

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ  
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΜΗΧΑΝΩΝ

---

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

---

**Μη Γραμμικός Προβλεπτικός Έλεγχος  
Συστήματος *n* Καθοδηγούμενων  
Εκκρεμών**

---

Επιβλέπων :  
ΟΡΓΑΝΤΖΙΔΗΣ ΧΑΡΗΣ  
ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΣΕΦΕΡΛΗΣ  
Av. Καθ. Α.Π.Θ

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ , ΙΟΥΛΙΟΣ 2015

# Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει ως αντικείμενο το βέλτιστο έλεγχο ενός μη-γραμμικού συστήματος μεγάλης κλίμακας. Στόχος είναι η διερεύνηση αποτελεσματικών αριθμητικών τεχνικών για την επίλυση σε πραγματικό χρόνο μεγάλης κλίμακας συστημάτων μη-γραμμικού προβλεπτικού ελέγχου. Αρχικά σχεδιάζεται ο μη-γραμμικός προβλεπτικός ελεγκτής (NMPC), με βάση το μαθηματικό μοντέλο του συστήματος. Εξετάζεται, στη συνέχεια ο υπολογιστικός χρόνος που χρειάζεται ο προβλεπτικός ελεγκτής σε κάθε περίοδο δειγματοληψίας, ώστε να υπολογίσει τη σειρά των μελλοντικών δράσεων ελέγχου που θα ελαχιστοποιεί μία αντικειμενική συνάρτηση, μέσω προσομοιώσεων σε σύστημα κλειστού θρόχου.

Ως πρόβλημα υπό εξέταση επιλέγεται ο έλεγχος ενός συστήματος  $n$  εκκρεμών, καθοδηγούμενων από ένα αμάξωμα. Οι εξισώσεις κίνησης του συστήματος διατυπώνονται ως συνάρτηση του αριθμού  $n$  των εκκρεμών,  $n$ . Η γενίκευση αυτή έχει ως στόχο την ελεγχόμενη παραγωγή μοντέλων ισχυρά μη-γραμμικών μηχανικών συστημάτων μεγάλης κλίμακας. Οι διαφορικές εξισώσεις δυναμικής του μοντέλου μεταβλητών κατάστασης μετατρέπονται σε αλγεβρικές εξισώσεις με την εφαρμογή της μεθόδου ορθογώνιας ταξιθεσίας σε πεπερασμένα στοιχεία (OCFE). Το πρόβλημα του βέλτιστου ελέγχου μετασχηματίζεται με αυτόν τον τρόπο σε ένα πρόβλημα μη-γραμμικού προγραμματισμού, η λύση του οποίου επιδιώκεται να διερευνηθεί μέσω κατάλληλων αλγορίθμων βελτιστοποίησης. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιούνται οι αλγόριθμοι βελτιστοποίησης των λογισμικών MINOS 5.5 και IPOPT 3.12. Κοινό σημείο αυτών είναι η χρήση της συνάρτησης Lagrange του προβλήματος προς βελτιστοποίηση, ενώ διαφέρουν στις μεθόδους προσέγγισης των ακροτάτων της.

Οι αλγόριθμοι αναπτύχθηκαν σε γλώσσα προγραμματισμού C (gcc 4.9). Παρόλη τη μη πρακτική μορφή του συστήματος για μεγάλες τιμές του αριθμού  $n$ , τα αποτελέσματα των αντίστοιχων προσομοιώσεων ενθαρρύνουν την εφαρμογή των υπό εξέταση μεθόδων σε πρακτικά προβλήματα ελέγχου, όπου το μοντέλο του συστήματος θα έχει μικρότερες διαστάσεις ή και ασθενέστερες μη-γραμμικότητες.

# Abstract

The subject of the present diploma project is the optimal control of a large-scale non-linear system. Its aim is the application of effective numerical methods for the non-linear model predictive control of large-scale systems in real-time scenarios. Initially, the non-linear model predictive controller is designed, based on the mathematical model of the system. Consequently, a series of simulation examples of the closed-loop system are formulated, in order to determine the computational time required by the controller at every sampling period, for the calculation of the control action sequence, which minimizes a certain objective function.

The problem under consideration is chosen to be the control of an  $n$ -pendula system, driven by a cart. The equations of motion are written as function of the number of pendula,  $n$ . The purpose of this generalisation is the controlled formulation of large-scale, highly non-linear, mechanical models. The differential equations of the state space model are transformed into algebraic equations, by applying the method of orthogonal collocation in finite elements. Thus, the optimal control problem is converted into a non-linear programming problem, which is set to be solved by suitable optimization algorithms. Namely, the MINOS 5.5 and IPOPT 3.12 software are used. Both solvers make use of the Lagrange function of the optimization problem, while they differ in the ways they approach its extrema.

All of the algorithms were developed in C computer language (gcc 4.9). Regardless of the non practical form of the system for high values of  $n$ , the results of the corresponding simulations encourage the application of the methods under consideration in actual control problems, where the system's model dimensions will be lesser or its non-linearities weaker.

# **Ευχαριστίες**

Με την ευκαιρία αυτή, θα ήθελα ειλικρινά να ευχαριστήσω τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Παναγιώτη Σεφερλή για τις ιδέες και τις κατευθυντήριες συμβουλές του πάνω στο θέμα, τον Υποψήφιο Διδάκτορα Κώστα Γερμακόπουλο, για τις συζητήσεις μας και τις τεχνικές γνώσεις που μοιράστηκε μαζί μου, τους φίλους, για τις στιγμές μας σε κάθε φάση της φοιτητικής μου πορείας και κυρίως την οικογένειά μου για την αδιάκοπη υποστήριξή τους.

# Περιεχόμενα

<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1 Διατύπωση προβλήματος & στόχοι . . . . .	2
<b>2 Μοντελοποίηση Συστήματος</b>	<b>3</b>
2.1 Εξισώσεις κίνησης . . . . .	4
2.2 Μοντέλο μεταβλητών κατάστασης . . . . .	8
<b>3 Μη-Γραμμικός Προβλεπτικός Έλεγχος</b>	<b>10</b>
3.1 Διατύπωση προβλήματος βέλτιστου ελέγχου . . . . .	13
3.2 Ορθογώνια ταξιθεσία σε πεπερασμένα στοιχεία . . . . .	14
3.2.1 Προσέγγιση των εξισώσεων δυναμικής με τη μέθοδο συντοπισμού . . . . .	14
3.2.2 Διακριτοποίηση χρονικού ορίζοντα . . . . .	16
3.2.3 Διακριτοποίηση αντικειμενικής συνάρτησης . . . . .	18
3.3 Διαμόρφωση προβλήματος μη-γραμμικού προγραμματισμού . . . . .	20
3.3.1 Ορισμός της συνάρτησης Lagrange . . . . .	20
3.3.2 Κλίση της συνάρτησης Lagrange . . . . .	23
3.3.3 Καμπυλότητα της συνάρτησης Lagrange . . . . .	31
<b>4 Επίλυση προβλήματος μη-γραμμικού προγραμματισμού</b>	<b>42</b>
4.1 Σύντομη περιγραφή των αλγορίθμων MINOS & IPOPT . . . . .	43
4.1.1 Αλγόριθμος MINOS 5.5 . . . . .	43
4.1.2 Αλγόριθμος IPOPT 3.12 . . . . .	48
4.2 Προσομοίωση συστήματος κλειστού θρόχου . . . . .	51
4.2.1 Αριθμητικά δεδομένα . . . . .	52
4.2.2 Αποτελέσματα προσομοιώσεων . . . . .	54
<b>5 Συμπεράσματα &amp; Μελλοντικές Προεκτάσεις</b>	<b>67</b>
<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>70</b>

# Κατάλογος σχημάτων

2.1 Σύστημα η καθοδηγούμενων εκκρεμών . . . . .	3
2.2 Σύστημα συντεταγμένων & γραμμή αναφοράς $U = 0$ . . . . .	4
3.1 Στιγμιότυπο αλγορίθμου NMPC . . . . .	12
3.2 Παράδειγμα διακριτοποίησης χρονικού ορίζοντα . . . . .	17
4.1 Σύστημα NMPC κλειστού βρόχου . . . . .	51
4.2 Αρχική διέγερση εκκρεμών . . . . .	54
4.3 Προσ.1 - Γωνίες εκκρεμών . . . . .	55
4.4 Προσ.1 - Γωνιακές ταχύτητες εκκρεμών . . . . .	55
4.5 Προσ.1 - Δράση ελέγχου . . . . .	55
4.6 Προσ.2 - Γωνίες εκκρεμών $\theta_1 - \theta_3$ . . . . .	56
4.7 Προσ.2 - Γωνίες εκκρεμών $\theta_4 - \theta_6$ . . . . .	56
4.8 Προσ.2 - Γωνιακές ταχύτητες εκκρεμών $\omega_1 - \omega_3$ . . . . .	57
4.9 Προσ.2 - Γωνίες εκκρεμών $\omega_4 - \omega_6$ . . . . .	57
4.10 Προσ.2 - Δράση ελέγχου . . . . .	57
4.11 Προσ.3 - Γωνίες εκκρεμών $\theta_1 - \theta_4$ . . . . .	58
4.12 Προσ.3 - Γωνίες εκκρεμών $\theta_5 - \theta_8$ . . . . .	58
4.13 Προσ.3 - Γωνιακές ταχύτητες εκκρεμών $\omega_1 - \omega_4$ . . . . .	58
4.14 Προσ.3 - Γωνίες εκκρεμών $\omega_5 - \omega_8$ . . . . .	59
4.15 Προσ.3 - Δράση ελέγχου . . . . .	59
4.16 Προσ.4 - Γωνίες εκκρεμών $\theta_1 - \theta_5$ . . . . .	60
4.17 Προσ.4 - Γωνίες εκκρεμών $\theta_6 - \theta_{10}$ . . . . .	60
4.18 Προσ.4 - Γωνιακές ταχύτητες εκκρεμών $\omega_1 - \omega_5$ . . . . .	60
4.19 Προσ.4 - Γωνίες εκκρεμών $\omega_6 - \omega_{10}$ . . . . .	61
4.20 Προσ.4 - Δράση ελέγχου . . . . .	61
4.21 Προσ.5 - Γωνίες εκκρεμών . . . . .	63
4.22 Προσ.5 - Γωνιακές ταχύτητες εκκρεμών . . . . .	63
4.23 Προσ.5 - Δράση ελέγχου . . . . .	64
4.24 Προσ.6 - Γωνίες εκκρεμών $\theta_1 - \theta_5$ . . . . .	65
4.25 Προσ.6 - Γωνίες εκκρεμών $\theta_6 - \theta_{10}$ . . . . .	65

4.26 Προσ.6 - Γωνιακές ταχύτητες εκκρεμών $\omega_1 - \omega_5$ . . . . .	65
4.27 Προσ.6 - Γωνίες εκκρεμών $\omega_6 - \omega_{10}$ . . . . .	66
4.28 Προσ.6 - Δράση ελέγχου . . . . .	66

---

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

---

### Εισαγωγή

Ο μη-γραμμικός προβλεπτικός έλεγχος (NMPC) αποτελεί μία μεθοδολογία για το βέλτιστο έλεγχο μη-γραμμικών συστημάτων. Το πραγματικό σύστημα προσεγγίζεται από ένα μοντέλο, το οποίο χρησιμοποιεί ο ελεγκτής για να επιλύσει ένα πρόβλημα μη-γραμμικού προγραμματισμού. Η λύση του προβλήματος είναι μία σειρά δράσεων ελέγχου για άπειρο ή κάποιο πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα, ώστε να ελαχιστοποιείται κάποια αντικειμενική συνάρτηση. Ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο [9], για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με το σχεδιασμό, την ευστάθεια και τις μεθόδους αριθμητικής προσέγγισης του μη-γραμμικού προβλεπτικού ελέγχου. Προβλήματα μη-γραμμικού προγραμματισμού με αυξημένο αριθμό μεταβλητών και περιορισμών, χαρακτηρίζονται ως προβλήματα μεγάλης κλίμακας.

Οι εφαρμογές του μη γραμμικου προβλεπτικού ελέγχου, ειδικότερα στην περίπτωση συστημάτων μεγάλης κλίμακας, προέρχονται κυρίως από το χώρο των χημικών διεργασιών, οι οποίες κυριεύονται από αργά δυναμικά χαρακτηριστικά. Το [6] παρουσιάζει ένα τέτοιο παράδειγμα πειραματικής εφαρμογής σε ένα σύστημα στήλης απόσταξης (high purity distillation column), για το διαχωρισμό ενός μίγματος μεθανόλης και π-προπανόλης. Παρόλα αυτά, τα τελευταία χρόνια, το ενδιαφέρον έχει στραφεί και σε εφαρμογές με γρήγορα δυναμικά χαρακτηριστικά, όπου απαιτείται υψηλή υπολογιστική επίδοση σε πραγματικό χρόνο. Το [17] αποτελεί ενθαρρυντικό παράδειγμα πρακτικής εφαρμογής μη-γραμμικού προβλεπτικού ελέγχου σε ένα μη επανδρωμένο εναέριο όχημα τεσσάρων ελίκων (quadrotor), δίχως όμως την ύπαρξη μεγάλης κλίμακας στο σύστημα. Η συνύπαρξη μη-γραμμικοτήτων, μεγάλης κλίμακας και γρήγορων δυναμικών χαρακτηριστικών αυξάνουν σημαντικά τις υπολογιστικές απαιτήσεις, δυσχεραίνοντας σημαντικά την επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης σε πραγματικό χρόνο και την εξασφάλιση της ευστάθειας του ελεγκτή. Το παραπάνω ζήτημα αποτελεί αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Η εξέταση της απόδοσης του

μη-γραμμικού προβλεπτικού ελεγκτή που θα σχεδιαστεί, πραγματοποιείται μέσω προσομοιώσεων για τον βέλτιστο έλεγχο ενός συστήματος πολλαπλών καθοδηγούμενων εκκρεμών.

## 1.1 Διατύπωση προβλήματος & στόχοι

Το σύστημα πολλαπλών καθοδηγούμενων εκκρεμών αποτελεί ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα ισχυρά μη-γραμμικού συστήματος. Υψηλοί υπολογιστικοί χρόνοι του ελεγκτή κρίνονται απαγορευτικοί από τα γρήγορα δυναμικά χαρακτηριστικά του συστήματος. Επιπλέον, ο αριθμός των εξισώσεων κίνησης και των μεταβλητών τους μεταβάλλονται γραμμικά ως συνάρτηση του αριθμού των εκκρεμών, π. Η καθοδήγηση των εκκρεμών πραγματοποιείται από ένα αμάξωμα, το οποίο συνδέεται άμεσα με το πρώτο εκκρεμές και κινείται κατά τη διεύθυνση του οριζόντιου άξονα. Τα εκκρεμή αποτελούνται από μία αβαρή ράβδο και μία συγκεντρωμένη μάζα στο κατώτερο σημείο. Στο αμάξωμα εφαρμόζεται η δράση ελέγχου με τη μορφή οριζόντιας σημειακής δύναμης, καθώς και δύναμη τριβής κατά την κίνησή του, ενώ όλο το σύστημα βρίσκεται υπό ομοιόμορφο βαρυτικό πεδίο.

Ο αλγόριθμος που αναπτύχθηκε παράγει ένα μοντέλο των εξισώσεων κίνησης του συστήματος, όπως αυτές περιγράφηκαν παραπάνω, για οποιοδήποτε αριθμό εκκρεμών π. Ο βέλτιστος έλεγχος του πραγματικού συστήματος με τη χρήση του μοντέλου αποτελεί μία γενίκευση του [8], όπου εφαρμόζεται η μέθοδος direct single shooting μαζί με μία ανάλυση ευαισθησίας των παραμέτρων του προβλήματος μη-γραμμικού προγραμματισμού, και του [13], όπου χρησιμοποιείται η ομοτοπική μέθοδος συνέχισης λύσεων με προοδευτικό βήμα, σε σύστημα διπλού καθοδηγούμενου εκκρεμούς. Στόχος του ελέγχου είναι να περιορίσει στο ελάχιστο την ταλάντωση των εκκρεμών στο δεδομένο χρόνο ελέγχου, υπό ορισμένες μη μηδενικές αρχικές συνθήκες ταχυτήτων και μετατοπίσεων.

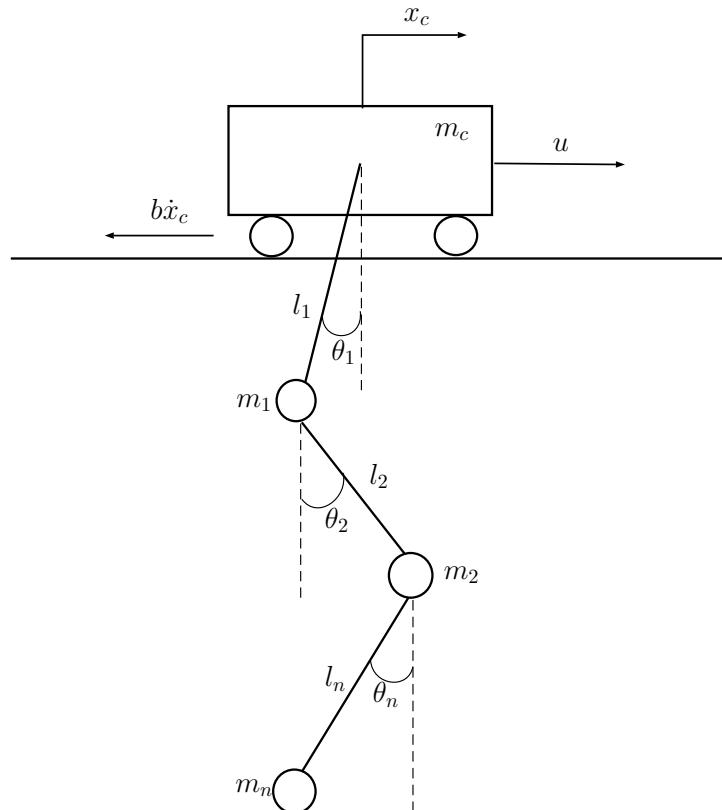
---

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

---

# Μοντελοποίηση Συστήματος

Σε αυτό το κεφάλαιο εξάγονται οι εξισώσεις κίνησης του συστήματος των καθοδηγούμενων εκκρεμών, με τη χρήση των εξισώσεων Euler-Lagrange και στη συνέχεια διαμορφώνεται το μοντέλο μεταβλητών κατάστασης που θα χρησιμοποιήσει ο μηγραμμικός προβλεπικός ελεγκτής.



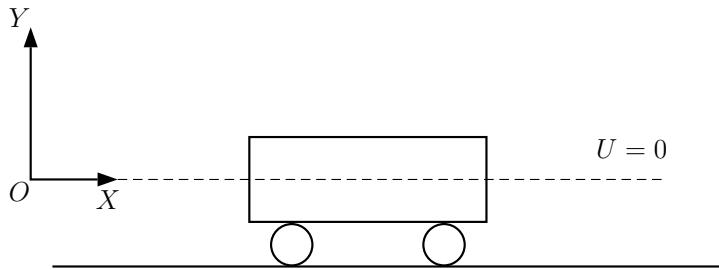
Σχήμα 2.1: Σύστημα η καθοδηγούμενων εκκρεμών

Το 2.1 αποτελεί μία γενικευμένη απεικόνιση του συστήματος υπό εξέταση. Κάθε εκκρεμές είναι ελεύθερο να περιστραφεί στο επίπεδο ως προς το σημείο σύνδεσης

του με το προηγούμενο εκκρεμές, ή με το αμάξωμα, στην περίπτωση του πρώτου. Το μοντέλο που χρησιμοποιείται είναι απλοποιημένο, με αθαρείς ράβδους σύνδεσης, μήκους  $l_i$  και συγκεντρωμένες μάζες  $m_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), σε αντίθεση με το πλήρες σύστημα πολλαπλών σωμάτων (multi-body system), όπου το βάρος κατανέμεται κατα μήκους των ραβδών. Το [1] ασχολείται με τις ιδιότητες των δύο παραπάνω μοντέλων, κατά την επίλυση του ιδιοπροβλήματος και την εφαρμογή του θεωρήματος ίχνους (trace theorem), τις συνθήκες αντιστοιχίας μεταξύ τους, καθώς και την οριακή περίπτωση προσέγγισης μιας συνεχής χορδής, με ομοιόμορφα κατανεμημένη μάζα, όταν ο αριθμός των εκκρεμών τείνει στο άπειρο. Το αμάξωμα κινείται κατά τη διεύθυνση του άξονα  $x$ , λόγω της δύναμης  $u$  που εφαρμόζεται ως δράση του ελεγκτή, σε έδαφος με συντελεστή τριβής  $b$ .

