{n} \left(\frac{3}{2} - 2\right) = \sum \frac{2^n}{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum (-1)^n \frac{1}{n}$ συγκλίνει.

Σύνολο σύγκλισης $A = \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

3. Βρειτε την ακτινα συγκλισης καθε δυναμοσειρας

$(a)\ 1+3x+\frac{x^2}{2^2}+3^3x^3+\frac{x^4}{2^4}+3^5x^5+\frac{x^6}{2^6}+\cdots,\quad (b)\ \sum_{n=0}^{\infty}(3+\cos(n))x^n,\quad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty}(n!+\frac{1}{n!})x^n,$

(α) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & n \text{ αρτιος} \\ 3^n & n \text{ περιττος} \end{cases}$

$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \frac{1}{2} & n \text{ αρτιος} \\ 3 & n \text{ περιττος} \end{cases}$, $\lim\sup \sqrt[n]{|a_n|} = 3$, $R = \frac{1}{3}$

(b) $a_n = 3+\cos(n)$ $\quad 2 \leq a_n \leq 4 \quad \sqrt[n]{2} \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{4}$

$\sqrt[n]{2} \to 1$, $\sqrt[n]{4} \to 1$

$\Rightarrow \lim \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, $R = \frac{1}{1} = 1$

(c) $a_n = n! + \frac{1}{n!}$ $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)! + \frac{1}{(n+1)!}}{n! + \frac{1}{n!}} = \frac{\left(((n+1)!)^2+1\right)n!}{\left((n!)^2+1\right)(n+1)!} =$

$= \frac{1}{n+1}\frac{((n+1)!)^2+1}{(n!)^2+1} = n+1\ \frac{((n+1)!)^2+1}{((n+1)!)^2+(n+1)^2}$

$= n+1 \cdot \frac{1+\frac{1}{((n+1)!)^2}}{1+\frac{(n+1)^2}{((n+1)!)^2}}$

Το κλασμα εχει οριο $\frac{1+0}{1+0} = 1$, και

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq (n+1)\frac{1}{2}$ για $n \geq N_0$ $\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \infty$,

αρα ακτινα συγκλισης $R = \frac{1}{\infty} = 0$

4. Βρειτε την ακτινα συγκλισης της δυναμοσειρας $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ σε καθε μια απο τις παρακατω περιπτωσεις

(1) $a_n = 2+\sin(n^2)$, (2) $2 \le a_n \le 3$, (3) $n \le a_n \le n^2$, (4) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2}, & n \text{ αρτιος} \\ \frac{1}{2^n}, & n \text{ περιττος,} \end{cases}$

(5) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2}, & n = 3k, \\ \frac{1}{3^n}, & n = 3k+1 \\ 2^n, & n = 3k+2 \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$.

(1) $a_n = 2+\sin(n^2) \Rightarrow 1 \le a_n \le 3 \Rightarrow \underset{\downarrow 1}{1} \le \sqrt[n]{|a_n|} \le \underset{\downarrow 1}{\sqrt[n]{3}}$

$\Rightarrow \lim \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ και $R = \frac{1}{1} = 1$

(2) $2 \le a_n \le 3 \Rightarrow \underset{\downarrow 1}{\sqrt[n]{2}} \le \sqrt[n]{|a_n|} \le \underset{\downarrow 1}{\sqrt[n]{3}}$

$\Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} \longrightarrow 1 \Rightarrow R = \frac{1}{1} = 1.$

(3) $n \le a_n \le n^2 \Rightarrow \sqrt[n]{n} \le \sqrt[n]{|a_n|} \le \sqrt[n]{n^2}$

$\underset{\downarrow 1}{\sqrt[n]{n}} \le \sqrt[n]{|a_n|} \le \underset{\downarrow 1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}$

$\Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{1} = 1$

(4) $\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \longrightarrow 1 \\ \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2} \end{cases}$ $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 1$

$R = \frac{1}{1} = 1$

(5) $\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} & n=3k \\ \frac{1}{3} & n=3k+1 \\ 2 & n=3k+2 \end{cases}$ $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 2$, $R = \frac{1}{2}$

5. Βρειτε ολα τα x για τα οποια καθε μια απο τις σειρες συγκλινει (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$, (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n$.

