Στοιχεία Συναρτησιακής Ανάλυσης.

Πρώτη πρόοδος, 30-03-2005

1. Εστω $(X, \|\ \|)$ χωρος με νορμα. Δειξετε οτι:
(α) Αν η $\{x_n\}$ ειναι ακολουθία Cauchy στον X τοτε η ακολουθία $\{\lambda_n\}$, $\lambda_n = \|x_n\|$, συγκλίνει και ότι η $\{z_n\}$, $z_n = \lambda_n x_n$, ειναι ακολουθία Cauchy στον X.
(β) Αν Y είναι γραμμικός υπόχωρος του X τοτε και η κλειστή θήκη $\overline{Y}$ είναι επίσης γραμμικός υπόχωρος του X.

2. (α) Διατυπώσετε την ανισότητα Minkowski για άπειρα αθροίσματα.
(β) Εστω $p \in [1, \infty)$ και A_p το σύνολο των ακολουθιών που ορίζεται

$$x = (x_1, x_2, \cdots) \in A_p \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}|x_k|^p < \infty.$$

Δείξετε οτι ο A_p είναι γραμμικός χώρος και η $p(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ ειναι νόρμα στον A_p.

3. (α) Διατυπώσετε το Θεώρημα Baire για πλήρεις μετρικούς χώρους.
(β) Δείξετε οτι στον χώρο c_{00} των τελικά μηδενικων ακολουθιών οι νόρμες

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|, \qquad \|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

δεν είναι ισοδύναμες.

4. Εστω $C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f$ συνεχής$\}$ και $\phi \in C[0,1]$ μέ $\phi(t) \neq 0$ για κάθε $t \in [0,1]$. Δείξετε ότι:
(α) Η $\|f\|_\phi = \sup_{t\in[0,1]} |\phi(t)f(t)|$ ειναι νόρμα στον $C[0,1]$.
(β) Ο $(C[0,1], \|f\|_\phi)$ είναι χώρος Banach.
(γ) Εξετάσετε αν η $\|f\|_\phi$ είναι νόρμα όταν: (1) η ϕ μηδενίζεται σε ενα ακριβώς σημείο $a \in (0,1)$. (2) η ϕ μηδενίζεται σε ολόκληρο διάστημα $[a,b] \subset [0,1]$.

5. (προαιρετικό, για επιπρόσθετες μονάδες) (α) Δείξετε οτι ο χώρος l_p, $1 \le p < \infty$, ειναι διαχωρίσιμος.
(β) Δείξετε οτι ο χώρος $B[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f$ φραγμένη συνάρτηση$\}$ με νόρμα $\|f\| = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$ δεν είναι διαχωρίσιμος.

Απαντήσετε σε 3 απο τα 4 πρώτα θέματα. Κάθε θέμα είναι 3,3333... μοναδες