## 2.1 Εξισώσεις κίνησης

Για την κινηματική και κινητική ανάλυση του συστήματος, ορίζεται ένα σταθερό σύστημα συντεταγμένων, σε ένα αυθαίρετο σημείο του επιπέδου, όπως και η γραμμή αναφοράς όπου η δυναμική ενέργεια ισούται με μηδέν. Στην προκειμένη περίπτωση, η γραμμή αναφοράς ταυτίζεται με τον άξονα  $X$  του επιπέδου, ενώ διέρχεται από το κέντρο μάζας του αμαξώματος.



**Σχήμα 2.2:** Σύστημα συντεταγμένων & γραμμή αναφοράς  $U = 0$

Αρχικά, το διάνυσμα των γενικευμένων συντεταγμένων έχει τη μορφή  $q = [x_c \ x_1 \ y_1 \ \dots \ x_n \ y_n]^T$ , όπου  $x_c$  και  $y_c$ , οι συντεταγμένες του αμαξώματος και  $x_k, y_k$ , οι συντεταγμένες των εκκρεμών, για τις οποίες ισχύει,  
 $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$x_k = x_c + \sum_{j=1}^k l_j \sin \theta_j \quad (2.1)$$

$$y_k = y_c + \sum_{j=1}^k l_j \cos \theta_j \quad (2.2)$$

Το διάνυσμα  $q$  δεν αποτελείται από τον ελάχιστο δυνατό αριθμό συντεταγμένων για την πλήρη περιγραφή της κίνησης του συστήματος. Τα ζεύγη των καρτεσιανών συντεταγμένων κάθε εκκρεμούς σχηματίζουν ολόνομους δεσμούς κίνησης της

μορφής

$$x_k^2 + y_k^2 = f_k(x_c, y_c, x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) = 0$$

Ο μετασχηματισμός του διανύσματος  $q$ , ώστε αυτό να περιέχει τις ανεξάρτητες γενικευμένες συντεταγμένες του συστήματος, γίνεται στη συνέχεια, με την κατάστρωση των εξισώσεων κινητικής και δυναμικής ενέργειας. Η δυναμική ενέργεια του αμαξώματος είναι μηδενική, ενώ για την κινητική του ενέργεια ισχύει

$$T_c = \frac{1}{2} m_c \dot{x}_c^2 \quad (2.3)$$

Αντίστοιχα, για τα εκκρεμή, οι εξισώσεις των ενεργειών είναι

$$T_k = \frac{1}{2} m_k (\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2) \quad (2.4)$$

$$U_k = m_k g y_k \quad (2.5)$$

Η παραγώγιση των (2.1) και (2.2) ως προς το χρόνο θα μας δώσει τις εξισώσεις των ταχυτήτων στην αντίστοιχη διεύθυνση

$$\dot{x}_k = \dot{x}_c + \sum_{j=1}^k l_j \dot{\theta}_j \cos \theta_j \quad (2.6)$$

$$\dot{y}_k = \dot{y}_c - \sum_{j=1}^k l_j \dot{\theta}_j \sin \theta_j \quad (2.7)$$

Η (2.4), με βάση τις (2.6) και (2.7), μετασχηματίζεται στη μορφή

$$T_k = \frac{1}{2} m_k \{ \dot{x}_c^2 + 2\dot{x}_c \sum_{j=1}^k l_j \dot{\theta}_j \cos \theta_j + \sum_{i=1}^k [l_i^2 \dot{\theta}_i^2 + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k l_i l_j \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j \cos(\theta_i - \theta_j)] \} \quad (2.8)$$

Η Lagrangian ορίζεται ως η διαφορά της κινητικής με τη δυναμική ενέργεια του συστήματος, ως εξής

$$L = T - V = T_c + \sum_{k=1}^n T_k - \sum_{k=1}^n U_k \quad (2.9)$$

Για την ευκολότερη παραγώγιση της (2.9) και τη διαμόρφωση των εξισώσεων κίνησης, χρησιμοποιούνται οι παρακάτω σχέσεις, οι οποίες αποτελούν ένα διακριτό ανάλογο του θεωρήματος του Fubini για την ανταλλαγή της θέσης ολοκληρωμάτων, σύμφωνα με το [1]

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k = \sum_{i=1}^n \sum_{k=i}^n \quad , \quad \sum_{k=i}^n \sum_{j=1}^k = \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ max(i,j)}}^n$$

Στο εσωτερικό άθροισμα κάθε όρου, υπάρχουν αθροίσεις που αφορούν μόνο τις μάζες των εκκρεμών. Για διευκόλυνση εισάγονται οι όροι

$$M_l = \sum_{k=1}^n m_k$$

οι οποίοι αντιπροσωπεύουν την συνολική μάζα των εκκρεμών από οποιαδήποτε σημειακή μάζα  $m_l$  μέχρι και την τελευταία σε σειρά, σύμφωνα με τη διάταξή τους.

Έτσι, η (2.9) λαμβάνει τη μορφή

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2}(m_c + \sum_{k=1}^n m_k)\dot{x}_c^2 + \dot{x}_c \sum_{j=1}^k M_j l_j \dot{\theta}_j \cos \theta_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [M_i l_i^2 \dot{\theta}_i^2 + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n M_{max(i,j)} l_i l_j \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j \cos(\theta_i - \theta_j)] \\ & - g \sum_{i=1}^n M_i l_i \cos \theta_i \quad (2.10) \end{aligned}$$

Είναι πλέον προφανές οτι το διάνυσμα γενικευμένων συντεταγμένων που επιλέγεται για την εξαγωγή των εξισώσεων κίνησης περιλαμβάνει τις ανεξάρτητες συντεταγμένες, με μορφή  $q = [x_c \quad \theta_1 \quad \theta_2 \quad \dots \quad \theta_n]^T$ . Οι εξισώσεις Euler-Lagrange, σε σύστημα όπου η δυναμική ενέργεια δεν είναι συνάρτηση των γενικευμένων ταχυτήτων  $\dot{q}$ , σύμφωνα με το [18], έχουν τη γενική μορφή

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{nc} \quad (2.11)$$

όπου  $Q_j^{nc}$  οι γενικευμένες μη-συντηρητικές δυνάμεις που επιδρούν σε κάθε βαθμό ελευθερίας  $q_j$ .

Η εξίσωση κίνησης του αμαξώματος προκύπτει μετά από τις απαραίτητες παραγώγισεις της (2.9), σύμφωνα με την (2.11)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c} = (m_c + M_1) \ddot{x}_c + \sum_{j=1}^n M_j l_j \dot{\theta}_j \cos \theta_j \quad (2.12)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c} \right) = (m_c + M_1) \ddot{x}_c + \sum_{j=1}^n M_j l_j (\ddot{\theta}_j \cos \theta_j - \dot{\theta}_j \sin \theta_j) \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_c} = 0 \quad (2.14)$$

$$Q_{x_c}^{nc} = u - b \dot{x}_c \quad (2.15)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_c} = Q_{x_c}^{nc} \quad (2.16)$$

$$\text{συνεπάγεται ότι } (m_c + M_1) \ddot{x}_c + \sum_{j=1}^n M_j l_j (\ddot{\theta}_j \cos \theta_j - \dot{\theta}_j^2 \sin \theta_j) - u + b \dot{x}_c = 0 \quad (2.17)$$

Αντίστοιχη δουλειά γίνεται και για τα εκκρεμή, οι εξισώσεις κίνησης των οποίων παρουσιάζονται στην παρακάτω γενική μορφή

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_k} = M_k l_k \dot{x}_c \cos \theta_k + M_k l_k^2 \dot{\theta}_k + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n M_{max(k,j)} l_k l_j \dot{\theta}_j \cos(\theta_k - \theta_j) \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_k} \right) &= M_k l_k \ddot{x}_c \cos \theta_k - M_k l_k \dot{x}_c \dot{\theta}_k \sin \theta_k + M_k l_k^2 \ddot{\theta}_k \\ &+ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n M_{max(k,j)} l_k l_j [\ddot{\theta}_j \cos(\theta_k - \theta_j) - \dot{\theta}_k \dot{\theta}_j \sin(\theta_k - \theta_j) + \dot{\theta}_j^2 \sin(\theta_k - \theta_j)] \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_k} = -M_k l_k \dot{x}_c \dot{\theta}_k \sin \theta_k - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n M_{max(k,j)} l_k l_j \dot{\theta}_k \dot{\theta}_j \sin(\theta_k - \theta_j) + M_k l_k g \sin \theta_k \quad (2.20)$$

$$Q_{\theta_k}^{nc} = 0 \quad (2.21)$$

$$(2.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_k} &= M_k l_k \ddot{x}_c \cos \theta_k + M_k l_k^2 \ddot{\theta}_k \\ &+ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n M_{max(k,j)} l_k l_j [\ddot{\theta}_j \cos(\theta_k - \theta_j) + \dot{\theta}_j^2 \sin(\theta_k - \theta_j)] = 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Ορίζονται τα μητρώα

$$\mathbf{A}(q) = \begin{bmatrix} m_c + M_1 & M_1 l_1 \cos \theta_1 & M_2 l_2 \cos \theta_2 & \dots & M_n l_n \cos \theta_n \\ M_1 l_1 \cos \theta_1 & M_1 l_1^2 & M_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & \dots & M_n l_1 l_n \cos(\theta_1 - \theta_n) \\ M_2 l_2 \cos \theta_2 & M_2 l_1 l_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) & M_2 l_2^2 & \dots & M_n l_2 l_n \cos(\theta_2 - \theta_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_n l_n \cos \theta_n & M_n l_1 l_n \cos(\theta_n - \theta_1) & M_n l_2 l_n \cos(\theta_n - \theta_2) & \dots & M_n l_n^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} b & -M_1 l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 & -M_2 l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 & \dots & -M_n l_n \dot{\theta}_n \sin \theta_n \\ 0 & 0 & M_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) & \dots & M_n l_1 l_n \dot{\theta}_n \sin(\theta_1 - \theta_n) \\ 0 & M_2 l_2 l_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) & 0 & \dots & M_n l_2 l_n \sin(\theta_2 - \theta_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & M_n l_n l_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_n - \theta_1) & M_n l_n l_2 \sin(\theta_n - \theta_2) & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_1 l_1 g \sin \theta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & M_2 l_2 g \sin \theta_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & M_n l_n g \sin \theta_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

όπου  $\mathbf{A} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ ,  $\mathbf{B} : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ ,  $\mathbf{C} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ ,  $\mathbf{e}_1 \in \mathbb{R}^{n+1}$ , μπορούν να εκφραστούν οι εξισώσεις κίνησης στη συμβολική μορφή

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}) - \mathbf{e}_1 u = 0 \quad (2.24)$$

## 2.2 Μοντέλο μεταβλητών κατάστασης

Το σύστημα (2.24) 2<sup>ης</sup> τάξης μετατρέπεται σε σύστημα 1<sup>ης</sup> τάξης με τον ορισμό του διανύσματος γενικευμένων ταχυτήτων

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{bmatrix} \quad \text{συνεπάγεται ότι } \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{q}} \quad (2.25)$$

Η σχέση (2.25) δηλώνει τον προσδιορισμό των γενικευμένων ταχυτήτων από την άμεση παραγώγιση των γενικευμένων συντεταγμένων, μία ισότητα που ισχύει στην περίπτωση της γενικής επίπεδης κίνησης. Παρόμοια ισότητα εφαρμόζεται και ανάμεσα στις γενικευμένες ταχύτητες και επιταχύνσεις.

Εποιητικά, το σύστημα (2.24) παίρνει τη μορφή

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{B}(\mathbf{q}, \mathbf{v})\mathbf{v} + \mathbf{C}(\mathbf{q}) - \mathbf{e}_1 u = 0 \quad (2.26)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v} \quad (2.27)$$

Η μητρωϊκή μορφή του συστήματος 1<sup>ης</sup> τάξης που προκύπτει θα είναι

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}(q) & \mathbf{0}_{n+1} \\ \mathbf{0}_{n+1} & \mathbf{I}_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}(v, q) & \mathbf{0}_{n+1} \\ -\mathbf{I}_{n+1} & \mathbf{0}_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}(q) \\ \mathbf{0}_{n+1} \end{bmatrix} - e_1 u = 0 \quad (2.28)$$

,όπου  $\mathbf{I}_{n+1}$  και  $\mathbf{0}_{n+1}$  μοναδιαίο και μηδενικό αντίστοιχα τετραγωνικό μητρώο διάστασης  $(n+1) \times (n+1)$ . Τέλος ορίζεται το διάνυσμα μεταβλητών κατάστασης

$$x = \begin{bmatrix} v \\ q \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

ώστε η (2.28) να εκφραστεί συμβολικά στη μορφή

$$\mathbf{M}(x)\dot{x} + \mathbf{H}(x)x + \bar{\mathbf{C}}(x) - e_1 u = 0 \quad (2.30)$$

---

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

---

# Μη-Γραμμικός Προβλεπτικός Έλεγχος

Σύμφωνα με το [9], ο μη-γραμμικός προβλεπτικός έλεγχος (NMPC) αποτελεί μία μέθοδο βασισμένη στη βελτιστοποίηση για τον έλεγχο μη γραμμικών συστημάτων σε διατάξεις κλειστού όροφου. Έστω ότι δίνεται μία ελεγχόμενη διεργασία, οι μεταβλητές κατάστασης  $x(n) \in \mathbf{X} = \mathbb{R}^d$  της οποίας μετρούνται σε διακριτές χρονικές στιγμές  $t_n, n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ . Ελεγχόμενη ονομάζεται μια διεργασία για την οποία σε κάθε χρονική στιγμή  $t_n$  μπορεί να εφαρμοστεί μία δράση ελέγχου  $u(n) \in \mathbf{U} = \mathbb{R}^m$ , επηρεάζοντας άμεσα ή έμμεσα τις τιμές των μεταβλητών κατάστασης μελλοντικών στιγμών. Στην περίπτωση του μη-γραμμικού προβλεπτικού ελέγχου, οι δράσεις αυτές επιδιώκουν να ελαχιστοποιήσουν την απόκλιση των μεταβλητών κατάστασης από ορισμένες επιθυμητές τιμές ή τροχιές.

Για την επίτευξη του στόχου ελέγχου, ο μη-γραμμικός προβλεπτικός ελεγκτής χρησιμοποιεί ένα μοντέλο της διεργασίας της μορφής

$$\mathbf{x}^+ = h(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (3.1)$$

όπου  $f : \mathbf{X} \times \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{X}$  είναι μία γνωστή μη-γραμμική συνάρτηση που συνδέει το διάνυσμα μεταβλητών κατάστασης και ελέγχου της παρούσας χρονικής στιγμής με μία εκτίμηση των μεταβλητών κατάστασης της επόμενης. Γνωρίζοντας την τιμή του διανύσματος  $\mathbf{x}(n)$  στο παρόν διάστημα δειγματοληψίας από μετρήσεις ή εκτιμήσεις, για μία δεδομένη σειρά δράσεων  $u(0), u(1), \dots, u(N_h - 1)$ , ακολουθείται η παρακάτω επαναληπτική διαδικασία για τον υπολογισμό της προβλεπόμενης τροχιάς  $x_u$

$$\mathbf{x}_u(k + 1) = h(\mathbf{x}_u(k), \mathbf{u}(k)), \quad k = 0, 1, \dots, N_h - 1 \quad (3.2)$$

με την αρχική συνθήκη  $\mathbf{x}_u(0) = \mathbf{x}(n)$ . Η μεταβλητή  $N_h$  αναπαριστά τον ορίζοντα πρόρρησης (prediction horizon). Μέσω της διαδικασίας (3.2) πραγματοποιείται ο υπολογισμός της δέλτιστης ακολουθίας ελέγχου  $u_*(k)$ . Ως δέλτιστη ορίζεται η

---

ακολουθία ελέγχου, που ελαχιστοποιεί ένα δείκτη απόδοσης της μορφής

$$f(\delta \mathbf{x}_u, \delta \mathbf{u}) = \sum_{k=0}^{N_h-1} L(\delta \mathbf{x}_u(k), \delta \mathbf{u}(k)) \quad (3.3)$$

$$\text{όπου } L(\delta \mathbf{x}_u(k), \delta \mathbf{u}(k)) = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}_u(k) \\ \delta \mathbf{u}(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_x & \mathbf{Q}_{xu} \\ \mathbf{Q}_{xu}^T & \mathbf{Q}_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}_u(k) \\ \delta \mathbf{u}(k) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Στην (3.4) η απόκλιση από την επιθυμητή τροχιά  $x_{sp}(t)$  εκφράζεται με τον όρο  $\delta \mathbf{x}_u(k) = \mathbf{x}_u(k) - \mathbf{x}_{sp}(n+k)$ . Το  $\mathbf{x}_{sp}(n+k)$  εκφράζει την επιθυμητή τιμή των μεταβλητών κατάστασης για την στιγμή  $t_n+k$  στην απόλυτη χρονική κλίμακα. Επίσης, υπάρχει η δυνατότητα περιορισμού του μεγέθους των συνεχόμενων μεταβολών των δράσεων ελέγχου μέσω του όρου  $\delta \mathbf{u}(k) = \mathbf{u}(k) - \mathbf{u}(k-1)$ . Τα μητρώα  $\mathbf{Q}_x, \mathbf{Q}_u, \mathbf{Q}_{xu}$  αποτελούν συντελεστές κόστους των αντίστοιχων αποκλίσεων. Το  $\mathbf{Q}_x$  επιλέγεται θετικά ημι-ορισμένο, το  $\mathbf{Q}_u$  θετικά ορισμένο, ενώ το  $\mathbf{Q}_{xu}$  επιλέγεται έτσι ώστε το συνολικό μητρώο να είναι θετικά ημι-ορισμένο. Ετσι, οι ιδιοτιμές τους είναι μη-αρνητικές, άρα μπορεί να υπάρχουν στοιχεία των  $\delta \mathbf{x}_u(k)$  και  $\delta \mathbf{u}(k)$ , τα οποία να μην επιδρούν στο δείκτη απόδοσης (3.3).

