Στοιχεία Συναρτησιακής Ανάλυσης.

Πρώτη πρόοδος, 30-03-2005, Λυσεις

1. (α) $|\lambda_n - \lambda_m| = |\|x_n\| - \|x_m\|| \leq \|x_n - x_m\|$. Συνεπώς η $\{\lambda_n\}$ είναι ακολουθία Cauchy στο $\mathbb{R}$ επομενως συγκλινει.
Για την $\{z_n\}$: Η $\{x_n\}$ ειναι Cauchy αρα φραγμενη δηλ. υπαρχει $M < \infty$ ωστε $\|x_n\| \leq M$ για καθε n. Τοτε

$$\begin{aligned}\|z_n - z_m\| =& \|\lambda_n x_n - \lambda_m x_m\| = \|\lambda_n x_n - \lambda_n x_m + \lambda_n x_m - \lambda_m x_m\| \\ \leq& \lambda_n \|x_n - x_m\| + |\lambda_n - \lambda_m| \|x_m\| \leq \lambda_n \|x_n - x_m\| + \lambda_m \|x_n - x_m\| \\ =& (\lambda_n + \lambda_m) \|x_n - x_m\| \leq 2M \|x_n - x_m\|.\end{aligned}$$

Αρα η $\{z_n\}$ ειναι Cauchy.
(β) Αν $x, y \in \overline{Y}$ και $\lambda \in \mathbb{F}$ θελομε να δειξομε $x + y \in \overline{Y}$ και $\lambda x \in \overline{Y}$. Αφου $x, y \in \overline{Y}$ υπάρχουν $\{x_n\}$ και $\{y_n\}$ ακολουθίες στο Y με $x_n \to x$, $y_n \to y$. Τοτε $x_n + y_n \in Y$ (γιατι Y γραμμικος υποχωρος) και $x_n + y_n \to x + y$. Αρα $x + y \in \overline{Y}$.
Επισης $\lambda x_n \to \lambda x$ και $\lambda x_n \in Y$ αρα $\lambda x \in \overline{Y}$.

2. (β) Αν $\{a_n\}, \{b_n\} \in A_p$ τοτε

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{|a_k + b_k|}{k^{1/p}}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{a_k}{k^{1/p}} + \frac{b_k}{k^{1/p}}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\overset{(Minkowski)}{\leq} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Αρα $\{a_n + b_n\} \in A_p$. Επισης για $\lambda \in \mathbb{F}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} |\lambda a_k|^p = |\lambda|^p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} |a_k|^p < \infty$, δηλ. $\{\lambda a_n\} \in A_p$.
Ο ιδιος παραπανω υπολογισμος δινει την τριγωνικη ανισοτητα για την νορμα $p(x)$ (οι αλλες ιδιοτητες νορμας ειναι αμεσες).

3. (β) Για τα στοιχεια $x_n = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots \frac{1}{n}, 0, 0, \cdots) \in c_{00}$ εχομε

$$\|x_n\|_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{και} \quad \|x_n\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Αν υπηρχε σταθερα C ωστε $\|x\|_1 \leq C \|x\|_2$ για καθε $x \in c_{00}$ θα ειχαμε

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq C \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}} \leq C \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}} = C \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

δηλ.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq C \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

άτοπο, γιατι η αρμονική σειρα δεν συγκλινει.

4. (α) Οι ιδιοτητες της νορμας επαληθευονται αμεσα αφου η $|\phi(t)|$ δεν μηδενιζεται πουθενα.
(β) Η $|\phi(t)|$ ειναι συνεχης και δεν μηδενιζεται αρα υπαρχουν $0 < m, M < \infty$ με

$$m \leq |\phi(t)| \leq M \quad \text{για καθε} \quad t \in [0, 1].$$

Τοτε για τις νορμες $\|f\|_\phi$ και $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$ θα ισχυει

$$m \|f\|_\infty \leq \|f\|_\phi \leq M \|f\|_\infty \quad \text{για καθε} \quad f \in C[0, 1],$$

δηλ. οι $\|f\|_\infty$ και $\|f\|_\phi$ ειναι ισοδυναμες νορμες. Αφου ο $(C[0, 1], \|f\|_\infty)$ ειναι χώρος Banach, ο $C[0, 1]$ με την νορμα $\|f\|_\phi$ θα ειναι επισης Banach.