(α) Θετουμε $y = \frac{1}{x}$, $\sum_{n=1}^{\infty} n y^n$ συγκλινει για $-1<y<1$

Η αρχικη συγκλινει για $-1 < \frac{1}{x}$ και $\frac{1}{x} < 1$

δηλ $x < -1$ και $x > 1$,

$x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$

(β) Θετουμε $y = \frac{x+1}{x-1}$, $\sum y^n$ συγκλινει για $|y|<1$

Η αρχικη συγκλινει για εκεινα τα x ωστε $y = \frac{x+1}{x-1}$ με $-1<y<1$

Δηλ $y(x-1) = x+1$, $yx - y = x+1$, $x = \frac{y+1}{y-1}$ με $-1<y<1$

δηλ για $x<0$.

6. Βρειτε τα πολυωνυμα Taylor $P_{5,a}(x)$ της συναρτησης $f(x) = \frac{1}{1+x}$ στα σημεια (α) $a=0$, (β) $a=1$.

(α)

$f(x) = (1+x)^{-1}$	$f(0) = 1$	$f(1) = \frac{1}{2}$
$f'(x) = -1(1+x)^{-2}$	$f'(0) = -1$	$f'(1) = -\frac{1}{2^2}$
$f''(x) = 2(1+x)^{-3}$	$f''(0) = 2$	$f''(1) = \frac{2}{2^3}$
$f'''(x) = -3!(1+x)^{-4}$	$f'''(0) = -3!$	$f'''(1) = \frac{-3!}{2^4}$
$f^{(4)}(x) = 4!(1+x)^{-5}$	$f^{(4)}(0) = 4!$	$f^{(4)}(1) = \frac{4!}{2^5}$
$f^{(5)}(x) = -5!(1+x)^{-6}$	$f^{(5)}(0) = -5!$	$f^{(5)}(1) = \frac{-5!}{2^6}$

$P_{5,0}(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5$

$$P_{5,1}(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4 + \frac{f^{(5)}(1)}{5!}(x-1)^5$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}(x-1) + \frac{1}{2^3}(x-1)^2 - \frac{1}{2^4}(x-1)^3 + \frac{1}{2^5}(x-1)^4 - \frac{1}{2^6}(x-1)^5$$

7. Γραψετε το πολυωνυμο $P(x) = 1 + 2x - x^2 + 5x^3 - x^4$ σε δυναμεις του $(x-1)$.

$P(1) = 6$

$P'(x) = 2 - 2x + 15x^2 - 4x^3$, $P'(1) = 11$

$P''(x) = -2 + 30x - 12x^2$ $\quad P''(1) = 16$

$P'''(x) = 30 - 24x$ $\quad P'''(1) = 6$

$P^{(4)}(x) = -24$ $\quad P^{(4)}(1) = -24$

$$P(x) = P(1) + \frac{P'(1)}{1}(x-1) + \frac{P''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{P'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{P^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4$$

$$= 6 + 11(x-1) + 8(x-1)^2 + (x-1)^3 - (x-1)^4$$

<u>Παρατηρηση</u> Με αναλογο τροπο, δοθεντος ενος πολυωνυμου

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

και ενος αριθμου $\alpha \in \mathbb{R}$, μπορουμε να γραψουμε το $P(x)$ σε δυναμεις του $x - \alpha$,

$$P(x) = b_0 + b_1(x-\alpha) + b_2(x-\alpha)^2 + \cdots + b_n(x-\alpha)^n$$

Μαθημα 37

8. Βρειτε το πολυωνυμο Taylor βαθμου 8 στο $a = 0$ για την συναρτηση $f(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6$

Εφαρμοζοντας τον τροπο υπολογισμου πολυωνυμων Taylor βρισκουμε $P_{8,0}(x) = \frac{1}{8!}x^8$

Σκοπος της ασκησης ειναι να διαπιστωσουμε οτι, αν f αρκουντως διαφορισιμη και εχει πολυωνυμα Taylor

$$P_{0,a}(x), P_{1,a}(x), \dots, P_{n,a}(x)$$

στο σημειο a τοτε για $m < k < n$, το πολυωνυμο Taylor βαθμου k της $g(x) = f(x) - P_{m,a}(x)$ στο σημειο a ειναι

$$Q_{k,a}(x) = P_{k,a}(x) - P_{m,a}(x)$$

Αυτο ειναι συνεπεια του: Αν f_1, f_2 δυο συναρτησεις με πολυωνυμα Taylor $P_{k,a}$, $Q_{k,a}$ τοτε τα πολυωνυμα Taylor της $f_1 + f_2$ στο a ειναι $R_{k,a}(x) = P_{k,a}(x) + Q_{k,a}(x)$.