Εαν είναι επιθυμητή μία συγκεκριμένη τελική κατάσταση για τη διεργασία, τότε η (3.3) παίρνει τη μορφή

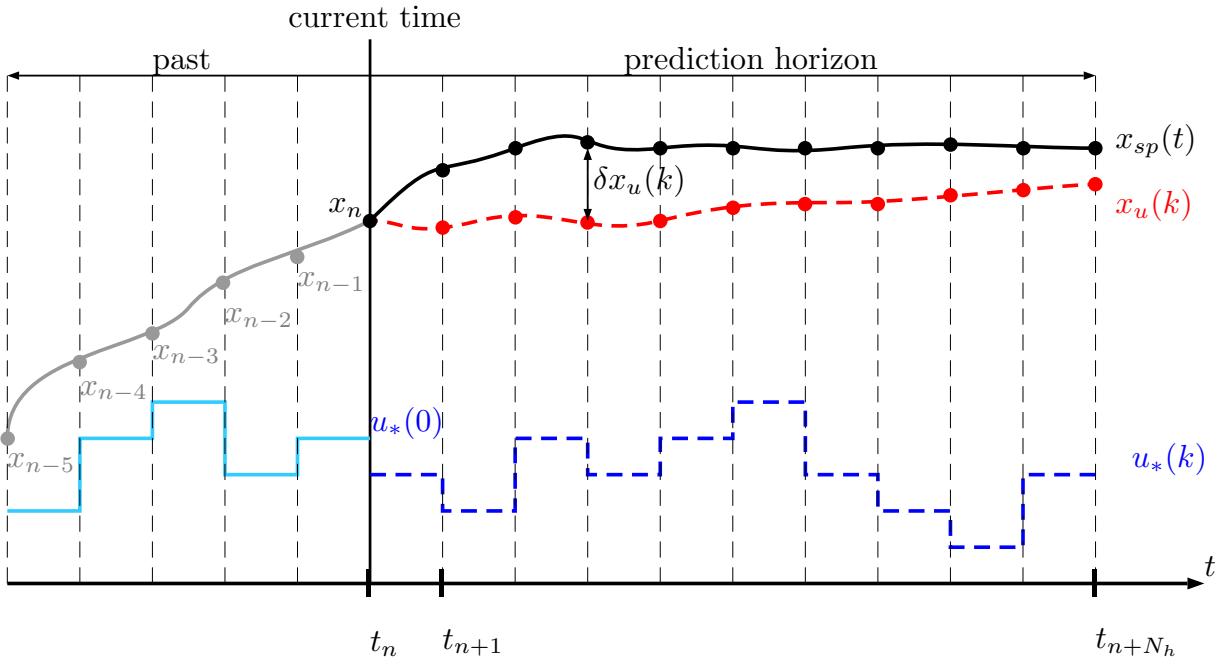
$$f(\delta \mathbf{x}_u, \delta \mathbf{u}) = \delta \mathbf{x}_u(N_h)^T \mathbf{Q}_f \delta \mathbf{x}_u(N_h) + \sum_{k=0}^{N_h-1} L(\delta \mathbf{x}_u(k), \delta \mathbf{u}(k)) \quad (3.5)$$

όπου  $\mathbf{Q}_f$ , το μητρώο συντελεστών κόστους που εκφράζει τη σημαντικότητα του στόχου για την τελική κατάσταση.

Στο σημείο αυτό, είναι απαραίτητο να σημειωθεί μία βασική ιδιότητα του προβλεπτικού ελέγχου, ο κυλιόμενος ορίζοντας πρόρρησης (rolling horizon). Η ιδιότητα του κυλιόμενου ορίζοντα επιτρέπει στον ελεγκτή, σε κάθε διάστημα δειγματοληψίας και αφού έχει λάβει τις πραγματικές μετρήσεις ή εκτιμήσεις  $\mathbf{x}(i)$ , για κάθε  $i \in \{n+1, n+2, \dots, N_t\}$ , όπου  $N_t$  ο συνολικός διακριτοποιημένος χρόνος της διεργασίας, να επαναλάβει την επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης

$$\begin{aligned} \underset{\delta \mathbf{u}}{\text{minimize}} \quad & f(\delta \mathbf{x}_u, \delta \mathbf{u}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{x}_u(k+1) = h(\mathbf{x}_u(k), \mathbf{u}(k)) \\ & \mathbf{x}_u(0) = \mathbf{x}(n) \end{aligned} \quad (3.6)$$

και στη συνέχεια να εφαρμόσει την πρώτη δράση  $u_*(0)$  από τη βέλτιστη ακολουθία που προκύπτει. Στο 3.1 παρουσιάζεται ένα στιγμιότυπο κατά τη χρονική στιγμή  $t_n$  της επαναληπτικής διαδικασίας που ακολουθεί ο NMPC για την προσέγγιση της ζητούμενης τροχιάς. Η ικανοποιητική προσέγγιση της τροχιάς, στα πλαίσια του



Σχήμα 3.1: Στιγμιότυπο αλγορίθμου NMPC

χρόνου και της ακρίβειας σύγκλισης, εξαρτάται κατά κύριο λόγο από την ακρίβεια του μοντέλου. Το γεγονός αυτό δεν ενθαρρύνει την εφαρμογή του NMPC σε έντονα μη-γραμμικές διεργασίες με περιορισμένα δεδομένα για τα δυναμικά τους χαρακτηριστικά, όπου είναι δύσκολο ή και αδύνατο να διαμορφωθεί ένα αναλυτικό μοντέλο. Ωστόσο, υπάρχουν τεχνικές για την παραγωγή προσεγγιστικών μοντέλων, όπως παρουσιάζονται στο [2].

Ο ορίζοντας πρόρρησης  $N_h$  είναι μία ακόμα παράμετρος που επηρεάζει την απόδοση του NMPC. Μια μεγάλη τιμή της μεταβλητής ενισχύει την ευστάθεια του ελεγκτή, δυσχεραίνοντας παράλληλα τη σύγκλιση στην περίπτωση ύπαρξης διαταραχών και σφαλμάτων του μοντέλου. Είναι απαραίτητο να ορίζεται ένα κατώτατο όριο στην τιμή του  $N_h$ , ώστε να συμπεριλαμβάνεται με επάρκεια η δυναμική συμπεριφορά του συστήματος κατά την επίλυση του (3.6). Ο υπολογιστικός χρόνος του αλγορίθμου του NMPC σε κάθε χρονικό βήμα θα πρέπει να είναι αρκετά σύντομος, ώστε να μπορεί να εφαρμοστεί η βέλτιστη δράση  $u_*(0)$ , από τους ενεργοποιητές της διάταξης, στο χρόνο που απομένει, πριν το επόμενο διάστημα δειγματοληψίας. Η απαίτηση αυτή μεταφράζεται σε ένα ανώτατο όριο του  $N_h$ . Ένας όχι σύντομος ορίζοντας πρόρρησης σε συνδυασμό με κατάλληλες τιμές στα στοιχεία του μητρώου στάθμισης  $Q_u$  μπορεί να οδηγήσει σε ομαλότερες μεταβολές των δράσεων ελέγχου και επομένως στον περιορισμό της καταπόνησης των ενεργοποιητών.

Ο μη-γραμμικός προβλεπτικός έλεγχος αποτελεί μία ευκολονόητη μέθοδο για το βέλτιστο έλεγχο δυναμικών συστημάτων, με ξεκαθάρη τη συμβολή κάθε παραμέ-

τρου ρύθμισης στην επίδοσή του. Συνδυαζόμενος με τους κατάλληλους αλγορίθμους βελτιστοποίησης, μπορεί να παράξει ικανοποιητικά αποτελέσματα σε περιπτώσεις μη-γραμμικών συστημάτων, τα οποία χαρακτηρίζονται και από μεγάλη κλίμακα, όπως θα φανεί στη συνέχεια.

### 3.1 Διατύπωση προβλήματος βέλτιστου ελέγχου

Το πρόβλημα του βέλτιστου ελέγχου των  $n$  καθοδηγούμενων εκκρεμών, διατυπώνεται, σύμφωνα με τη γενική μορφή του προβλήματος μη-γραμμικού προβλεπτικού ελέγχου (3.6), ως εξής

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{u}}{\text{minimize}} \quad & f(\mathbf{y}, \mathbf{u}) = \mathbf{y}(t_f)^T \mathbf{Q}_f' \mathbf{y}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ u(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_y & \mathbf{Q}_{yu} \\ \mathbf{Q}_{yu}^T & Q_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{M}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{H}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{x}) - \mathbf{e}_1 u = 0 \\ & \mathbf{y} = \mathbf{Cx} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Ο δείκτης επίδοσης  $f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ , που από εδώ και πέρα αναφέρεται ως αντικειμενική συνάρτηση (objective function) του προβλήματος βελτιστοποίησης, εκφράζει το στόχο του ελεγκτή να περιορίσει στο ελάχιστο την ταλάντωση των εκκρεμών εφαρμόζοντας τις ελάχιστες, σε απόλυτο μέγεθος, δράσεις  $u$ . Ισχύει επομένως  $\theta_{sp} = 0$  και  $\dot{\theta}_{sp} = 0$ . Οι περιορισμοί του προβλήματος αποτελούνται από το πλήρες μοντέλο μεταβλητών κατάστασης, όπως αυτό διαμορφώθηκε στην (2.30), συμπεριλαμβάνοντας και την εξίσωση των μεταβλητών εξόδου του μοντέλου  $y$ . Για το σύστημα θεωρείται ότι όλες οι μεταβλητές κατάστασης  $x$  είναι διαθέσιμες προς μέτρηση, επομένως το μητρώο  $\mathbf{C}$  θα είναι μοναδιαίο και ο δεύτερος περιορισμός μπορεί να εξαλειφθεί με άμεση αντικατάστασή του στην αντικειμενική συνάρτηση.

$$\mathbf{y}(t_f)^T \mathbf{Q}_f' \mathbf{y}(t_f) = \mathbf{x}(t_f)^T \mathbf{C}^T \mathbf{Q}_f' \mathbf{C} \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}(t_f)^T \mathbf{Q}_f \mathbf{x}(t_f) \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ u(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_y & \mathbf{Q}_{yu} \\ \mathbf{Q}_{yu}^T & Q_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ u(t) \end{bmatrix} &= \mathbf{y}(t)^T \mathbf{Q}_y \mathbf{y}(t) + \mathbf{y}(t)^T \mathbf{Q}_{yu} u(t) + u(t) \mathbf{Q}_{yu}^T \mathbf{y}(t) + Q_u u(t)^2 \\ &= \mathbf{x}(t)^T \mathbf{C}^T \mathbf{Q}_y \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}(t)^T \mathbf{C}^T \mathbf{Q}_{yu} u(t) + u(t) \mathbf{Q}_{yu}^T \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + Q_u u(t)^2 \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{Q}_x \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{Q}_{xu} u(t) + u(t) \mathbf{Q}_{xu}^T \mathbf{x} + Q_u u(t)^2 \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ u(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_x & \mathbf{Q}_{xu} \\ \mathbf{Q}_{xu}^T & Q_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{u}}{\text{minimize}} \quad & f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{x}(t_f)^T \mathbf{Q}_f \mathbf{x}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ u(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_x & \mathbf{Q}_{xu} \\ \mathbf{Q}_{xu}^T & Q_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt \quad (3.10) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{M}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{H}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \bar{\mathbf{C}}(\mathbf{x}) - \mathbf{e}_1 u = 0 \end{aligned}$$

Τα μητρώα  $Q_x \in \mathbb{R}^{n_s \times n_s}$ ,  $Q_{xu} \in \mathbb{R}^{n_s}$ ,  $Q_f \in \mathbb{R}^{n_s \times n_s}$  έχουν τις ιδιότητες των μητρώων στάθμισης της (3.4), όπου  $n_s = 2n + 2$ , ο αριθμός των μεταβλητών κατάστασης, ενώ  $u, Q_u \in \mathbb{R}$ . Στη συνέχεια θα παρουσιασθούν μέθοδοι διακριτοποίησης των εξισώσεων δυναμικής και της αντικειμενικής συνάρτησης, με σκοπό το μετασχηματισμό του προβλήματος (3.10) σε πρόβλημα μη-γραμμικού προγραμματισμού.

## 3.2 Ορθογώνια ταξίθεσία σε πεπερασμένα στοιχεία

Η ορθογώνια ταξίθεσία σε πεπερασμένα στοιχεία (Orthogonal Collocation on Finite Elements - OCFE) αποτελεί μία μέθοδο προσέγγισης συστημάτων διαφορικών εξισώσεων με αλγεβρικές εξισώσεις, μέσω ορισμένων δοκιμαστικών συναρτήσεων (trial functions). Αρχικά, παρουσιάστηκε στα [7] και [3] με εφαρμογές σε προβλήματα μηχανικής ρευστών και μεταφοράς θερμότητας. Το [14] μελετά την απόδοση της μεθόδου σε προβλήματα βέλτιστου ελέγχου, όπου το δυναμικό πρόβλημα βελτιστοποίησης μετατρέπεται σε ένα στατικό πρόβλημα μη-γραμμικού προγραμματισμού.

### 3.2.1 Προσέγγιση των εξισώσεων δυναμικής με τη μέθοδο συντοπισμού

Η μέθοδος συντοπισμού (collocation method) είναι μία υποκατηγορία της ορθογώνιας ταξίθεσίας σε πεπερασμένα στοιχεία. Κατ’αυτή τη μέθοδο, η προσέγγιση της λύσης ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων, πραγματοποιείται με τη χρήση πολυωνύμων, ενώ ζητείται η ικανοποίηση των εξισώσεων δυναμικής του συστήματος από την προσεγγιστική λύση (trial solution) σε έναν πεπερασμένο αριθμό σημείων. Υπενθυμίζεται το σύστημα των εξισώσεων δυναμικής

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{B}(\mathbf{q}, \mathbf{v})\mathbf{v} + \mathbf{C}(\mathbf{q}) - \mathbf{e}_1 u = 0 \quad (3.11)$$

$$\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad u \in \mathbb{R}$$

Για τον καλύτερο χειρισμό του διακριτοποιημένου συστήματος που θα προκύψει, χρησιμοποιείται ο αδιάστατος χρόνος  $\tau \in [0, 1]$ , που ορίζεται ως εξής

$$\tau = \frac{t - t_0}{t_f - t_0} = \frac{t - t_0}{\delta t} \quad (3.12)$$

$$d\tau = \frac{dt}{\delta t} \quad (3.13)$$

όπου  $t_0$  και  $t_f$ , ο αρχικός και ο τελικός χρόνος αντίστοιχα. Συμβολίζοντας με  $(\cdot)$ , μία μεταβλητή ως συνάρτηση του πραγματικού χρόνου  $t$  και με  $(\cdot)$ , τη μεταβλητή ως συνάρτηση του αδιάστατου χρόνου  $\tau$ , προκύπτει μέσω της αλυσιδωτής παρα-

γώγισης

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{v}}(\tau) &= \tilde{\mathbf{v}}(t) \\ \frac{d\bar{\mathbf{v}}(\tau)}{dt} &= \frac{d\tilde{\mathbf{v}}(t)}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \\ \dot{\bar{\mathbf{v}}}(\tau) &= \dot{\tilde{\mathbf{v}}}(t) \frac{1}{\delta t}\end{aligned}\quad (3.14)$$

Με αντικατάσταση της (3.14) στην (3.11) και διαχωρισμό του όρου των επιταχύνσεων  $\dot{\cdot}$  στην τελευταία, προκύπτει το σύστημα στο αδιαστατοποιημένο πεδίο του χρόνου

$$\bar{\mathbf{v}}(\tau) = \delta t \mathbf{A}(\bar{\mathbf{q}})^{-1} (-\mathbf{B}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{v}})\bar{\mathbf{v}} - \mathbf{C}(\bar{\mathbf{q}}) - \mathbf{e}_1 u) = \delta t h(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}, \tau) \quad (3.15)$$

όπου, από την (2.29),  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n+2}$ . Σημειώνεται εδώ, ότι το  $\mathbf{A}(\mathbf{q})$  είναι θετικά ορισμένο άρα και αντιστρέψιμο, ως μητρώο μάζας φυσικού συστήματος, αφού ισχύει  $T = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{A} \mathbf{q} > 0$ , με  $\mathbf{q} \neq 0$ , για την κινητική ενέργεια. Η προσεγγιστική λύση του (3.15) λαμβάνει τη μορφή

$$\mathbf{v}(\tau) = \sum_{i=0}^k \mathbf{v}_i \phi_i(\tau) = \mathbf{V} \phi(\tau) \quad (3.16)$$

όπου  $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_0 \ \mathbf{v}_1 \ \dots \ \mathbf{v}_k] \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (k+1)}$  και ως πολυώνυμα βάσης  $\phi(\tau)$  επιλέγονται τα πολυώνυμα Lagrange, βαθμού  $k$  και υπολογίζονται από τη σχέση

$$\phi_i(\tau) = \frac{\tau - \tau_0}{\tau_i - \tau_0} \dots \frac{\tau - \tau_{i-1}}{\tau_i - \tau_{i-1}} \frac{\tau - \tau_{i+1}}{\tau_i - \tau_{i+1}} \dots \frac{\tau - \tau_k}{\tau_i - \tau_k} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^k \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j} \quad (3.17)$$

έτσι ώστε  $\phi(\tau) = \begin{bmatrix} \phi_0(\tau) \\ \vdots \\ \phi_k(\tau) \end{bmatrix}$ . Η παράγωγος των πολυωνύμων (3.17) έχει τη μορφή

$$\dot{\phi}_i(\tau) = \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq i}}^k \frac{1}{\tau_i - \tau_p} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^k \frac{\tau - \tau_k}{\tau_i - \tau_j} \quad (3.18)$$

Τα πολυώνυμα Lagrange, όπως παρατηρείται και από την (3.17), εμφανίζουν την εξής ιδιότητα

$$\phi_i(\tau_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & , \quad i \neq j \\ 1 & , \quad i = j \end{cases} \quad (3.19)$$

όπου  $\delta_{ij}$  είναι το δέλτα του Kronecker. Η ιδιότητα αυτή είναι ιδιαίτερα σημαντική, αφού από τη μέθοδο απαιτείται η προσεγγιστική λύση να ικανοποιεί το σύστημα διαφορικών εξισώσεων (3.15), σε ορισμένα σημεία του  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Το σφάλμα (residual) της προσέγγισης ορίζεται ως

$$r(\tau) = \delta t h(\bar{x}, \bar{u}, \tau) - \mathbf{V}\dot{\phi}(\tau) \quad (3.20)$$

Το συνολικό σφάλμα κατά την προσέγγιση προκύπτει από την εκτίμηση του ολοκληρώματος

$$\int_0^1 w_j r(\tau) d\tau, \quad \text{για κάθε } j \in \{0, 1, \dots, k\} \quad (3.21)$$

όπου  $w_j$  οι συναρτήσεις στάθμισης (weighing functions). Στην περίπτωση της μέθοδου συντοπισμού, ισχύει  $w_j = \hat{\delta}(\tau - \tau_j)$ , με  $\hat{\delta}(\tau - \tau_j)$  να εκφράζει το μετατοπισμένο δέλτα του Dirac. Προκύπτει επομένως

$$\int_0^1 \hat{\delta}(\tau - \tau_j) r(\tau) d\tau = r(\tau_j) = \delta t h(\bar{v}(\tau_j), \bar{u}(\tau_j), \tau) - \mathbf{V}\dot{\phi}(\tau_j) = 0 \quad (3.22)$$

σύμφωνα με τον ορισμό (3.20) και την ιδιότητα (3.19). Τα σημεία στα οποία ισχύει η (3.22) ονομάζονται σημεία ταξιθεσίας (collocation points) και επιλέγονται ίσα με τις ρίζες των μετατοπισμένων (shifted) ορθογωνικών πολυωνύμων Legendre, βαθμού  $k$ , οι οποίες προκύπτουν από το ανάλογο της φόρμουλας του Rodrigues για το διάστημα  $[0, 1]$

$$P_k(x) = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dx^k} [(x^2 - x)^k] \quad (3.23)$$

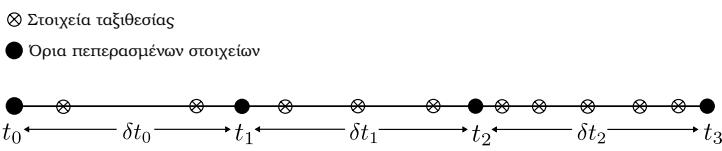
Η μέθοδος συντοπισμού είναι απλούστερη στην εφαρμογή, λόγω της ζητούμενης μορφής της προσέγγισης, (3.22), σε σχέση με την κύρια εναλλακτική της, μέθοδο Galerkin, όπου ζητείται το σφάλμα  $r(t)$  να είναι μηδενικό, καθιστώντας το ορθογώνιο σε ένα πλήρες σύνολο συναρτήσεων (complete set of functions). Ο υπολογισμός του αντίστοιχου ολοκληρώματος κατά τη μέθοδο Galerkin είναι μία πολυπλοκότερη διαδικασία και προσεγγίζει την πραγματική λύση με όχι σημαντικά μεγαλύτερη ακρίβεια από τη μέθοδο συντοπισμού, όπως εξετάζεται στο [7].