(γ) (1) Αν η ϕ μηδενιζεται ακριβως στο a τοτε $\|f\|_\phi = 0$ σημαινει $\sup_{t\in[0,1]} |\phi(t)f(t)| = 0$, δηλ. $\phi(t)f(t) = 0$ για καθε $t \in [0,1]$. Επειδη $\phi(t) \neq 0$ για $t \in [0,1] \setminus \{a\}$ θα πρέπει $f(t) = 0$ για $t \in [0,1] \setminus \{a\}$. Αλλα η f συνεχης αρα $f(a) = 0$ δηλ. $f \equiv 0$, και η $\|f\|_\phi$ ειναι νορμα.
(2) Αν η ϕ μηδενιζεται στο $[a, b]$ τοτε η $\|f\|_\phi$ δεν ειναι νορμα. Πραγματι, υπαρχει συνεχης συναρτηση f με $f(t) = 0$ για $x \in [0,1] \setminus (a,b)$ και $f(t) \neq 0$ για $x \in (a,b)$. Μια τετοια f ειναι

$$f(x) = \begin{cases} x - a & \text{αν} \quad x \in [a, \frac{a+b}{2}) \\ -x + b & \text{αν} \quad x \in [\frac{a+b}{2}, b] \\ 0 & \text{αν} \quad x \in [0,1] \setminus (a,b). \end{cases}$$

Τοτε $\|f\|_\phi = 0$ ενω η f δεν ειναι ταυτοτικα μηδεν.

5. (α) Εστω $x = (x_1, x_2, \cdots) \in l_p$ και $\varepsilon > 0$. Τοτε $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$ και υπαρχει N ωστε $\sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}$. Υπαρχουν ρητοί r_i ωστε $|x_i - r_i| < \frac{\varepsilon}{(2N)^{1/p}}$ για $i = 1, 2, \cdots N$. Θετομε $r = (r_1, r_2, \cdots r_N, 0, 0, \cdots)$ και θα εχομε

$$\|x - r\| = \left(\sum_{k=1}^{N} |x_k - r_k|^p + \sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(N(\frac{\varepsilon^p}{2N}) + \frac{\varepsilon^p}{2} \right)^{\frac{1}{p}} = \varepsilon$$

δηλ. $r \in D(x, \varepsilon)$. Αρα το συνολο

$$Q = \{(q_1, q_2, \cdots, q_n, 0, 0, \cdots) : q_i \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}\}$$

ειναι πυκνό στον l_p. Το συνολο αυτο ειναι αριθμησιμο,

$$Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n, \qquad Q_n \sim \overbrace{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q}}^{n \text{ φορες}},$$

ως αριθμησιμη ενωση αριθμησιμων συνολων.
(β) Για $s \in (0,1)$ θεωρουμε την συναρτηση

$$f_s(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad 0 \leq x < s \\ 1 & \text{αν} \quad s \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Για καθε $s \in (0,1)$, $f_s \in B[0,1]$ και αν $r, s \in (0,1)$ με $r \neq s$ εχομε

$$\|f_r - f_s\| = 1.$$

Συνεπως οι μπαλες $\{D(f_s, \frac{1}{3}) : s \in (0,1)\}$ ειναι ξενες μεταξυ τους και ειναι υπεραριμθησιμες το πληθος (οσα τα στοιχεια του $(0,1)$). Αν A ειναι τυχον πυκνο υποσυνολο του $B[0,1]$ τοτε το A θα εχει τουλαχιστον ενα στοιχειο σε καθε μια απο τις $D(f_s, \frac{1}{3})$ και αφου οι μπαλες ειναι ξενες μεταξυ τους το A θα πρεπει να εχει τουλαχιστον τοσα στοιχεια οσες και οι μπαλες. Αρα το A δεν μπορει να ειναι αριθμησιμο, επομενως ο $B[0,1]$ δεν ειναι διαχωρισιμος.