9. Για τις παρακατω συναρτησεις βρειτε τα αντιστοιχα πολυωνυμα Taylor

- $f(x) = e^{x^2}$, $P_{3,0}(x)$.
- $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $P_{4,1}(x)$.
- $h(x) = \sqrt{3+\cos(x)}$, $P_{2,0}(x)$.
- $k(x) = \sin(x)$, $P_{6,\frac{\pi}{6}}(x)$.
- $\phi(x) = e^x - (1 + x + \dfrac{x^2}{2})$, $P_{5,0}(x)$.
- $s(x) = \sqrt[3]{1+x}$, $P_{3,0}(x)$.

• $f(x) = e^{x^2}$, $f'(x) = e^{x^2} 2x$, $f''(x) = (2+4x^2)e^{x^2}$, $f'''(x) = (12x + 8x^3)e^{x^2}$

$f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 2$, $f'''(0) = 0$

$P_{3,0}(x) = 1 + 0\cdot x + \dfrac{2 \cdot x^2}{2!} + \dfrac{0 \cdot x^3}{3!} = 1 + x^2$

• $h(x) = (3+\cos(x))^{1/2}$; $h'(x) = -\frac{1}{2}(3+\cos(x))^{-\frac{1}{2}} \sin x$, $h''(x) = -\dfrac{\sin^2 x}{4(3+\cos x)^{3/2}} - \dfrac{\cos x}{2(3+\cos x)^{1/2}}$.

$h(0) = \sqrt[2]{4} = 2$, $h'(0) = 0$, $h''(0) = -\dfrac{1}{4}$

$P_{2,0}(x) = 2 + \dfrac{(-1/4)}{2!} x^2 = 2 - \dfrac{1}{8} x^2$

• $s(x) = (1+x)^{1/3}$, $s'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-2/3}$, $s''(x) = -\frac{2}{9}(1+x)^{-\frac{5}{3}}$, $s'''(x) = \frac{10}{27}(1+x)^{-\frac{8}{3}}$

$s(0) = 1$, $s'(0) = \frac{1}{3}$ $s''(0) = -\frac{2}{9}$, $s'''(0) = \frac{10}{27}$

$P_{3,0}(x) = 1 + \dfrac{1/3}{1!} x + \dfrac{(-2/9)}{2!} x^2 + \dfrac{10/27}{3!} x^3 = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3$

10. Βρειτε το αναπτυγμα σε δυναμοσειρα καθε μιας απο τις παρακατω συναρτησεις στο αντιστοιχο σημειο

$$f(x) = e^x, \qquad x_0 = 1.$$
$$g(x) = \frac{1}{x}, \qquad x_0 = 1.$$
$$h(x) = \log(1+x), \qquad x_0 = 0.$$
$$\phi(x) = \cos x, \qquad x_0 = \pi.$$

- $$f(x) = e^x = e^{x-1+1} = e\, e^{x-1} = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!}(x-1)^n, \qquad x \in \mathbb{R}$$

- $$g(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{1+x-1} = \frac{1}{1-(-(x-1))} = \sum_{n=0}^{\infty} (-(x-1))^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n, \quad |x-1| < 1, \text{ δηλ. } 0 < x < 2$$

- $h(x) = \log(1+x)$, $h'(x) = \frac{1}{1+x}$, $h''(x) = -(1+x)^{-2}$, $h'''(x) = 2(1+x)^{-3}$, $h^{(4)}(x) = -3!(1+x)^{-4}$

$\ldots \; h^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,(1+x)^{-n} \ldots$

$h(0) = 0$, $h'(0) = 1$, $h''(0) = -1$, $h'''(0) = 2 \ldots$ $h^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)! \ldots$

$$0 + \frac{1}{1!}x + \frac{(-1)}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}x^n + \cdots$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$$ Η σειρα συγκλινει για $-1 < x \leq 1$, αποδειξη οπως στο αντιστοιχο παραδειγμα σε προηγουμενο μαθημα.

- $\varphi(x) = \cos x \qquad x_0 = \pi$

1ος Τροπος: Υπολογιζουμε $\frac{\varphi^{(n)}(\pi)}{n!}$, σειρα $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(\pi)}{n!}(x-\pi)^n$, και δειχνουμε οτι η σειρα συγκλινει $\forall x \in \mathbb{R}$.