### 3.2.2 Διακριτοποίηση χρονικού ορίζοντα

Η εξίσωση (3.12) αποτέλεσε το μετασχηματισμό, από την πραγματική χρονική κλίμακα  $t$ , στον αδιάστατο χρόνο  $\tau$ . Ο χρονικός ορίζοντας διακριτοποιείται μέσω της επαναληπτικής εφαρμογής της (3.12) για συνεχόμενα χρονικά διαστήματα  $\delta t_i$ , για κάθε  $i \in \{1, 2, \dots, n_e\}$ , όπου  $n_e$ , ο αριθμός των πεπερασμένων διαστημάτων που προκύπτουν. Τα διαστήματα αυτά ονομάζονται και πεπερασμένα στοιχεία (finite elements), στα πλαίσια της μεθόδου ορθογώνιας ταξιθεσίας, και στο εσωτερικό τους προσεγγίζεται το πραγματικό σύστημα, σύμφωνα με τη μέθοδο

συντοπισμού της προηγούμενης ενότητας.

Ο αριθμός των διακριτών διαστημάτων, ο βαθμός των πολυωνύμων Lagrange  $k$  και ο αριθμός των σημείων ταξιθεσίας  $c_i \geq k$  στο εσωτερικό κάθε διαστήματος, το μέγεθος του διαστήματος  $\delta t_i$ , αποτελούν παραμέτρους της μεθόδου ορθογώνιας ταξιθεσίας σε πεπερασμένα στοιχεία. Παρατηρείται έτσι, μία σημαντική ιδιότητα της μεθόδου, κατά την οποία, εφόσον είναι γνωστή μία περιοχή του χώρου λύσεων, όπου εμφανίζονται ταχείς μεταβολές, μπορεί να επιλεχθεί το κατάλληλο διάστημα  $\delta t$  γύρω από την περιοχή, στο εσωτερικό του οποίου χρησιμοποιούνται πολυώνυμα υψηλότερου βαθμού, για μία ακριβέστερη προσέγγιση των εξισώσεων δυναμικής.



**Σχήμα 3.2:** Παράδειγμα διακριτοποίησης χρονικού ορίζοντα

Το 3.2 παρουσιάζει ένα παράδειγμα διακριτοποίησης σε 3 χρονικά διαστήματα, με διαφορετικό αριθμό σημείων ταξιθεσίας στο καθένα. Σε κάθε διάστημα ισχύει η διακριτοποιημένη μορφή της (3.15)

$$\dot{\bar{v}}_i(\tau) = \delta t h_i(\bar{x}_i, \bar{u}_i, \tau), \quad \tau \in [0, 1], \quad \text{για κάθε } i \in \{1, 2, \dots, n_e\} \quad (3.24)$$

στην οποία εφαρμόζεται η πολυωνυμική προσέγγιση με τον επιλεγμένο βαθμό  $k$ , στα εσωτερικά  $c_i$  σημεία του στοιχείου. Στα όρια κάθε στοιχείου ισχύει η εξίσωση συνέχειας

$$\bar{v}_i(0) = \bar{v}_{i-1}(1) \quad (3.25)$$

ώστε να μην προκύπτουν ασυνέχειες κατά τη διακριτοποίηση.

Αφού έχει προσδιοριστεί πλήρως η μορφή των προσεγγιστικών λύσεων σε κάθε χρονικό διάστημα, μένει να αποφασιστεί ο τρόπος προσομοίωσης των δράσεων ελέγχου. Σε πρακτικές εφαρμογές, όταν οι σταθερές χρόνου των ενεργοποιητών είναι κατά πολύ μικρότερες από τις σταθερές χρόνου του συστήματος, μπορεί να θεωρηθεί με ικανοποιητική ακρίβεια ότι οι δράσεις ελέγχου εφαρμόζονται ακαριαία. Σε αυτήν την περίπτωση, οι δράσεις ελέγχου λαμβάνονται σταθερές σε κάθε στοιχείο. Διαφορετικά, μπορεί να έχουν τη μορφή καμπυλών πρώτου ή μεγαλύτερων βαθμών, με ασυνέχειες ή χωρις, ανάμεσα στα στοιχεία. Στα πλαίσια της παρούσας μελέτης ενός θεωρητικού προβλήματος, οι δράσεις ελέγχου εκλέγονται σταθερές, όπως εμφανίζονται στο σχήμα 3.1, για την απλοποίηση των εξισώσεων.

### 3.2.3 Διακριτοποίηση αντικειμενικής συνάρτησης

Η αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος (3.10) διακριτοποιείται, σύμφωνα με τη διακριτοποίηση του χρονικού ορίζοντα που προηγήθηκε, ως εξής

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, u) &= \mathbf{x}(t_f)^T \mathbf{Q}_f \mathbf{x}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ u(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\mathbf{x}} & \mathbf{Q}_{\mathbf{x}u} \\ \mathbf{Q}_{\mathbf{x}u}^T & Q_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{x}(t_f)^T \mathbf{Q}_f \mathbf{x}(t_f) + \sum_{i=1}^{n_e} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ u(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\mathbf{x}} & \mathbf{Q}_{\mathbf{x}u} \\ \mathbf{Q}_{\mathbf{x}u}^T & Q_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{x}_{n_e}(1)^T \mathbf{Q}_f \mathbf{x}_{n_e}(1) + \sum_{i=1}^{n_e} \delta t_i \int_0^1 \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i(\tau) \\ \delta u_i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\mathbf{x}} & \mathbf{Q}_{\mathbf{x}u} \\ \mathbf{Q}_{\mathbf{x}u}^T & Q_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i(\tau) \\ \delta u_i \end{bmatrix} d\tau \quad (3.26) \end{aligned}$$

Εφαρμόζεται προσέγγιση ολόκληρου του διανύσματος κατάστασης με πολυώνυμα Lagrange

$$\mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} x_{i0} & x_{i1} & \dots & x_{ic_i} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_s \times (c_i+1)} \quad (3.27)$$

$$\phi_i(\tau) = \begin{bmatrix} \phi_{i0}(\tau) \\ \vdots \\ \phi_{ic_i}(\tau) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{c_i}, \quad \text{για κάθε } i \in \{1, \dots, n_e\} \quad (3.28)$$

$$\mathbf{x}_i(\tau) = \mathbf{X}_i \phi_i(\tau) \quad (3.29)$$

Έτσι, η (3.26) παίρνει τη μορφή

$$f(\mathbf{x}, u) = \mathbf{x}_{n_e}(1)^T \mathbf{Q}_f \mathbf{x}_{n_e}(1) + \sum_{i=1}^{n_e} \delta t_i \int_0^1 L_i(\mathbf{x}_i, \delta u_i) d\tau \quad (3.30)$$

$$L_i(\mathbf{x}_i, \delta u_i) = \phi_i(\tau)^T \mathbf{X}_i^T \mathbf{Q}_{\mathbf{x}} \mathbf{X}_i + \phi_i(\tau)^T \mathbf{X}^T \mathbf{Q}_{\mathbf{x}u} \delta u_i + \delta u_i \mathbf{Q}_{\mathbf{x}u}^T \mathbf{X} \phi_i(\tau) + Q_u \delta u_i^2 \quad (3.31)$$

Για την απλούστευση των υπολογισμών, χρησιμοποιείται ο εξής μετασχηματισμός Έστω μητρώο  $\mathbf{A} := \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , με  $a_i$  τα διανύσματα των στηλών του,

$$\text{και διάνυσμα } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} &= \mathbf{x}^T \left[ x_0 \mathbf{a}_0 + x_1 \mathbf{a}_1 + \dots + x_n \mathbf{a}_n \right] = x_0 \mathbf{x}^T \mathbf{a}_0 + x_1 \mathbf{x}^T \mathbf{a}_1 + \dots + x_n \mathbf{x}^T \mathbf{a}_n \\ &= \left[ x_0 \mathbf{x}^T \quad x_1 \mathbf{x}^T \quad \dots \quad x_n \mathbf{x}^T \right] \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \\ &= \text{vec}(\mathbf{x} \mathbf{x}^T)^T \text{vec}(\mathbf{A}) \quad (3.32) \end{aligned}$$

Οι (3.30) και (3.31), μέσω της προσέγγισης (3.29) και της εξίσωσης (3.32), λαμβάνουν τη μορφή

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, u) &= \phi_{n_e}(1)^T \mathbf{X}_{n_e}^T \mathbf{Q}_f \mathbf{X}_{n_e} \phi_{n_e}(1) + \sum_{i=1}^{n_e} \delta t_i \int_0^1 L_i(\mathbf{x}_i, \delta u_i) d\tau \\ &= \text{vec}(\phi_{n_e}(1) \phi_{n_e}(1)^T)^T \text{vec}(\mathbf{X}_{n_e}^T \mathbf{Q}_f \mathbf{X}_{n_e}) + \sum_{i=1}^{n_e} \delta t_i \int_0^1 L_i(\mathbf{x}_i, \delta u_i) d\tau \quad (3.33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_i(\mathbf{x}_i, \delta u_i) &= \phi_i(\tau)^T \mathbf{X}_i^T \mathbf{Q}_x \mathbf{X}_i \phi_i(\tau) + \delta u_i \phi_i(\tau)^T \mathbf{X}_i^T \mathbf{Q}_{xu} + \delta u_i \mathbf{Q}_{ux} \mathbf{X}_i \phi_i(\tau) + Q_u \delta u_i^2 \\ &= \text{vec}(\phi_i(\tau) \phi_i(\tau)^T)^T \text{vec}(\mathbf{X}_i \mathbf{Q}_x \mathbf{X}_i) + \delta u_i \phi_i(\tau)^T \mathbf{X}_i \mathbf{Q}_{xu} + \delta u_i \mathbf{Q}_{xu}^T \mathbf{X}_i \phi_i(\tau) + Q_u \delta u_i^2 \quad (3.34) \end{aligned}$$

Τέλος, με αντικατάσταση της (3.34) στην (3.33), προκύπτει η διακριτοποιημένη αντικειμενική συνάρτηση κατά τη μέθοδο συντοπισμού

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \delta \mathbf{u}) &= \zeta^T \text{vec}(\mathbf{X}_{n_e}^T \mathbf{Q}_f \mathbf{X}_{n_e}) + \sum_{i=1}^{n_e} \delta t_i \left[ \psi_i^T \text{vec}(\mathbf{X}_i \mathbf{Q}_x \mathbf{X}_i) + \gamma_i^T \delta u_i \mathbf{X}_i^T \mathbf{Q}_{xu} + \delta u_i \mathbf{Q}_{xu}^T \mathbf{X}_i \gamma_i + Q_u \delta u_i^2 \right] \\ &= \zeta^T \text{vec}(\mathbf{X}_{n_e}^T \mathbf{Q}_f \mathbf{X}_{n_e}) + \sum_{i=1}^{n_e} \delta t_i \left[ \psi_i^T \text{vec}(\mathbf{X}_i \mathbf{Q}_x \mathbf{X}_i) + 2 \delta u_i \mathbf{Q}_{ux} \mathbf{X}_i \gamma_i + Q_u \delta u_i^2 \right] \quad (3.35) \end{aligned}$$

$$\zeta = \text{vec}(\phi_{n_e}(1) \phi_{n_e}(1)^T) = \text{vec} \begin{bmatrix} \phi_0(1)^2 & \phi_0(1)\phi_1(1) & \dots & \phi_0(1)\phi_{c_{n_e}}(1) \\ \phi_0(1)\phi_1(1) & \phi_1(1)^2 & \dots & \phi_1(1)\phi_{c_{n_e}}(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{c_{n_e}}(1)\phi_0(1) & \phi_{c_{n_e}}(1)\phi_1(1) & \dots & \phi_{c_{n_e}}(1)^2 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

$$\psi_i = \int_0^1 \text{vec}(\phi_i(\tau) \phi_i(\tau)^T) d\tau = \text{vec} \begin{bmatrix} \int_0^1 \phi_{i0}^2 d\tau & \int_0^1 \phi_{i0}\phi_{i1} d\tau & \dots & \int_0^1 \phi_{i0}\phi_{ic_i} d\tau \\ \int_0^1 \phi_{i0}\phi_{i1} d\tau & \int_0^1 \phi_{i1}^2 d\tau & \dots & \int_0^1 \phi_{i1}\phi_{ic_i} d\tau \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^1 \phi_{ic_i}\phi_{i0} d\tau & \int_0^1 \phi_{ic_i}\phi_{i1} d\tau & \dots & \int_0^1 \phi_{ic_i}^2 d\tau \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

$$\gamma_i = \int_0^1 \phi_i(\tau) d\tau = \begin{bmatrix} \int_0^1 \phi_{i0}(\tau) d\tau \\ \int_0^1 \phi_{i1}(\tau) d\tau \\ \vdots \\ \int_0^1 \phi_{ic_i}(\tau) d\tau \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

### 3.3 Διαμόρφωση προβλήματος μη-γραμμικού προγραμματισμού

Οι διαφορικές εξισώσεις που αποτελούν τους περιορισμούς του προβλήματος βέλτιστου ελέγχου, όπως παρουσιάστηκαν στο (3.10), προσεγγίζονται, μέσω της μεθόδου συντοπισμού με πολυώνυμα Lagrange, με ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων. Ο μετασχηματισμός των περιορισμών από σύστημα διαφορικών σε σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων οδηγεί στη μετατροπή του προβλήματος ελέγχου σε στατικό πρόβλημα μη-γραμμικού προγραμματισμού. Οι περιορισμοί του τελευταίου εφαρμόζονται ταυτόχρονα για κάθε πεπερασμένο στοιχείο του διακριτοποιημένου ορίζοντα πρόρρησης. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται σε κάθε διάστημα δειγματοληψίας του συστήματος κλειστού βρόχου, μετατοπίζοντας τον ορίζοντα πρόρρησης κατά ένα βήμα, όπως περιγράφηκε στην εισαγωγή του κεφαλαίου. Η αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος είναι πλέον η (3.35).

Οι αλγεβρικές εξισώσεις περιορισμών είναι ανεξάρτητες μεταξύ των στοιχείων, με μόνο σημείο σύνδεσης τη συνθήκη συνέχειας (3.25) στα όρια τους. Δημιουργούνται έτσι ευνοϊκές, για τους αλγορίθμους επίλυσης, μορφές αραιού Ιακωβιανού και Εσσιανού μητρώου του προβλήματος, όπως θα φανεί στη συνέχεια.

Οι αλγόριθμοι επίλυσης προβλημάτων μη-γραμμικού προγραμματισμού του MINOS και IPOPT, που χρησιμοποιήθηκαν, χειρίζονται το πρόβλημα με τη μορφή της συνάρτησης Lagrange. Επομένως, είναι δόκιμο να χρησιμοποιηθεί η ίδια μορφή κατά την ανάλυση του προβλήματος στη συνέχεια, ώστε να είναι περισσότερο ξεκάθαρη η εφαρμογή των μεθόδων των δύο αλγορίθμων.

#### 3.3.1 Ορισμός της συνάρτησης Lagrange

Η συνάρτηση Lagrange ενός προβλήματος βελτιστοποίησης

$$\begin{aligned} \underset{\boldsymbol{u}}{\text{minimize}} \quad & f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \mathbf{0} \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m \\ & g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{3.39}$$

έχει τη μορφή  $\Lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ , όπου  $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_n]^T$  είναι το διάνυσμα των πολλαπλασιαστών Lagrange (Lagrange multipliers). Το ισοδύναμο πρόβλημα αφορά την επίλυση του συστήματος

$$\nabla_{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}} \Lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0} \tag{3.40}$$

Στην παρούσα εφαρμογή, η αντίστοιχη της  $f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ , αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος θα είναι η (3.35), ενώ το διάνυσμα των περιορισμών  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  θα αποτελείται από το διακριτοποιημένο μοντέλο μεταβλητών κατάστασης σε κάθε σημείο ταξιθεσίας, όπως αυτό αναλύεται παρακάτω.

Με την εφαρμογή της πολυωνυμικής προσέγγισης (3.16) στην (3.15), προκύπτουν οι περιορισμοί του προβλήματος, που αφορούν τη δυναμική του συστήματος  $\mathbf{g}_{nij}$  για το σημείο ταξιθεσίας  $j$  του πεπερασμένου στοιχείου  $i$

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_{nij} &= \frac{1}{\delta t_i} \mathbf{A}(\mathbf{q}_{ij}) \mathbf{V}_i \dot{\phi}_i(\tau) + \mathbf{B}(\mathbf{x}_{ij}) \mathbf{V}_i \phi_i(\tau) + \mathbf{C}(\mathbf{q}_{ij}) - e_1 u_i \\ \text{συνεπάγεται ότι } \mathbf{g}_{nij} &= \frac{1}{\delta t_i} \mathbf{A}(\mathbf{q}_{ij}) \mathbf{V}_i \dot{\phi}_i(\tau) + \mathbf{B}(\mathbf{x}_{ij}) \mathbf{v}_{ij} + \mathbf{C}(\mathbf{q}_{ij}) - e_1 u_i\end{aligned}\quad (3.41)$$

Στο εξής, θεωρείται πως όλες οι μεταβλητές κατάστασης και οι παράγωγοί τους είναι συνάρτηση του αδιάστατου χρόνου  $\tau$ , επομένως δεν χρησιμοποιείται κάποιος συμβολισμός για το διαχωρισμό από την εξάρτηση από τον πραγματικό χρόνο  $t$ . Η μεταβλητή  $x(\tau_{ij}) = x_{ij}$  αντιπροσωπεύει την τιμή του διανύσματος κατάστασης στο σημείο ταξιθεσίας  $j$  του στοιχείου  $i$ . Καθ'όλη την ανάλυση, θα ισχύει για τους δείκτες  $i, j$

$$\begin{aligned}i &\in \{1, 2, \dots, n_e\} \\ j &\in \{1, 2, \dots, c_i\}\end{aligned}$$

εκτός αν διευκρινιστεί διαφορετικά.

