

# Ανάλυση Fourier

Πρώτη πρόοδος, 24-11-2005

1. Αν  $f$  είναι  $2\pi$ -περιοδική και ολοκληρώσιμη και

$$g(x) = \begin{cases} x + 1, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 2 + |x|, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

(επεκταμένη περιοδικά), τι μπορούμε να πούμε για τη σύγκλιση της σειράς Fourier, στο σημείο  $x = 0$ , της συνάρτησης  $h(x) = f(x) + g(x)$  αν γνωρίζουμε ότι:

(α)  $S_n(f)(0) \rightarrow 1$  καθώς  $n \rightarrow \infty$

(β) η σειρά Fourier της  $f$  στο  $x = 0$  δεν συγκλίνει

2. (α) Δείξτε λεπτομερώς ότι  $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ .

(β) Εξετάστε αν υπάρχει  $2\pi$ -περιοδική συνάρτηση  $f$  η οποία είναι 2 φορές παραγωγίσιμη με συνεχή δεύτερη παραγώγο της οποίας η σειρά Fourier είναι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k^3} \cos(kx) + \frac{1}{\sqrt{k^3 \log(k+1)}} \sin(kx) \right)$$

3. (α) Εξετάστε ως προς την σύγκλιση σε κάθε σημείο, τη σειρά Fourier της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 1 \leq |x| \leq \pi, \\ \sqrt[3]{x}, & 0 < x < 1 \\ 2\sqrt{|x|}, & -1 < x < 0 \end{cases}$$

(β) Διατυπώστε το Θεώρημα Riemann-Lebesgue, και το Θεώρημα Dirichlet.

4. (α) Υπολογίστε την σειρά Fourier της συνάρτησης  $f(x) = |x|$ ,  $-\pi \leq x < \pi$ , (επεκταμένη περιοδικά).

(β) Αν  $g$  είναι μια συνεχής συνάρτηση της οποίας η σειρά Fourier ταυτίζεται με αυτήν της  $f$  του (α), τι συμπαιρένομε για την  $g$ ;

5. (προαιρετικό) Αν  $f, g$  δυο συνεχείς  $2\pi$  περιοδικές συναρτήσεις ορίζομε την συνέλιξη  $h$  των  $f$  και  $g$

$$h(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t) dt$$

Δείξτε ότι  $\widehat{h(n)} = \widehat{f(n)} \cdot \widehat{g(n)}$  όπου οι συντελεστες  $\widehat{f(n)}$  ορίζονται

$$\widehat{f(n)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int} dt.$$

Απαντήστε σε 3 απο τα 4 πρώτα θέματα. Κάθε θέμα είναι 3,3333... μονάδες