$2^{\text{ος}}$ Τρόπος

Ξέρουμε ότι $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

και η σειρά συγκλίνει $\forall\, x \in \mathbb{R}$

Έπεται ότι

$$\cos(x-\pi) = 1 - \frac{(x-\pi)^2}{2!} + \frac{(x-\pi)^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-\pi)^{2n}}{(2n)!}$$

Επίσης

$$\cos(x-\pi) = \cos x \cos\pi - \sin x \sin\pi = -\cos x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

δηλ.

$$\cos x = -\cos(x-\pi) = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-\pi)^{2n}}{(2n)!}$$

άρα

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-\pi)^{2n}}{(2n)!}$$

Το ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά της $\cos x$ στο $x_0 = \pi$.

11. Βρειτε το μεγιστο σφαλμα κατα την προσεγγιση της $f(x) = \cos(x)$ απο το πολυωνυμο $P_{4,0}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ στο διαστημα $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Απο Θεωρημα (Μορφη Lagrange του υπολοιπου)

$$f(x) = P_{4,0}(x) + \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}(x-0)^5$$ ξ αναμεσα στα 0, και x.

Αρα

$$|f(x) - P_{4,0}(x)| = \left|\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}(x-0)^5\right| = \frac{|f^{(5)}(\xi)|}{5!}|x|^5$$

$$\leq \frac{|x|^5}{5!}$$ (γιατι, $f^{(5)}(\xi) = \pm\cos\xi$ ή $\pm\sin\xi$, $\Rightarrow |f^{(5)}(\xi)| \leq 1$)

$$\leq \frac{(1/2)^5}{5!} = \frac{1}{2^5 \cdot 5!} = \frac{1}{32 \cdot 120} \doteq \frac{1}{3840}$$

σφαλμα προσεγγισης

12. Βρειτε το μεγιστο σφαλμα κατα την προσεγγιση του $\sqrt{e}$ απο την τιμη $P_{4,0}(1/2)$ οπου $P_{4,0}(x)$ ειναι το πολυωνυμο Taylor της $f(x) = e^x$ ταξης 4 στο 0.

$\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} \approx P_{4,0}(1/2)$. Μεγιστο σφαλμα = ?

$$e^x = P_{4,0}(x) + \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^5 \qquad 0 < \xi < \frac{1}{2}$$

$$|e^x - P_{4,0}(x)| \leq \frac{|f^{(5)}(\xi)|}{5!}x^5 = \frac{e^\xi}{5!}x^5 \leq \frac{e}{5!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{e}{2^5 \cdot 5!} = \frac{e}{3840}$$

$$\leq \frac{3}{3840}, \quad \forall x \in [0, 1/2)$$

$$\Rightarrow |\sqrt{e} - P_{4,0}(1/2)| \leq \frac{3}{3840}$$

13. Βρειτε το μικροτερου βαθμου πολυωνυμο Taylor $P_{n,0}(x)$ της $f(x) = e^x$, τετοιο ωστε να ισχυει $|e^x - P_{n,0}(x)| \leq \frac{1}{10^4}$ για καθε $x \in [-1, 1]$.

Θελουμε $\left| f(x) - P_{n,0}(x) \right| \leq \frac{1}{10^4}$, δηλ.

$\left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-0)^{n+1} \right| \leq \frac{1}{10^4}$ $\xi \in (-1, 1)$, $x \in [-1, 1]$. Ομως

$\left| f^{(n+1)}(\xi) \right| = \left| e^{\xi} \right| \leq e^1 = e \leq 3$, οποτε θελουμε το μικροτερο n

ωστε $\frac{3}{(n+1)!} 1^{n+1} \leq \frac{1}{10^4} \Leftrightarrow (n+1)! \geq 3 \cdot 10^4$.

Εξεταζουμε τις τιμες $k!$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ και

βρισκουμε το μικροτερο n για το οποιο $(n+1)! \geq 3 \cdot 10^4$.

14. Βρειτε το μικροτερου βαθμου πολυωνυμο Taylor στο $x_0 = 0$ που προσεγγιζει την συναρτηση $f(x) = x + \sin(x)$ με προσεγγιση καλυτερη απο $\frac{1}{10^3}$ σε ολο το διαστημα $[-1, 1]$

$\left| f(x) - P_{n,0}(x) \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-0)^{n+1} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{1}{(n+1)!}$

$\left(f'(x) = 1 + \cos x, \; f''(x) = -\sin x, \; f'''(x) = -\cos x \; \ldots \right.$
$\left. \Rightarrow \left| f^{(n+1)}(\xi) \right| \leq 1 \text{ για } n > 1 \right)$

Θελουμε το μικροτερο n ωστε

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{10^3},$$

το οποιο βρισκουμε εξεταζοντας τις τιμες $\frac{1}{2!}, \frac{1}{3!} \cdots$.