Οι κινηματικοί περιορισμοί που επιβάλλονται από την γενική επίπεδη κίνηση του συστήματος παίρνουν την μορφή των παρακάτω γραμμικών περιορισμών  $\mathbf{g}_{lij}$

$$\frac{1}{\delta t_i} \dot{\mathbf{q}}_i(\tau) = \mathbf{u}_i(\tau) = \mathbf{V}_i \phi_i(\tau) \text{ ισοδύναμα } \mathbf{q}_i(\tau) = \mathbf{q}_i(0) + \delta t_i \mathbf{V}_i \int_0^\tau \phi_i(\tau) d\tau \quad (3.42)$$

$$\mathbf{g}_{lij} = \mathbf{q}_{ij} - \mathbf{q}_{i0} - \delta t_i \mathbf{V}_i \alpha_{ij} \quad (3.43)$$

$$\text{όπου } \alpha_{ij} = \int_0^{\tau_{ij}} \phi_i(\tau) d\tau = \begin{bmatrix} \int_0^{\tau_{ij}} \phi_{i0}(\tau) d\tau \\ \vdots \\ \int_0^{\tau_{ij}} \phi_{ic_i}(\tau) d\tau \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

στους οποίους συμπεριλαμβάνονται και οι περιορισμοί συνέχειας ανάμεσα σε δύο διαδοχικά στοιχεία  $g_{ci}$

$$\mathbf{v}_{i+1}(0) = \mathbf{v}_i(1) = \mathbf{V}_i \phi_i(1) \quad (3.45)$$

$$\mathbf{q}_{i+1}(0) = \mathbf{q}_i(1) = \mathbf{q}_i(0) + \delta t_i \mathbf{V}_i \gamma_i \quad (3.46)$$

$$g_{ci} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{i+1}(0) - \mathbf{V}_i \phi_i(1) \\ \mathbf{q}_{i+1}(0) - \mathbf{q}_i(0) - \delta t_i \mathbf{V}_i \gamma_i \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

$$\text{υπενθυμίζεται ότι } \gamma_i = \begin{bmatrix} \int_0^1 \phi_{i0}(\tau) d\tau \\ \int_0^1 \phi_{i1}(\tau) d\tau \\ \vdots \\ \int_0^1 \phi_{ic_i}(\tau) d\tau \end{bmatrix}$$

Ετσι, σχηματίζεται το γενικό διάνυσμα περιορισμών κάθε πεπερασμένου στοιχείου, το οποίο, για το πρώτο πεπερασμένο στοιχείο λαμβάνει τη μορφή

$$\mathbf{g}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_{20}, u_1) = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{n11} \\ \mathbf{g}_{n12} \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{n1c_1} \\ \mathbf{g}_{l10} \\ \mathbf{g}_{l11} \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{l1c_1} \\ \mathbf{g}_{c1} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

$$\mathbf{g}_1 : \mathbb{R}^{n_s(c_1+2)} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_s(c_1+2)} \quad (3.49)$$

όπου  $\mathbf{g}_{l10} = \mathbf{p}_0 - \mathbf{x}_{10}$ , ο περιορισμός αρχικών συνθηκών, με το διάνυσμα  $\mathbf{p}_0$  να εκφράζει τις αρχικές συνθήκες ταχύτητας και θέσης των εκκρεμών και του αμάξώματος στο πρόβλημα ελέγχου. Το διάνυσμα περιορισμών για όλα τα υπόλοιπα στοιχεία, εκτός του τελευταίου θα είναι,

$$\mathbf{g}_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{(i+1)0}, u_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{ni1} \\ \mathbf{g}_{ni2} \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{nic_i} \\ \mathbf{g}_{li1} \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{lic_i} \\ \mathbf{g}_{ci} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

$$\mathbf{g}_i : \mathbb{R}^{n_s(c_i+2)} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_s(c_i+1)} \quad (3.51)$$

ενώ για το τελευταίο στοιχείο θα ισχύει

$$\mathbf{g}_{n_e}(\mathbf{x}_{n_e}, u_{n_e}) = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{nn_e0} \\ \mathbf{g}_{nn_e1} \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{nn_ec_i} \\ \mathbf{g}_{ln_e1} \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{ln_ec_i} \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

$$\mathbf{g}_{n_e} : \mathbb{R}^{n_s(c_{n_e}+1)} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_s c_{n_e}} \quad (3.53)$$

καθώς δεν υπάρχει επόμενο στοιχείο, ώστε να εφαρμοσθούν οι συνθήκες συνέχειας. Σημειώνεται εδώ πως κάθε στοιχείο αποτελείται από  $(c_i + 1)$  σημεία ταξιθεσίας, όπου το πρώτο σημείο  $x_{i0}$  συμβολίζει το διάνυσμα κατάστασης, όπως αυτό προκύπτει από τις συνθήκες συνέχειας ή από τις αρχικές συνθήκες  $p_0$ , στην περίπτωση του πρώτου στοιχείου. Αφού προσδιορίσθηκαν πλήρως η αντικειμενική συνάρτηση και οι περιορισμοί, σύμφωνα με τη μέθοδο συντοπισμού, ορίζεται η συνάρτηση Lagrange του προβλήματος μη-γραμμικού προγραμματισμού ως

$$\Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}, \delta \mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (3.54)$$

$$\text{όπου } \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1(\mathbf{x}_1, u_1) \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{n_e}(\mathbf{x}_{n_e}, u_{n_e}) \end{bmatrix}, \quad g : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_e} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x} \quad (3.55)$$

$$n_x = n_s \sum_{i=1}^{n_e} (c_i + 1) \quad (3.56)$$

$$\text{και } \boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n_x} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_x} \quad (3.57)$$

### 3.3.2 Κλίση της συνάρτησης Lagrange

Οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης Lagrange, ως προς τις μεταβλητές κατάστασης  $\mathbf{x}$  και τις δράσεις ελέγχου -βαθμούς ελευθερίας του προβλήματος βελτιστοποίησης  $\mathbf{u}$ , αποτελούν το βασικότερο στοιχείο για τον υπολογισμό ελαχίστων της συνάρτησης. Η υπολογισμένη κλίση χρησιμοποιείται και από τους δύο επιλυτές προς εξέταση, κυρίως κατά την εφαρμογή μεθόδων της κατηγορίας των Newton-Raphson, όπως αυτές περιγράφονται στο [19].

Ορίζεται αρχικά το διευρυμένο διάνυσμα κατάστασης του συστήματος

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{n_e} \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n_e} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_x + n_e} \quad (3.58)$$

$$\text{όπου } \mathbf{x}_i = \text{vec}(\mathbf{X}_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{i0} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{ic_i} \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

Προκύπτει έτσι η κλίση της (3.54) στη μορφή

$$\frac{\partial \Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial f(\mathbf{x}, \delta \mathbf{u})}{\partial \mathbf{X}} + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{X}} \quad (3.60)$$

Ο υπολογισμός της κλίσης ανάγεται στον υπολογισμό της κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης και των περιορισμών, όπως φαίνεται στην (3.60). Η κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης προσδιορίζεται με βάση την εξίσωσή της, (3.35), σταδιακά για κάθε πεπερασμένο στοιχείο, ως εξής

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}, \delta \mathbf{u})}{\partial \mathbf{X}} = \left[ \frac{\partial f(\mathbf{x}, \delta \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}_1} \quad \dots \quad \frac{\partial f(\mathbf{x}, \delta \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}_{n_e}} \quad \frac{\partial f(\mathbf{x}, \delta \mathbf{u})}{\partial u_1} \quad \dots \quad \frac{\partial f(\mathbf{x}, \delta \mathbf{u})}{\partial u_{n_e}} \right] \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{x}, \delta \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}_i} &= \frac{\partial \delta t_i \psi_i^T(\tau) \text{vec}(\mathbf{X}_i^T \mathbf{Q}_x \mathbf{X}_i)}{\partial \mathbf{x}_i} + \frac{\partial 2\delta u_i \mathbf{Q}_{ux} \mathbf{X}_i \gamma_i(\tau)}{\partial \mathbf{x}_i} \\ &= \delta t_i \psi_i^T(\tau) \frac{\partial \text{vec}(\mathbf{X}_i^T \mathbf{Q}_x \mathbf{X}_i)}{\partial \mathbf{x}_i} + 2\delta u_i \mathbf{Q}_{ux} \frac{\partial \mathbf{X}_i \gamma_i(\tau)}{\partial \mathbf{x}_i} \end{aligned} \quad (3.62)$$

για κάθε στοιχείο εκτός του τελευταίου. Η παραγώγιση του πρώτου όρου της (3.62) αναλύεται ως εξής

$$\mathbf{X}_i^T \mathbf{Q}_x \mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{i0}^T \\ \mathbf{x}_{i1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{ic_i}^T \end{bmatrix} \mathbf{Q}_x \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{i0} & \mathbf{x}_{i1} & \dots & \mathbf{x}_{ic_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{i0}^T \mathbf{Q}_x \\ \mathbf{x}_{i1}^T \mathbf{Q}_x \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{ic_i}^T \mathbf{Q}_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{i0} & \mathbf{x}_{i1} & \dots & \mathbf{x}_{ic_i} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_i^T \mathbf{Q}_{\mathbf{x}} \mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i0}^T \mathbf{Q}_{\mathbf{x}} \\ x_{i1}^T \mathbf{Q}_{\mathbf{x}} \\ \vdots \\ x_{ic_i}^T \mathbf{Q}_{\mathbf{x}} \end{bmatrix} x_{i0} & \dots & \begin{bmatrix} x_{i0}^T \mathbf{Q}_{\mathbf{x}} \\ x_{i1}^T \mathbf{Q}_{\mathbf{x}} \\ \vdots \\ x_{ic_i}^T \mathbf{Q}_{\mathbf{x}} \end{bmatrix} x_{ic_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{X}_i) x_{i0} & \dots & \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{X}_i) x_{ic_i} \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

$$\text{vec}(\mathbf{X}_i^T \mathbf{Q}_{\mathbf{x}} \mathbf{X}_i) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{X}_i) x_{i0} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{X}_i) x_{ic_i} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{A}}(\mathbf{X}_i) \quad (3.64)$$

$$\frac{\partial \text{vec}(\mathbf{X}_i^T \mathbf{Q}_{\mathbf{x}} \mathbf{X}_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{\mathbf{A}}(\mathbf{X}_i)}{\partial x_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\mathbf{A}}x_{i0}}{\partial x_{i0}} & \dots & \frac{\partial \hat{\mathbf{A}}x_{i0}}{\partial x_{ic_i}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \hat{\mathbf{A}}x_{ic_i}}{\partial x_{i0}} & \dots & \frac{\partial \hat{\mathbf{A}}x_{ic_i}}{\partial x_{ic_i}} \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

Η ανάλυση των παραγώγων των δύο πρώτων όρων του μητρώου (3.65) αρκεί για την εξαγωγή της γενικής μορφής του.

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{A}}x_{i0}}{\partial x_{i0}} = \begin{bmatrix} \frac{x_{i0}^T \mathbf{Q}_{\mathbf{x}} x_{i0}}{\partial x_{i0}} \\ \frac{x_{i1}^T \mathbf{Q}_{\mathbf{x}} x_{i0}}{\partial x_{i0}} \\ \vdots \\ \frac{x_{ic_i}^T \mathbf{Q}_{\mathbf{x}} x_{i0}}{\partial x_{i0}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_{i0}^T \mathbf{Q}_{\mathbf{x}} \\ x_{i1}^T \mathbf{Q}_{\mathbf{x}} \\ \vdots \\ x_{ic_i}^T \mathbf{Q}_{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{A}}x_{i0}}{\partial x_{i1}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times n_s} \\ x_{i0}^T \mathbf{Q}_{\mathbf{x}} \\ \mathbf{0}_{1 \times n_s} \\ \vdots \\ \mathbf{0}_{1 \times n_s} \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{A}}(\mathbf{X}_i)}{\partial x_i} = \mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x_{i0}^T \mathbf{Q}_{\mathbf{x}} \\ x_{i1}^T \mathbf{Q}_{\mathbf{x}} \\ \vdots \\ x_{ic_i}^T \mathbf{Q}_{\mathbf{x}} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times n_s} \\ x_{i0}^T \mathbf{Q}_{\mathbf{x}} \\ \mathbf{0}_{1 \times n_s} \\ \vdots \\ \mathbf{0}_{1 \times n_s} \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times n_s} \\ \mathbf{0}_{1 \times n_s} \\ \mathbf{0}_{1 \times n_s} \\ \vdots \\ x_{i0}^T \mathbf{Q}_{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_{i1}^T \mathbf{Q}_{\mathbf{x}} \\ \mathbf{0}_{1 \times n_s} \\ \mathbf{0}_{1 \times n_s} \\ \vdots \\ \mathbf{0}_{1 \times n_s} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x_{i0}^T \mathbf{Q}_{\mathbf{x}} \\ 2x_{i1}^T \mathbf{Q}_{\mathbf{x}} \\ \vdots \\ x_{ic_i}^T \mathbf{Q}_{\mathbf{x}} \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times n_s} \\ \mathbf{0}_{1 \times n_s} \\ \mathbf{0}_{1 \times n_s} \\ \vdots \\ x_{i1}^T \mathbf{Q}_{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{bmatrix} x_{ic_i}^T \mathbf{Q}_{\mathbf{x}} \\ \mathbf{0}_{1 \times n_s} \\ \mathbf{0}_{1 \times n_s} \\ \vdots \\ \mathbf{0}_{1 \times n_s} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times n_s} \\ x_{ic_i}^T \mathbf{Q}_{\mathbf{x}} \\ \mathbf{0}_{1 \times n_s} \\ \vdots \\ \mathbf{0}_{1 \times n_s} \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} x_{i0}^T \mathbf{Q}_{\mathbf{x}} \\ x_{i1}^T \mathbf{Q}_{\mathbf{x}} \\ \vdots \\ 2x_{ic_i}^T \mathbf{Q}_{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

Ο δεύτερος όρος της (3.62) υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned} 2\delta u_i \mathbf{Q}_{ux} \frac{\partial \mathbf{X}_i \gamma_i}{\partial x_i} &= 2\delta u_i \mathbf{Q}_{ux} \frac{\partial (x_{i0} \gamma_{i0} + x_{i1} \gamma_{i1} + \dots + x_{ic_i} \gamma_{ic_i})}{\partial x_i} \\ &= 2\delta u_i \mathbf{Q}_{ux} \left[ \frac{\partial (x_{i0} \gamma_{i0} + x_{i1} \gamma_{i1} + \dots + x_{ic_i} \gamma_{ic_i})}{\partial x_{i0}} \quad \dots \quad \frac{\partial (x_{i0} \gamma_{i0} + x_{i1} \gamma_{i1} + \dots + x_{ic_i} \gamma_{ic_i})}{\partial x_{ic_i}} \right] \\ &= 2\delta u_i \mathbf{Q}_{ux} \begin{bmatrix} \gamma_{i0} \mathbf{I}_{n_s} & \gamma_{i1} \mathbf{I}_{n_s} & \dots & \gamma_{ic_i} \mathbf{I}_{n_s} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.69)$$

Η (3.62) θα αποκτήσει τελικά τη μορφή

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}, \delta \mathbf{u})}{\partial x_i} = \delta t_i (\psi_i^T \mathbf{P}_i + 2\delta u_i \mathbf{Q}_{ux} \begin{bmatrix} \gamma_{i0} \mathbf{I}_{n_s} & \gamma_{i1} \mathbf{I}_{n_s} & \dots & \gamma_{ic_i} \mathbf{I}_{n_s} \end{bmatrix}) \quad (3.70)$$

ενώ για το τελευταίο στοιχείο ισχύει

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}, \delta \mathbf{u})}{\partial x_{n_e}} = \zeta^T \mathbf{P}_{n_e} + \delta t_{n_e} (\psi_{n_e}^T \mathbf{P}_{n_e} + 2\delta u_{n_e} \mathbf{Q}_{ux} \begin{bmatrix} \gamma_{n_e 0} \mathbf{I}_{n_s} & \gamma_{n_e 1} \mathbf{I}_{n_s} & \dots & \gamma_{n_e c_{n_e}} \mathbf{I}_{n_s} \end{bmatrix}) \quad (3.71)$$

Κάθε δράση ελέγχου  $u_i$  εμφανίζεται σε δύο όρους του αθροίσματος της (3.35), στις διαφορές  $\delta u_i = u_i - u_{i-1}$  και  $\delta u_{i+1} = u_{i+1} - u_i$ . Η παράγωγος της  $f$  ως προς την κάθε δράση, θα είναι

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}, \delta \mathbf{u})}{\partial u_i} = 2\delta t_i \frac{\partial \delta u_i \mathbf{Q}_{ux} \mathbf{X}_i \gamma_i}{\partial u_i} + 2\delta t_{i+1} \frac{\partial \delta u_{i+1} \mathbf{Q}_{ux} \mathbf{X}_{i+1} \gamma_{i+1}}{\partial u_i} + \delta t_i \frac{\partial Q_u \delta u_i^2}{\partial u_i} + \delta t_{i+1} \frac{\partial Q_u \delta u_{i+1}^2}{\partial u_i} \quad (3.72)$$

$$2 \frac{\partial \delta u_i \mathbf{Q}_{ux} \mathbf{X}_i \gamma_i}{\partial u_i} = 2 \frac{\partial \mathbf{Q}_{ux} \mathbf{X}_i \gamma_i (u_i - u_{i-1})}{\partial u_i} = 2 \mathbf{Q}_{ux} \mathbf{X}_i \gamma_i \quad (3.73)$$

$$2 \frac{\partial \delta u_{i+1} \mathbf{Q}_{ux} \mathbf{X}_{i+1} \gamma_{i+1}}{\partial u_i} = 2 \frac{\partial \mathbf{Q}_{ux} \mathbf{X}_{i+1} \gamma_{i+1} (u_{i+1} - u_i)}{\partial u_i} = 2 \mathbf{Q}_{ux} \mathbf{X}_{i+1} \gamma_{i+1} \quad (3.74)$$

$$\frac{\partial Q_u \delta u_i^2}{\partial u_i} = 2 \delta u_i Q_u \quad (3.75)$$

$$\frac{\partial Q_u \delta u_{i+1}^2}{\partial u_i} = -2 \delta u_{i+1} Q_u \quad (3.76)$$

Επομένως, η (3.72) θα γίνει

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}, \delta \mathbf{u})}{\partial u_i} = 2 \delta t_i (\mathbf{Q}_{ux} \mathbf{X}_i \gamma_i + \delta u_i Q_u) - 2 \delta t_{i+1} (\mathbf{Q}_{ux} \mathbf{X}_{i+1} \gamma_{i+1} + \delta u_{i+1} Q_u) \quad (3.77)$$

Στη διαφορά  $\delta u_1 = u_1 - u_0$  εμφανίζεται η δράση  $u_0$ , για την οποία αρχικά δεν υπάρχει κάποια πρακτική ερμηνεία, αφού οι δράσεις προς εφαρμογή από τον ελεγκτή είναι οι  $u_1, u_2, \dots, u_{n_e}$  σε κάθε περίοδο δειγματοληψίας. Για τον υπολογισμό αρχικών συνθηκών σύμφωνων (*consistent*) με το σύστημα διαφορικών εξισώσεων (2.30), εφαρμόζεται αρχικά μία αρχική δράση  $u_{in}$  από τον ελεγκτή ενώ το σύστημα βρίσκεται σε ηρεμία (τετριμένη λύση) και λύνεται το πρόβλημα μέσω του αλγορίθμου DASSL για ένα μικρό χρονικό διάστημα. Σύμφωνες με ένα σύστημα  $G(\dot{\mathbf{y}}, \mathbf{y}, t) = 0$  ονομάζονται οι αρχικές συνθήκες  $\dot{\mathbf{y}}_0, \mathbf{y}_0, t_0$  για τις οποίες ισχύει  $G(\dot{\mathbf{y}}_0, \mathbf{y}_0, t_0) = 0$ . Το τελικό διάνυσμα κατάστασης που προκύπτει, χρησιμοποιείται ως αρχική συνθήκη στο πρόβλημα ελέγχου, ενώ ισχύει  $u_{in} = u_0$ . Η παραπάνω διαδικασία υπολογισμού αρχικών συνθηκών σύμφωνων με το σύστημα, αυτοματοποιεί την παραμετρική μελέτη, ως προς το  $n$ . Επιπλέον, οι αρχικές συνθήκες θα ικανοποιούν τους αλγεβρικούς περιορισμούς του προβλήματος μη-γραμμικού προγραμματισμού με ικανοποιητική ακρίβεια, λόγω της αντίστοιχης ακρίβειας επίλυσης στο DASSL.

Αφού προσδιορίστηκε η κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης, μένει να υπολογιστεί η κλίση των περιορισμών, ξεκινώντας από τους μη-γραμμικούς κάθε στοιχείου

$$\mathbf{G}_i = \frac{\partial g_{ni}(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_{ni1}}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_{nic_i}}{\partial x_i} \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

$$\frac{\partial g_{nij}}{\partial \mathbf{x}_i} = \frac{1}{\delta t_i} \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{q}_{ij}) \mathbf{V}_i \phi_i(\tau)}{\partial \mathbf{x}_i} + \frac{\partial \mathbf{B}(x_{ij}) v_{ij}}{\partial \mathbf{x}_i} + \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{q}_{ij})}{\partial \mathbf{x}_i} - e_1 u_i \quad (3.79)$$

Γίνεται ανάλυση της κλίσης όρο προς όρο, όπως έγινε και για την αντικειμενική

συνάρτηση

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}(\mathbf{q}_{ij})\mathbf{V}_i\dot{\phi}_i(\tau) &= A(\mathbf{q}_{ij}) \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{i0} & \mathbf{v}_{i1} & \dots & \mathbf{v}_{ic_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_0(\tau_{ij}) \\ \dot{\phi}_1(\tau_{ij}) \\ \vdots \\ \dot{\phi}_{c_i}(\tau_{ij}) \end{bmatrix} \\
 &= A(\mathbf{q}_{ij})[\dot{\phi}_0(\tau_{ij})\mathbf{v}_{i0} + \dot{\phi}_1(\tau_{ij})\mathbf{v}_{i1} + \dots + \dot{\phi}_{c_i}(\tau_{ij})\mathbf{x}_{ic_i}] \\
 &= \dot{\phi}_0(\tau_{ij})\mathbf{A}(\mathbf{q}_{ij})\mathbf{v}_{i0} + \dot{\phi}_1(\tau_{ij})\mathbf{A}(\mathbf{q}_{ij})\mathbf{v}_{i1} + \dots + \dot{\phi}_{c_i}(\tau_{ij})\mathbf{A}(\mathbf{q}_{ij})\mathbf{v}_{ic_i} \quad (3.80)
 \end{aligned}$$

Στα μητρώα που ακολουθούν χρησιμοποιούνται οι συντομογραφίες  $c_i = \cos \theta_i$ ,  $s_i = \sin \theta_i$ ,  $c_{ij} = \cos(\theta_i - \theta_j)$ ,  $s_{ij} = \sin(\theta_i - \theta_j)$  και παραλείπονται οι δείκτες  $i, j$  στις μεταβλητές κατάστασης, εννοώντας ότι αυτές αναφέρονται στο σημείο συντοπισμού, οι εξισώσεις του οποίου περιγράφονται από το εκάστοτε μητρώο. Σε περιπτώσεις όπου συνυπάρχουν σε εξισώσεις οι ίδιες μεταβλητές κατάστασης σε διαφορετικά σημεία συντοπισμού, ο διαχωρισμός θα γίνεται με την εισαγωγή ενός δεύτερου δείκτη.

$$\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{q}_{ij})\mathbf{V}_i\dot{\phi}_i(\tau)}{\partial x_{iw}} = \begin{cases} \sum_{h=0}^{c_i} \dot{\phi}_h(\tau_{ij}) \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{q}_{ij})\mathbf{v}_{ih}}{\partial x_{iw}}, & \text{αν } w = j \\ \dot{\phi}_w(\tau_{ij}) \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{q}_{ij})\mathbf{v}_{iw}}{\partial x_{iw}}, & \text{αν } w \neq j \end{cases} \quad (3.81)$$

$$\text{όπου } \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{q}_{ij})\mathbf{v}_{iw}}{\partial x_{iw}} = \begin{cases} \left[ \mathbf{A}(\mathbf{q}_{ij}) \quad \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{q}_{ij})\mathbf{v}_{iw}}{\partial q_{iw}} \right], & \text{αν } w = j \\ \left[ \mathbf{A}(\mathbf{q}_{ij}) \quad \mathbf{0}_{n+1} \right], & \text{αν } w \neq j \end{cases} \quad (3.82)$$

$$\text{και } \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{q}_{ij})\mathbf{v}_{iw}}{\partial q_{ij}} = \begin{bmatrix} 0 & -M_1 l_1 \dot{\theta}_{1w} s_1 & -M_2 l_2 \dot{\theta}_{2w} s_2 & \dots & -M_n l_n \dot{\theta}_{nw} s_n \\ 0 & k_{1w} & M_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_{2w} s_{12} & \dots & M_n l_1 l_n \dot{\theta}_{nw} s_{1n} \\ 0 & M_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_{1w} s_{21} & k_{2w} & \dots & M_n l_n l_2 \dot{\theta}_{nw} s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & M_n l_1 l_n \dot{\theta}_{1w} s_{n1} & M_n l_2 l_n \dot{\theta}_{2w} s_{n2} & \dots & k_{nw} \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

$$\text{με } k_i = -M_i l_i \dot{x}_c s_i - \sum_{j=1}^n M_{max(i,j)} l_i l_j \dot{\theta}_{jw} s_{ij} \quad (3.84)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}(x_{ij})v_{ij}}{\partial x_{ij}} = \left[ \frac{\partial \mathbf{B}(x_{ij})v_{ij}}{\partial v_{ij}} \quad \frac{\partial \mathbf{B}(x_{ij})v_{ij}}{\partial q_{ij}} \right] \quad (3.85)$$

$$\text{όπου } \frac{\partial \mathbf{B}(x_{ij})v_{ij}}{\partial v_{ij}} = \begin{bmatrix} b & -2M_1l_1\dot{\theta}_1s_1 & -2M_2l_2\dot{\theta}_2s_2 & \dots & -2M_nl_n\dot{\theta}_ns_n \\ 0 & 0 & 2M_2l_1l_2\dot{\theta}_2s_{12} & \dots & 2M_nl_1l_n\dot{\theta}_ns_{1n} \\ 0 & 2M_2l_1l_2\dot{\theta}_1s_{21} & 0 & \dots & 2M_nl_nl_2\dot{\theta}_ns_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 2M_nl_1l_n\dot{\theta}_1s_{n1} & 2M_nl_2l_n\dot{\theta}_2s_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

$$\text{και } \frac{\partial \mathbf{B}(x_{ij})v_{ij}}{\partial q_{ij}} = \begin{bmatrix} 0 & -M_1l_1\dot{\theta}_1^2c_1 & -M_2l_2\dot{\theta}_2^2c_2 & \dots & -M_nl_n\dot{\theta}_n^2c_n \\ 0 & p_1 & -M_2l_1l_2\dot{\theta}_2^2c_{12} & \dots & -M_nl_1l_n\dot{\theta}_n^2c_{1n} \\ 0 & -M_2l_1l_2\dot{\theta}_1^2c_{21} & p_2 & \dots & -M_nl_nl_2\dot{\theta}_n^2c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -M_nl_1l_n\dot{\theta}_1^2c_{n1} & -M_nl_2l_n\dot{\theta}_2^2c_{n2} & \dots & p_n \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

$$\mu\varepsilon \quad p_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n M_{max(i,j)} l_i l_j \dot{\theta}_j^2 c_{ij} \quad (3.88)$$

$$\frac{\partial \mathbf{C}(q_{ij})}{\partial x_{ij}} = \left[ \mathbf{0}_{n+1} \quad \frac{\partial \mathbf{C}(q_{ij})}{\partial q_{ij}} \right] \quad (3.89)$$

$$\text{όπου } \frac{\partial \mathbf{C}(q_{ij})}{\partial q_{ij}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_1l_1gc_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & M_2l_2gc_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & M_nl_ngc_n \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

$$\text{ενώ } \frac{\partial \mathbf{B}(x_{ij})v_{ij}}{\partial x_{iw}} = \frac{\partial \mathbf{C}(q_{ij})}{\partial x_{iw}} = \mathbf{0}_{n+1}, \quad w \neq j \quad (3.91)$$

Προκύπτει έτσι το μη-γραμμικό κομμάτι της Ιακωβιανής του συστήματος

$$\mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} \dot{\phi}_0(\tau_{i1}) \begin{bmatrix} \mathbf{A}(q_{i1}) & \mathbf{0}_{n+1} \end{bmatrix} & \frac{\partial g_{ni1}}{\partial x_{i1}} & \dots & \dot{\phi}_{ci}(\tau_{i1}) \begin{bmatrix} \mathbf{A}(q_{i1}) & \mathbf{0}_{n+1} \end{bmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot{\phi}_0(\tau_{ic_i}) \begin{bmatrix} \mathbf{A}(q_{ic_i}) & \mathbf{0}_{n+1} \end{bmatrix} & \dot{\phi}_1(\tau_{ic_i}) \begin{bmatrix} \mathbf{A}(q_{ic_i}) & \mathbf{0}_{n+1} \end{bmatrix} & \dots & \frac{\partial g_{nic_i}}{\partial x_{ic_i}} \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

Οι μερικές παράγωγοι των περιορισμών κάθε στοιχείου ως προς τη δράση ελέγχου  $u_i$  θα είναι

$$\frac{\partial g_{nij}}{\partial u_i} = e_1 \quad (3.93)$$

Στη συνέχεια υπολογίζονται οι παράγωγοι των γραμμικών περιορισμών, διαχωρί-

ζοντάς τους στο μητρώο των κινηματικών περιορισμών και, στην περίπτωση του πρώτου στοιχείου, αρχικών συνθηκών

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_{l10}}{\partial \mathbf{x}_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_{l1c_1}}{\partial \mathbf{x}_1} \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

$$\mathbf{E}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_{li1}}{\partial \mathbf{x}_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_{lic_i}}{\partial \mathbf{x}_i} \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

και στο μητρώο των εξισώσεων συνέχειας, εκτός από την περίπτωση του τελευταίου στοιχείου

$$\tilde{\mathbf{E}}_i = \frac{\partial g_{ci}}{\partial \mathbf{x}_i} \quad (3.96)$$

Υπενθυμίζονται οι εξισώσεις των γραμμικών περιορισμών

$$\mathbf{g}_{l10} = \mathbf{p}_0 - \mathbf{x}_{10}$$

$$\mathbf{g}_{lij} = \mathbf{q}_{ij} - \mathbf{q}_{i0} - \delta t_i \mathbf{V}_i \alpha_{ij}$$

$$\mathbf{g}_{ci} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{i+1}(0) - \mathbf{V}_i \phi_i(1) \\ \mathbf{q}_{i+1}(0) - \mathbf{q}_i(0) - \delta t_i \mathbf{V}_i \gamma_i \end{bmatrix}$$

Στο μηδενικό σημείο συντοπισμού κάθε στοιχείου  $\mathbf{x}_{i0}$  εφαρμόζονται είτε αρχικές είτε συνοριακές συνθήκες, στις οποίες εμφανίζεται γραμμικά το σημείο, χωρίς κάποιο συντελεστή. Έτσι, μπορεί να καταστρωθεί μία γενική μορφή του μητρώου  $\mathbf{E}_i$  που να αντιπροσωπεύει το πρώτο και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία.

$$\mathbf{E}_i = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_{2n+2} & \mathbf{0}_{2n+2} & \dots & \mathbf{0}_{2n+2} \\ \begin{bmatrix} -\alpha_{i10} \mathbf{I}_{n+1} & -\mathbf{I}_{n+1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\alpha_{i11} \mathbf{I}_{n+1} & \mathbf{I}_{n+1} \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} -\alpha_{i1c_i} \mathbf{I}_{n+1} & \mathbf{0}_{n+1} \end{bmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{bmatrix} -\alpha_{ic_i0} \mathbf{I}_{n+1} & -\mathbf{I}_{n+1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\alpha_{ic_i1} \mathbf{I}_{n+1} & \mathbf{0}_{n+1} \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} -\alpha_{ic_i0} \mathbf{I}_{n+1} & \mathbf{I}_{n+1} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_i = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n+1} & \mathbf{0}_{n+1} \\ \gamma_{i1} \mathbf{I}_{n+1} & \mathbf{I}_{n+1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n+1} \phi_1(1) & \mathbf{0}_{n+1} \\ \gamma_{i2} \mathbf{I}_{n+1} & \mathbf{0}_{n+1} \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n+1} \phi_{c_i}(1) & \mathbf{0}_{n+1} \\ \gamma_{ic_i} \mathbf{I}_{n+1} & \mathbf{0}_{n+1} \end{bmatrix} \\ \mathbf{0}_{2n+2} & \mathbf{0}_{2n+2} & \dots & \mathbf{0}_{2n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{2n+2} & \mathbf{0}_{2n+2} & \dots & \mathbf{0}_{2n+2} \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

όπου το  $\alpha_{ijk}$  αντιπροσωπεύει το  $k$  στοιχείο του διανύσματος  $\alpha_{ij}$ , όπως αυτό ορίστηκε στην (3.44). Οι μηδενικές γραμμές του  $\tilde{\mathbf{E}}_i$  είναι όσες χρειάζεται, ώστε ο αριθμός των γραμμών του να είναι ίσος με αυτόν του  $\mathbf{E}_i$ . Προκύπτει, με αυτόν τον τρόπο, η τελική μορφή της Ιακωβιανής των περιορισμών

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \hat{\mathbf{e}}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_2 & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \hat{\mathbf{e}}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{G}_{n_e} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \hat{\mathbf{e}}_{n_e} \\ \mathbf{E}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{E}}_1 & \mathbf{E}_2 & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{E}_{n_e} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

$$\text{όπου } \hat{\mathbf{e}}_i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{c_i n_s / 2} \quad (3.100)$$

Τέλος, η κλίση της σύναρτησης Lagrange (3.60) μπορεί να γραφτεί ως

$$\frac{\partial \Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial f(\mathbf{x}, \delta \mathbf{u})}{\partial \mathbf{X}} + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{J} \mathbf{c} \quad (3.101)$$

### 3.3.3 Καμπυλότητα της συνάρτησης Lagrange

Η καμπυλότητα της συνάρτησης Lagrange είναι απαραίτητη για την εξασφάλιση τοπικών ακροτάτων σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης, όπου εφαρμόζεται η μέθοδος των πολλαπλασιαστών Lagrange. Ο αλγόριθμος του MINOS ακολουθεί μία διαδικασία εκτίμησης ενός τμήματος μόνο της Εσσιανής του συστήματος, ενώ το IPOPT χειρίζεται ολόκληρο το μητρώο. Περισσότερα σχετικά με τους αλγορίθμους

επίλυσης θα παρουσιαστούν στο επόμενο κεφάλαιο. Παρακάτω αναλύεται ο υπολογισμός της Εσσιανής, με βάση την εξίσωση της καμπυλότητας, όπως αυτή προκύπτει από την παραγώγιση της (3.60)

$$\frac{\partial(\nabla_{\mathbf{X}} \Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}))^T}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial(\nabla_{\mathbf{X}} f(\mathbf{x}, \delta \mathbf{u}))^T}{\partial \mathbf{X}} + \lambda_1 \frac{\partial \mathbf{G}_{i11}}{\partial \mathbf{X}} + \cdots + \lambda_{n_x} \frac{\partial \mathbf{G}_{n_x c_{n_e}(n+1)}}{\partial \mathbf{X}} \quad (3.102)$$

ενώ ισχύει

$$\frac{\partial^2 \mathbf{g}_{lij}}{\partial \mathbf{X}^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{g}_{ci}}{\partial \mathbf{X}^2} = \mathbf{0}_{n_x}, \quad \text{για κάθε } i, j \quad (3.103)$$

Με βάση την (3.92), εισάγεται ο συμβολισμός

$$\mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{g}_{ni1} \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{g}_{nic_i} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{i11}^T \\ \vdots \\ \mathbf{G}_{i1(n+1)}^T \\ \vdots \\ \mathbf{G}_{ic_i1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{G}_{ic_i(n+1)}^T \end{bmatrix} \quad (3.104)$$

Ο συμβολισμός  $\mathbf{G}_{ijk}$  αντιπροσωπεύει την ανεστραμμένη παράγωγο της  $k$  εξίσωσης κίνησης, στο  $j$  σημείο συντοπισμού, στο  $i$  στοιχείο. Για  $k = 1$  προκύπτει η παράγωγος της εξίσωσης του αμαξώματος, ενώ διαφορετικά η παράγωγος της εξίσωσης του  $(k - 1)$  σε σειρά εκκρεμούς. Θεκινώντας από την καμπυλότητα της αντικειμενικής συνάρτησης, έχουμε

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}, \delta \mathbf{u})^T}{\partial \mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^T}{\partial \mathbf{x}_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f^T}{\partial \mathbf{x}_{n_e}} \\ \frac{\partial f^T}{\partial u_0} \\ \vdots \\ \frac{\partial f^T}{\partial u_{n_e}} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \tilde{f}_{x_1} \\ \vdots \\ \tilde{f}_{x_{n_e}} \\ \tilde{f}_{u_1} \\ \vdots \\ \tilde{f}_{u_{n_e}} \end{bmatrix} \quad (3.105)$$

Η παράγωγος του ανάστροφου της εξίσωσης (3.70) υπολογίζεται ως

$$\frac{\partial \tilde{f}_{x_i}}{\partial x_i} = \delta t_i \frac{\partial \mathbf{P}_i^T \boldsymbol{\psi}_i}{\partial \mathbf{x}_i} \quad (3.106)$$

Γράφοντας το μητρώο  $\mathbf{P}_i$  σε μορφή που να περιέχει τα διανύσματα γραμμών του,

προκύπτει

$$\mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{Pr}_{i0} \\ \vdots \\ \mathbf{Pr}_{i(2c_i+2)} \end{bmatrix} \text{ συνεπάγεται ότι } \mathbf{P}_i^T = \begin{bmatrix} \mathbf{Pr}_{i1}^T & \dots & \mathbf{Pr}_{i(2c_i+2)}^T \end{bmatrix} \quad (3.107)$$

Η παράγωγός του, στην εξίσωση (3.106), θα είναι

$$\frac{\partial \mathbf{P}_i^T \psi_i}{\partial \mathbf{x}_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{Pr}_{i0}\psi_i}{\partial \mathbf{x}_{i0}} & \frac{\partial \mathbf{Pr}_{i0}\psi_i}{\partial \mathbf{x}_{i1}} & \dots & \frac{\partial \mathbf{Pr}_{i0}\psi_i}{\partial \mathbf{x}_{ic_i}} \\ \frac{\partial \mathbf{Pr}_{i1}\psi_i}{\partial \mathbf{x}_{i0}} & \frac{\partial \mathbf{Pr}_{i1}\psi_i}{\partial \mathbf{x}_{i1}} & \dots & \frac{\partial \mathbf{Pr}_{i1}\psi_i}{\partial \mathbf{x}_{ic_i}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{Pr}_{ic_i}\psi_i}{\partial \mathbf{x}_{i0}} & \frac{\partial \mathbf{Pr}_{ic_i}\psi_i}{\partial \mathbf{x}_{i1}} & \dots & \frac{\partial \mathbf{Pr}_{ic_i}\psi_i}{\partial \mathbf{x}_{ic_i}} \end{bmatrix} \quad (3.108)$$

Από την εξίσωση (3.68), φαίνεται εύκολα πως οι παράγωγοι του  $\mathbf{P}_i$  ακολουθούν ένα συγκεκριμένο σχέδιο (pattern) της μορφής

$$\frac{\partial \mathbf{Pr}_{ik}\psi_i}{\partial \mathbf{x}_{ij}} = 2\mathbf{Q}_x \mathbf{I}_{n_s} \psi_{ijk} \quad (3.109)$$

όπου, σύμφωνα με τον ορισμό (3.37), ισχύει ο συμβολισμός  $\psi_{ijk} = \int_0^1 \phi_{ij} \phi_{ik} d\tau$ . Ακολουθώντας αυτή τη λογική, η εξίσωση (3.108) αποκτά τη γενική μορφή

$$\frac{\partial \mathbf{P}_i^T \psi_i}{\partial \mathbf{x}_i} = 2 \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_x \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_s} \psi_{i00} & \mathbf{I}_{n_s} \psi_{i01} & \dots & \mathbf{I}_{n_s} \psi_{i0c_i} \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q}_x \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_s} \psi_{i10} & \mathbf{I}_{n_s} \psi_{i11} & \dots & \mathbf{I}_{n_s} \psi_{i1c_i} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_x \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_s} \psi_{ic_i0} & \mathbf{I}_{n_s} \psi_{ic_i1} & \dots & \mathbf{I}_{n_s} \psi_{ic_ic_i} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = 2\mathbf{S}_i \quad (3.110)$$

$$\frac{\partial \tilde{f}_{x_i}}{\partial \mathbf{x}_i} = 2\delta t_i \mathbf{S}_i \quad (3.111)$$

ενώ για το τελευταίο στοιχείο, η αντίστοιχη εξίσωση θα είναι

$$\frac{\partial \tilde{f}_{x_{n_e}}}{\partial \mathbf{x}_{n_e}} = \frac{\partial \mathbf{P}_{n_e}^T \zeta_{n_e}}{\partial \mathbf{x}_{n_e}} + \delta t_{n_e} \frac{\partial \mathbf{P}_{n_e}^T \psi_{n_e}}{\partial \mathbf{x}_{n_e}} \quad (3.112)$$

όπου σύμφωνα με την (3.110), προκύπτει

$$\frac{\partial \tilde{f}_{x_{n_e}}}{\partial \mathbf{x}_{n_e}} = 2 \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_x \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_s}(\zeta_{i00} + \delta t_{n_e} \psi_{i00}) & \mathbf{I}_{n_s}(\zeta_{i01} + \delta t_{n_e} \psi_{i01}) & \dots & \mathbf{I}_{n_s}(\zeta_{i0c_i} + \delta t_{n_e} \psi_{i0c_i}) \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q}_x \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_s}(\zeta_{i10} + \delta t_{n_e} \psi_{i10}) & \mathbf{I}_{n_s}(\zeta_{i11} + \delta t_{n_e} \psi_{i11}) & \dots & \mathbf{I}_{n_s}(\zeta_{i1c_i} + \delta t_{n_e} \psi_{i1c_i}) \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_x \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_s}(\zeta_{ic_i0} + \delta t_{n_e} \psi_{ic_i0}) & \mathbf{I}_{n_s}(\zeta_{ic_i1} + \delta t_{n_e} \psi_{ic_i1}) & \dots & \mathbf{I}_{n_s}(\zeta_{ic_ic_i} + \delta t_{n_e} \psi_{ic_ic_i}) \end{bmatrix} \end{bmatrix} = 2\mathbf{S}_{n_e} \quad (3.113)$$

και σύμφωνα με τον ορισμό (3.36) ισχύει  $\zeta_{ijk} = \phi_{ij}(1)\phi_{ik}(1)$ . Συνεχίζοντας την παραγώγιση της καμπυλότητας  $\frac{\partial \nabla_{\mathbf{X}} f^T}{\partial \mathbf{X}}$  υπολογίζονται οι μη μηδενικοί όροι που απομένουν

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{f}_{u_i}}{\partial \mathbf{x}_i} &= 2\delta t_i \mathbf{Q}_{ux} \frac{\partial \mathbf{X}_i \gamma_i}{\partial \mathbf{x}_i} = 2\delta t_i \mathbf{Q}_{ux} \left[ \mathbf{I}_{n_s} \gamma_{i0} \quad \mathbf{I}_{n_s} \gamma_{i1} \quad \dots \quad \mathbf{I}_{n_s} \gamma_{ic_i} \right] \\ &= 2\delta t_i \left[ \gamma_{i0} \mathbf{Q}_{ux} \quad \gamma_{i1} \mathbf{Q}_{ux} \quad \dots \quad \gamma_{ic_i} \mathbf{Q}_{ux} \right] = 2\delta t_i \Xi_i\end{aligned}\quad (3.114)$$

$$\frac{\partial \tilde{f}_{u_i}}{\partial \mathbf{x}_{i+1}} = -2\delta t_{i+1} \mathbf{Q}_{ux} \frac{\partial \mathbf{X}_{i+1} \gamma_i}{\partial \mathbf{x}_{i+1}} = -2\delta t_{i+1} \Xi_{i+1} \quad (3.115)$$

$$\frac{\partial \tilde{f}_{x_i}}{\partial u_i} = 2\delta t_i \left[ \mathbf{I}_{n_s} \gamma_{i0} \quad \mathbf{I}_{n_s} \gamma_{i1} \quad \dots \quad \mathbf{I}_{n_s} \gamma_{ic_i} \right]^T \mathbf{Q}_{ux}^T \frac{\partial \delta u_i}{\partial u_i} = 2\delta t_i \Xi_i^T \quad (3.116)$$

$$\frac{\partial \tilde{f}_{x_i}}{\partial u_{i-1}} = 2\delta t_i \left[ \mathbf{I}_{n_s} \gamma_{i0} \quad \mathbf{I}_{n_s} \gamma_{i1} \quad \dots \quad \mathbf{I}_{n_s} \gamma_{ic_i} \right]^T \mathbf{Q}_{ux}^T \frac{\partial \delta u_i}{\partial u_{i-1}} = -2\delta t_i \Xi_i^T \quad (3.117)$$

$$\frac{\partial \tilde{f}_{u_i}}{\partial u_i} = 2\delta t_i Q_u \frac{\partial \delta u_i}{\partial u_i} - 2\delta t_{i+1} Q_u \frac{\partial \delta u_{i+1}}{\partial u_i} = 2Q_u(\delta t_i + \delta t_{i+1}) \quad (3.118)$$

$$\frac{\partial \tilde{f}_{u_i}}{\partial u_{i-1}} = 2\delta t_{i-1} Q_u \frac{\partial \delta u_i}{\partial u_{i-1}} = -2\delta t_i Q_u \quad (3.119)$$

$$\frac{\partial \tilde{f}_{u_i}}{\partial u_{i+1}} = -2\delta t_{i+1} Q_u \frac{\partial \delta u_{i+1}}{\partial u_{i+1}} = -2\delta t_{i+1} Q_u \quad (3.120)$$

Η καμπυλότητα της αντικειμενικής συνάρτησης περιγράφεται τελικά από το συμμετρικό μητρώο

$$\frac{\partial \nabla_{\mathbf{X}} f^T}{\partial \mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 2\delta t_1 \mathbf{S}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & 2\delta t_1 \Xi_1^T & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ 0 & 2\delta t_2 \mathbf{S}_2 & \dots & \mathbf{0} & -2\delta t_2 \Xi_2 & 2\delta t_2 \Xi_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & 2\delta t_{n_e} \mathbf{S}_{n_e} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & 2\delta t_{n_e} \Xi_{n_e}^T \\ 2\delta t_1 \Xi_1 & -2\delta t_2 \Xi_2^T & \dots & \mathbf{0} & 2(\delta t_1 + \delta t_2) Q_u & -2\delta t_2 Q_u & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2\delta t_2 \Xi_2 & \dots & \mathbf{0} & -2\delta t_2 Q_u & 2(\delta t_2 + \delta t_3) Q_u & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & 2\delta t_{n_e} \Xi_{n_e} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & 2\delta t_{n_e} Q_u \end{bmatrix} \quad (3.121)$$

Προχωρώντας στην παραγώγιση της Ιακωβιανής των περιορισμών, ο συμβολισμός (3.104) διευρύνεται, ώστε να χρησιμοποιηθούν διαφορετικά σύμβολα για την κάθε ανεστραμμένη γραμμή, κάθε μπλοκ εξισώσεων της (3.92), ως εξής

$$\mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} \dot{\phi}_0(\tau_{i1}) \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\mathbf{q}_{i1}) & \mathbf{0}_{n+1} \end{bmatrix} & \frac{\partial \mathbf{g}_{ni1}}{\partial \mathbf{x}_{i1}} & \dots & \dot{\phi}_{ci}(\tau_{i1}) \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\mathbf{q}_{i1}) & \mathbf{0}_{n+1} \end{bmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot{\phi}_0(\tau_{ic_i}) \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\mathbf{q}_{ic_i}) & \mathbf{0}_{n+1} \end{bmatrix} & \dot{\phi}_1(\tau_{ic_i}) \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\mathbf{q}_{ic_i}) & \mathbf{0}_{n+1} \end{bmatrix} & \dots & \frac{\partial \mathbf{g}_{nic_i}}{\partial \mathbf{x}_{ic_i}} \end{bmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{bmatrix} \dot{\phi}_0(\tau_{i1}) \begin{bmatrix} Ar_{i11}^T & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots \\ Ar_{i1(n+1)}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} gr_{i11}^T \\ \vdots \\ gr_{i1(n+1)}^T \end{bmatrix} & \dots & \dot{\phi}_{ci}(\tau_{i1}) \begin{bmatrix} Ar_{i11}^T & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots \\ Ar_{i1(n+1)}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dot{\phi}_0(\tau_{ic_i}) \begin{bmatrix} Ar_{ic_i1}^T & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots \\ Ar_{ic_i(n+1)}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} & \dot{\phi}_1(\tau_{ic_i}) \begin{bmatrix} Ar_{ic_i1}^T & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots \\ Ar_{ic_i(n+1)}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} gr_{i11}^T \\ \vdots \\ gr_{i1(n+1)}^T \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.122)$$

Η (3.79) ξαναγράφεται αναλυτικότερα

$$\frac{\partial \mathbf{g}_{nij}}{\partial \mathbf{x}_{ij}} = \frac{1}{\delta t_i} \left[ \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\mathbf{q}_{ij}) & \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{q}_{ij}) \mathbf{v}_{ij}}{\partial \mathbf{q}_{ij}} \end{bmatrix} + \sum_{\substack{h=0 \\ h \neq j}}^{c_i} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n+1} & \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{q}_{ij}) \mathbf{v}_{ih}}{\partial \mathbf{q}_{ij}} \end{bmatrix} \right] + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}_{ij})}{\partial \mathbf{x}_{ij}} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n+1} & \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{q}_{ij})}{\partial \mathbf{q}_{ij}} \end{bmatrix} \quad (3.123)$$

Κάθε πεπερασμένο στοιχείο είναι ανεξάρτητο από το προηγούμενο, αφού στην Εσσιανή δεν εμφανίζονται όροι των γραμμικών περιορισμών. Επίσης, τα μητρώα των  $n$  εξισώσεων των εκκρεμών παρουσιάζουν ένα συγκεκριμένο σχέδιο (pattern), όπως φαίνεται από τις εξισώσεις κίνησης (2.26) ανά σημείο συντοπισμού και από την Ιακωβιανή αυτών (3.92) ανά στοιχείο. Αρκεί επομένως, να παρουσιαστεί ο υπολογισμός της δεύτερης παραγώγου της εξίσωσης του αμαξώματος και του πρώτου εκκρεμούς. Από εκεί και πέρα, απαιτούνται μόνο ορισμένες μεταθέσεις γραμμών και στηλών και ανάλογες αλλαγές στις δείκτες, ώστε να προσδιοριστεί πλήρως η Εσσιανή. Ισχύει για την εξίσωση του αμαξώματος, στο πρώτο σημείο συντοπισμού κάθε στοιχείου και σύμφωνα με το συμβολισμό (3.122)

$$\frac{\partial \mathbf{G}_{i11}}{\partial \mathbf{x}_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \phi_0(\tau_{i1}) \frac{\partial Ar_{i11}}{\partial \mathbf{x}_{i1}} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \frac{\partial gr_{i11}^T}{\partial \mathbf{x}_{i0}} & \frac{\partial gr_{i11}}{\partial \mathbf{x}_{i1}} & \frac{\partial gr_{i11}}{\partial \mathbf{x}_{i2}} & \dots & \frac{\partial gr_{i11}^T}{\partial \mathbf{x}_{ic_i}} \\ \mathbf{0} & \phi_2(\tau_{i1}) \frac{\partial Ar_{i11}}{\partial \mathbf{x}_{i1}} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \phi_{ci}(\tau_{i1}) \frac{\partial Ar_{i11}}{\partial \mathbf{x}_{i1}} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.124)$$

Γενικεύοντας, για κάθε σημείο συντοπισμού, ισχύει, για την ίδια εξίσωση

$$\frac{\partial \mathbf{Ar}_{ij1}}{\partial \mathbf{x}_{ij}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -M_1 l_1 s_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -M_2 l_2 s_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -M_n l_n s_n \end{bmatrix} \quad (3.125)$$

$$\frac{\partial \mathbf{gr}_{ij1}}{\partial \mathbf{x}_{ij}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{gr}_{ij1}}{\partial \mathbf{v}_{ij}} & \frac{\partial \mathbf{gr}_{ij1}}{\partial \mathbf{q}_{ij}} \end{bmatrix} \quad (3.126)$$

$$\frac{\partial \mathbf{gr}_{ij1}}{\partial \mathbf{v}_{ij}} = \dot{\phi}_{ij}(\tau_{ij}) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -2M_1 l_1 s_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -2M_2 l_2 s_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2M_n l_n s_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -M_1 l_1 (2\dot{\theta}_1 c_1 + s_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -M_2 l_2 (2\dot{\theta}_2 c_2 + s_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -M_n l_n (2\dot{\theta}_n c_n + s_n) \end{bmatrix} \quad (3.127)$$

$$\frac{\partial \mathbf{gr}_{ij1}}{\partial \mathbf{q}_{ij}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\dot{\phi}_{ij}(\tau_{ij}) M_1 l_1 (2\dot{\theta}_1 c_1 + s_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\dot{\phi}_{ij}(\tau_{ij}) M_n l_n (2\dot{\theta}_n c_n + s_n) \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_1 l_1 (\dot{\theta}^2 s_1 - \sum_{w=0}^{c_i} \dot{\phi}_{iw}(\tau_{ij}) \dot{\theta}_{1w} c_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & M_n l_n (\dot{\theta}^2 s_n - \sum_{w=0}^{c_i} \dot{\phi}_{iw}(\tau_{ij}) \dot{\theta}_{nw} c_n) \end{bmatrix} \quad (3.128)$$

$$\text{ενώ } \frac{\partial \mathbf{gr}_{ijk}}{\partial \mathbf{x}_{iw}} = \left( \frac{\partial \mathbf{Ar}_{ijk}}{\partial \mathbf{x}_{ij}} \right)^T, \quad \text{για } w \neq j \quad (3.129)$$

Όπου με  $\dot{\theta}_{kw}$  συμβολίζεται η γωνιακή ταχύτητα  $\dot{\theta}_k$  στο σημείο συντοπισμού  $w$ , αντί για το σημείο  $j$  όπως αρχικά θεωρήθηκε ο συμβολισμός. Η δεύτερη παράγωγος της

εξίσωσης του πρώτου εκκρεμούς, στο πρώτο σημείο συντοπισμού κάθε στοιχείου, θα είναι

$$\frac{\partial G_{i12}}{\partial \mathbf{x}_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \phi_0(\tau_{i1}) \frac{\partial \mathbf{A}\mathbf{r}_{i12}}{\partial \mathbf{x}_{i1}} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathbf{g}\mathbf{r}_{i12}}{\partial \mathbf{x}_{i0}} & \frac{\partial \mathbf{g}\mathbf{r}_{i12}}{\partial \mathbf{x}_{i1}} & \frac{\partial \mathbf{g}\mathbf{r}_{i12}}{\partial \mathbf{x}_{i2}} & \dots & \frac{\partial \mathbf{g}\mathbf{r}_{i12}}{\partial \mathbf{x}_{ic_i}} \\ \mathbf{0} & \phi_2(\tau_{i1}) \frac{\partial \mathbf{A}\mathbf{r}_{i12}}{\partial \mathbf{x}_{i1}} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \phi_{c_i}(\tau_{i1}) \frac{\partial \mathbf{A}\mathbf{r}_{i12}}{\partial \mathbf{x}_{i1}} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.130)$$

Ισχύει, γενικά, για κάθε σημείο συντοπισμού

$$\frac{\partial \mathbf{A}\mathbf{r}_{ij2}}{\partial \mathbf{x}_{ij}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -M_1 l_1 s_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -M_1 l_1 l_2 s_{12} & M_1 l_1 l_2 s_{12} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -M_n l_n s_n \end{bmatrix} \quad (3.131)$$

$$\frac{\partial \mathbf{g}\mathbf{r}_{ij2}}{\partial \mathbf{x}_{ij}} = \dot{\phi}_{ij}(\tau_{ij}) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2M_2 l_1 l_2 s_{12} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2M_n l_1 l_n s_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -M_1 l_1 s_1 & 0 & \eta_{j12} & \dots & \eta_{j1n} \\ 0 & 0 & -\eta_{j12} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\eta_{j1n} \end{bmatrix} \quad (3.132)$$

$$\frac{\partial \mathbf{g}\mathbf{r}_{ij2}}{\partial \mathbf{q}_{ij}} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\phi}_{ij}(\tau_{ij}) M_1 l_1 s_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \eta_{j12} & -\eta_{j12} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \eta_{j1n} & 0 & \dots & -\eta_{j1n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\dot{\phi}_{ij}(\tau_{ij}) M_1 l_1 (\dot{x}_c c_1 + g s_1) + \varepsilon_{j1} & \xi_{j12} & \dots & \xi_{j1n} \\ 0 & \xi_{j12} & \beta_{j12} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \xi_{j1n} & 0 & \dots & \beta_{j1n} \end{bmatrix} \quad (3.133)$$

$$\text{όπου } \eta_{jik} = M_{max(i,k)} l_i l_k (2\dot{\theta}_k c_{ik} - \dot{\phi}_{.j}(\tau_{.j}) s_{ik}) \quad (3.134)$$

$$\xi_{jik} = M_{max(i,j)} l_i l_k \left( \dot{\theta}_k^2 s_{ik} + \sum_{w=0}^{c.} \dot{\phi}_{.w}(\tau_{.j}) \dot{\theta}_{kw} c_{ik} \right) \quad (3.135)$$

$$\beta_{jik} = M_{max(i,j)} l_i l_k \left( \dot{\theta}_k^2 s_{ik} - \sum_{w=0}^{c.} \dot{\phi}_{.w}(\tau_{.j}) \dot{\theta}_{kw} c_{ik} \right) \quad (3.136)$$

$$\varepsilon_{ji} = - \sum_{w=0}^{c.} \dot{\phi}_{.w}(\tau_{.j}) \sum_{k=1}^n M_{max(i,k)} l_i l_k \dot{\theta}_{kw} (c_{ik} + \dot{\theta}_{kw} s_{ik}) \quad (3.137)$$

Το σύμβολο  $(\cdot)$  αντικαθιστά το δείκτη πεπερασμένου στοιχείου ή σημείου συντοπισμού, ανάλογα με τη μεταβλητή, όταν είναι εύκολα εμφανές σε ποιο στοιχείο ή σημείο αναφέρεται. Οι δείκτες  $j, i, k$  στην παραπάνω εφαρμογή τους, υποδηλώνουν την εξάρτηση του εκάστοτε όρου από το σημείο συντοπισμού  $j$ , λόγω του υπολογισμού της παραγώγου ενός πολυωνύμου Lagrange στην  $\tau_{.j}$  ρίζα των πολυωνύμων Legendre, και από τις καταστάσεις των εκκρεμών  $i$  και  $j$ . Στο σημείο αυτό, γίνεται κατηγοριοποίηση των στοιχείων του διανύσματος των πολλαπλασιαστών Lagrange, σε διανύσματα ανάλογα με το σημείο συντοπισμού και το στοιχείο στο οποίο αναφέρεται ο κάθε περιορισμός, με βάση τον ορισμό (3.57), ως εξής

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_{11} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\lambda}_{1c_1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\lambda}_{n_e 1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\lambda}_{n_e c_{n_e}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_x} \quad (3.138)$$

$$\text{όπου } \boldsymbol{\lambda}_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_{ij1} \\ \vdots \\ \lambda_{ij(n+1)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \quad (3.139)$$

Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό (3.104) για την εφαρμογή αντίστοιχου διαχωρισμού των στοιχείων του διανύσματος  $\mathbf{G}_i$ , προκύπτει

$$\mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{i1} \\ \vdots \\ \mathbf{G}_{ic_i} \end{bmatrix} \quad (3.140)$$

$$\frac{\partial(\nabla_{\mathbf{X}} \Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}))^T}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial(\nabla_{\mathbf{X}} f(\mathbf{x}, \delta \mathbf{u}))^T}{\partial \mathbf{X}} + \sum_{i=1}^{n_e} \sum_{j=1}^{c_i} \boldsymbol{\lambda}_{ij}^T \frac{\partial \mathbf{G}_{ij}}{\partial \mathbf{X}} \quad (3.141)$$

Αφου υπολογίστηκε αναλυτικά η παράγωγος της Ιακωβιανής για τις εξισώσεις του αμαξώματος και του πρώτου εκκρεμούς, μπορεί να προσδιοριστεί ο πρώτος όρος του αθροίσματος της (3.141), ως

$$\boldsymbol{\lambda}_{i1}^T \frac{\partial \mathbf{G}_{i1}}{\partial \mathbf{x}_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \phi_0(\tau_{i1}) \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_{i1k} \frac{\partial \mathbf{A}\mathbf{r}_{i1k}}{\partial \mathbf{x}_{i1}} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_{i1k} \frac{\partial \mathbf{g}\mathbf{r}_{i1k}}{\partial \mathbf{x}_{i0}} & \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_{i1k} \frac{\partial \mathbf{g}\mathbf{r}_{i1k}}{\partial \mathbf{x}_{i1}} & \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_{i1k} \frac{\partial \mathbf{g}\mathbf{r}_{i1k}}{\partial \mathbf{x}_{i2}} & \dots & \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_{i1k} \frac{\partial \mathbf{g}\mathbf{r}_{i1k}}{\partial \mathbf{x}_{ic_i}} \\ \mathbf{0} & \phi_2(\tau_{i1}) \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_{i1k} \frac{\partial \mathbf{A}\mathbf{r}_{i1k}}{\partial \mathbf{x}_{i1}} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \phi_{c_i}(\tau_{i1}) \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_{i1k} \frac{\partial \mathbf{A}\mathbf{r}_{i1k}}{\partial \mathbf{x}_{i1}} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.142)$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_{ijk} \frac{\partial \mathbf{A}\mathbf{r}_{i1k}}{\partial \mathbf{x}_{i1}} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -\lambda_{i12} M_1 l_1 s_1 & -\lambda_{i13} M_2 l_2 s_2 & \dots & -\lambda_{i1(n+1)} M_n l_n s_n \\ 0 & \dots & 0 & \kappa_1 & \lambda_{i13} M_2 l_1 l_2 s_{12} & \dots & \lambda_{i1(n+1)} M_n l_1 l_n s_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{i12} M_1 l_2 l_2 s_{21} & \kappa_2 & \dots & \lambda_{ij(n+1)} M_n l_2 l_n s_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{i12} M_n l_n l_1 s_{n1} & \lambda_{i13} M_n l_n l_2 s_{n2} & \dots & \kappa_n \end{bmatrix} \quad (3.143)$$

$$\text{όπου } \kappa_i = -\lambda_{i11} M_i l_i s_i - \sum_{j=1}^n \lambda_{i1j} M_{max(i,j)} l_i l_j s_{ij} \quad (3.144)$$

$$\sum_{k=1}^{n_s} \lambda_{i1k} \frac{\partial \mathbf{g}\mathbf{r}_{i1k}}{\partial \mathbf{x}_{iw}} = \sum_{k=1}^{n_s} \lambda_{i1k} \left( \frac{\partial \mathbf{A}\mathbf{r}_{i1k}}{\partial \mathbf{x}_{iw}} \right)^T, \text{ από την (3.129)} \quad (3.145)$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_{i1k} \frac{\partial \mathbf{g}\mathbf{r}_{i1k}}{\partial \mathbf{x}_{i1}} = \begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & \Omega_4 \end{bmatrix} \quad (3.146)$$

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{12} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \omega_{1n} \end{bmatrix} \quad (3.147)$$

$$\Omega_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_{i12}M_1l_1s_1 & -\lambda_{i13}M_2l_2s_2 & \dots & \lambda_{i1(n+1)}M_nl_ns_n \\ 0 & \omega_{21} & \eta_{21} & \dots & \eta_{n1} \\ 0 & \eta_{12} & \omega_{22} & \dots & \eta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \eta_{1n} & \eta_{2n} & \dots & \omega_{2n} \end{bmatrix} \quad (3.148)$$

$$\Omega_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda_{i12}M_1l_1s_1 & \omega_{21} & \eta_{12} & \dots & \eta_{1n} \\ -\lambda_{i13}M_2l_2s_2 & \eta_{21} & \omega_{22} & \dots & \eta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda_{i1(n+1)}M_nl_ns_n & \eta_{n1} & \eta_{n2} & \dots & \omega_{2n} \end{bmatrix} \quad (3.149)$$

$$\Omega_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_{4d1} & \omega_{412} & \dots & \omega_{41n} \\ 0 & \omega_{421} & \omega_{4d2} & \dots & \omega_{42n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \omega_{4n1} & \omega_{4n2} & \dots & \omega_{4dn} \end{bmatrix}$$

$$\mu\varepsilon \quad \omega_{1i} = -2\lambda_{i11}M_il_is_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n 2\lambda_{.1(j+1)}M_{max(i,j)}l_il_js_{ji} \quad (3.150)$$

$$\omega_{2i} = -\lambda_{.1(i+1)}M_il_i(2\dot{\theta}_i c_i + s_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \lambda_{.1(j+1)}\eta_{ji} \quad (3.151)$$

$$\omega_{4ij} = \eta_{.ij} + \eta_{.ji} \quad (3.152)$$

$$\omega_{4di} = -\lambda_{.1(i+1)} \left[ \dot{\phi}_{.i}(\tau_{.i}) M_il_i(\dot{x}_c c_i + g s_i) + \varepsilon_{.i} \right] + \lambda_{.11} M_il_i \left( \dot{\theta}_i^2 s_i - c_i \sum_{w=0}^c \dot{\phi}_{.w}(\tau_{.i}) \dot{\theta}_{iw} \right) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \lambda_{.1(j+1)} \beta_{.ji} \quad (3.153)$$

Χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς

$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_{ijk} \frac{\partial \mathbf{Ar}_{ijk}}{\partial \mathbf{x}_{ij}} \equiv \frac{\partial \mathbf{A}\lambda(\mathbf{q}_{ij})}{\partial \mathbf{x}_{ij}} \quad (3.154)$$

$$\text{συνεπάγεται ότι } \sum_{k=1}^{n_s} \lambda_{ijk} \frac{\partial \mathbf{gr}_{ijk}}{\partial \mathbf{x}_{iw}} \equiv \left( \frac{\partial \mathbf{A}\lambda(\mathbf{q}_{ij})}{\partial \mathbf{x}_{ij}} \right)^T, \quad \text{για κάθε } w \neq j \quad (3.155)$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_{i1k} \frac{\partial \mathbf{gr}_{i1k}}{\partial \mathbf{x}_{i1}} \equiv \frac{\partial \mathbf{g}\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_{i1}} \quad (3.156)$$

η Εσσιανή των περιορισμών κάθε στοιχείου γράφεται στη συμμετρική μορφή

$$\mathbf{H}_{gi} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \dot{\phi}_{i0}(\tau_{i1}) \frac{\partial \mathbf{A}\lambda(\mathbf{q}_{i1})}{\partial \mathbf{x}_{i1}} & \dot{\phi}_{i0}(\tau_{i2}) \frac{\partial \mathbf{A}\lambda(\mathbf{q}_{i2})}{\partial \mathbf{x}_{i1}} & \dots & \dot{\phi}_{i0}(\tau_{ic_i}) \frac{\partial \mathbf{A}\lambda(\mathbf{q}_{ic_i})}{\partial \mathbf{x}_{ic_i}} \\ \left( \frac{\partial \mathbf{A}\lambda(\mathbf{q}_{i1})}{\partial \mathbf{x}_{i1}} \right)^T & \frac{\partial \mathbf{g}\lambda(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_{i1}} & a_{12} & \dots & a_{1c_i} \\ \left( \frac{\partial \mathbf{A}\lambda(\mathbf{q}_{i2})}{\partial \mathbf{x}_{i2}} \right)^T & a_{21} & \frac{\partial \mathbf{g}\lambda(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_{i2}} & \dots & a_{2c_i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left( \frac{\partial \mathbf{A}\lambda(\mathbf{q}_{ic_i})}{\partial \mathbf{x}_{ic_i}} \right)^T & a_{c_i1} & a_{c_i2} & \dots & \frac{\partial \mathbf{g}\lambda(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_{ic_i}} \end{bmatrix} \quad (3.157)$$

$$\text{έχοντας } a_{ij} = \dot{\phi}_{i.}(\tau_{.j}) \frac{\partial \mathbf{A}\lambda(\mathbf{q}_{.j})}{\partial \mathbf{x}_{.j}} + \dot{\phi}_{.j}(\tau_{.i}) \left( \frac{\partial \mathbf{A}\lambda(\mathbf{q}_{.i})}{\partial \mathbf{x}_{.i}} \right)^T = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n+1} & \dot{\phi}_{i.}(\tau_{.j}) \frac{\partial \mathbf{A}\lambda(\mathbf{q}_{.j})}{\partial \mathbf{q}_{.j}} \\ \dot{\phi}_{.j}(\tau_{.i}) \left( \frac{\partial \mathbf{A}\lambda(\mathbf{q}_{.i})}{\partial \mathbf{q}_{.i}} \right)^T & \mathbf{0}_{n+1} \end{bmatrix} \quad (3.158)$$

Σχηματίζεται έτσι η ολοκληρωμένη Εσσιανή των περιορισμών

$$\mathbf{H}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{g1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{g2} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{H}_{gn_e} \end{bmatrix} \quad (3.159)$$

Σύμφωνα με τις (3.121), (3.141) και (3.159) προκύπτει η τελική μορφή της καμπυλότητας της

$$\frac{\partial (\nabla_{\mathbf{X}} \Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}))^T}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial (\nabla_{\mathbf{X}} f(\mathbf{x}, \delta \mathbf{u}))^T}{\partial \mathbf{X}} + \mathbf{H}_g(\mathbf{X}) \quad (3.160)$$

---

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

---

# Επίλυση προβλήματος μη-γραμμικού προγραμματισμού

Το πρόβλημα μη-γραμμικού προγραμματισμού που προέκυψε από το πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου (3.7) με εισαγωγή της εξίσωσης Lagrange (3.54), έχει τη μορφή

$$\nabla_{X,\lambda} \Lambda(X, \lambda) = 0 \quad (4.1)$$

Τα λογισμικά MINOS και IPOPT, που επιλέχθηκαν για την επίλυση του προβλήματος, περιέχουν εφαρμογές ειδικά διαμορφωμένων μεθόδων για προβλήματα μη-γραμμικού προγραμματισμού, μεγάλης κλίμακας. Οι αλγόριθμοί τους διαχειρίζονται αποδοτικά τα αραιά (sparse) μητρώα που προκύπτουν από τη διατύπωση του προβλήματος, την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης Lagrange.

Η αραιή μορφή των μητρώων είναι αποτέλεσμα της εφαρμογής της μεθόδου ορθογώνιας ταξιθεσίας σε πεπερασμένα στοιχεία, όπου κάθε στοιχείο εξαρτάται από τα υπόλοιπα μέσω μίας μόνο συνθήκης συνέχειας για κάθε γειτονικό στοιχείο. Η αύξηση των διαστάσεων που προκαλεί η μέθοδος και η επίλυση του σχηματίζομενου αλγεβρικού συστήματος, προτιμάται έναντι της επίλυσης του συστήματος διαφορικών εξισώσεων του αρχικού προβλήματος βέλτιστου ελέγχου, λόγω της ταχύτερης επίδοσης αλγορίθμων μη-γραμμικού προγραμματισμού.

Σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται αρχικά μια περιγραφή των αλγορίθμων των MINOS και IPOPT, διακρίνοντας τις διαφορές στις μεθόδους επίλυσης του (4.1), ενώ στη συνέχεια παρουσιάζονται κάποια παραδείγματα προσομοίωσης του ελέγχου  $n$  καθοδηγούμενων εκκρεμών, για διάφορες τιμές του  $n$  και επιλύονται, συγκρίνοντας πρακτικά την απόδοση των δύο αλγορίθμων σε ένα μη-γραμμικό πρόβλημα, μεγάλης κλίμακας.

## 4.1 Σύντομη περιγραφή των αλγορίθμων MINOS & IPOPT

Στην αρχική μορφή του προβλήματος μη-γραμμικού προγραμματισμού, προστίθενται τα άνω και κάτω όρια,  $b_l, b_u$ , για το διάνυσμα γενικευμένων συντεταγμένων  $q_{ij}$ , το διάνυσμα γενικευμένων ταχυτήτων  $v_{ij}$  και το διάνυσμα ακολουθίας δράσεων ελέγχου  $u_i$ . Έτσι το πρόβλημα μετασχηματίζεται στη μορφή

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{u}}{\text{minimize}} \quad & f(\mathbf{X}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{0} \\ & b_l \leq \mathbf{X} \leq b_u \end{aligned} \tag{4.2}$$

Το [5] αποτελεί μία περίληψη των αριθμητικών μεθόδων που εφαρμόζονται κατά τη διαδικασία βελτιστοποίησης στο μη-γραμμικό προβλεπτικό έλεγχο, μελετώντας επιπλέον την προσαρμογή των μεθόδων στην περίπτωση του ελέγχου σε πραγματικό χρόνο. Οι μέθοδοι βελτιστοποίησης, οι οποίες είναι βασισμένες στη μέθοδο αριθμητικής προσέγγισης λύσης Newton-Raphson, διαχωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες, τις μεθόδους Διαδοχικού Τετραγωνικού Προγραμματισμού (Sequential Quadratic Programming - SQP) και τις μεθόδους Εσωτερικών Σημείων (Interior Point - IP).

Η παραπάνω κατηγοριοποίηση έχει να κάνει με τον τρόπο που η κάθε μέθοδος χειρίζεται τους περιορισμούς ανισοτήτων του προβλήματος, οι οποίοι εδώ έχουν την απλή μορφή  $b_l \leq \mathbf{X} \leq b_u$ . Στην ίδια μελέτη, παρουσιάζονται περαιτέρω κριτήρια διάκρισης των μεθόδων βελτιστοποίησης, όπως ο τρόπος υπολογισμού της πρώτης και δεύτερης παραγώγου της συνάρτησης Lagrange και η δομή του γραμμικοποιημένου προβλήματος σε κάθε επανάληψη. Το MINOS εφαρμόζει μεθόδους της γενικής κατηγορίας των SQP, ενώ το IPOPT αυτής των IP. Η ανάλυση των αλγορίθμων τους, θα κάνει εμφανή αυτή τη διαφορά τους, όπως και περισσότερες διαφορές, βασισμένες στα προαναφερθέντα κριτήρια.

### 4.1.1 Αλγόριθμος MINOS 5.5

Το MINOS 5.5 (Modular In-core Nonlinear Optimization system) δέχεται ως είσοδο προβλήματα της γενικής μορφής

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{x}, \mathbf{y}}{\text{minimize}} \quad & f(\mathbf{x}) + \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbf{d}^T \mathbf{y} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}_1 \mathbf{y} = \mathbf{b}_1 \\ & \mathbf{A}_2 \mathbf{x} + \mathbf{A}_3 \mathbf{y} = \mathbf{b}_2 \\ & b_l \leq \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \leq b_u \end{aligned} \tag{4.3}$$

όπου οι μεταβλητές χωρίζονται στις γραμμικές και στις μη-γραμμικές,  $x$  και  $y$  αντίστοιχα. Ο ίδιος διαχωρισμός εφαρμόζεται στους περιορισμούς του προβλήματος, με  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  να αποτελεί το διάνυσμα των μη-γραμμικών συναρτήσεων του προβλήματος. Ομοίως, στην αντικειμενική συνάρτηση, το  $f(\mathbf{x})$  αντιπροσωπεύει το μη-γραμμικό κομμάτι της συνάρτησης, ενώ η υπόλοιπη περιέχει ένα γραμμικό συνδυασμό των μεταβλητών.

Το πρόβλημα του ελέγχου των πολλαπλών εκκρεμών (4.2) μορφοποιείται κατά την επίλυση του από το MINOS ως εξής

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{u}}{\text{minimize}} \quad & f(\mathbf{X}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{g}_n(\mathbf{X}) = \mathbf{0} \\ & \Gamma \mathbf{X} = \mathbf{0} \\ & \mathbf{b}_l \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{b}_u \end{aligned} \quad (4.4)$$

όπου με βάση την (3.41) και τις (3.94) και (3.95), προκύπτουν οι μη-γραμμικοί και γραμμικοί περιορισμοί αντίστοιχα

$$\mathbf{g}_n(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} g_{n11} \\ \vdots \\ g_{n1c_1} \\ \vdots \\ g_{nn_e 1} \\ \vdots \\ g_{nn_e c_{ne}} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{E}}_1 & \mathbf{E}_2 & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{E}_{n_e-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \tilde{\mathbf{E}}_{n_e-1} & \mathbf{E}_{n_e} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

όπου συμπεριλαμβάνονται  $n_e$  μηδενικές στήλες στο τέλος του μητρώου, αφού ισχύει  $\frac{\partial \mathbf{g}_{li}}{\partial u_i} = \frac{\partial \mathbf{g}_{ci}}{\partial u_i} = \mathbf{0}$ . Το μοντέλο προβλήματος (4.4) θα χρησιμοποιηθεί παρακάτω για την περιγραφή της διαδικασίας επίλυσης. Όπως αναλύεται στο [11], η διαδικασία που ακολουθεί ο αλγόριθμος του MINOS για προβλήματα με μη-γραμμικούς περιορισμούς, έχει ως βασικό χαρακτηριστικό τη μέθοδο της προβαλλόμενης συνάρτησης Lagrange (projected Lagrangian method). Η μέθοδος αυτή βασίζεται στις μείζονες επαναλήψεις (major iterations). Σε κάθε μείζονα επανάληψη, γραμμικοποιούνται οι μη-γραμμικοί περιορισμοί

$$\bar{\mathbf{g}}_n(\mathbf{X}, \mathbf{X}_k) = \mathbf{g}_n(\mathbf{X}_k) + \mathbf{G}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_k) \equiv \bar{\mathbf{g}}_n = \mathbf{g}_{nk} + \mathbf{G}_k(\mathbf{X} - \mathbf{X}_k) \quad (4.7)$$

όπου το σημείο γραμμικοποίησης,  $\mathbf{X}_k$  είναι μία εκτίμηση των μεταβλητών κατάστασης  $\mathbf{X}$ , το  $\boldsymbol{\lambda}_k$ , μία εκτίμηση των πολλαπλασιαστών Lagrange, κατά την  $k$  σε σειρά μείζονα επανάληψη και το  $\mathbf{G}_k$ , η τιμή της Ιακωβιανής των περιορισμών, όπως αυτή υπολογίσθηκε για κάθε στοιχείο στην (3.92). Προκύπτει έτσι το γραμμικοποιημένο υποπρόβλημα της επανάληψης

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{u}}{\text{minimize}} \quad & L(\mathbf{X}, \mathbf{X}_k, \boldsymbol{\lambda}_k, \rho) = f(\mathbf{X}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}_{nd} + \frac{1}{2} \rho_k \|\mathbf{g}_{nd}\|^2 \\ \text{s.t.} \quad & \bar{\mathbf{g}}_n(\mathbf{X}) = \mathbf{0} \\ & \Gamma \mathbf{X} = \mathbf{0} \\ & \mathbf{b}_l \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{b}_u \end{aligned} \quad (4.8)$$

όπου  $\mathbf{g}_{nd} = \mathbf{g}_n - \bar{\mathbf{g}}_n$  είναι η διαφορά ανάμεσα στην ακριβή τιμή των περιορισμών  $\mathbf{g}_{nk}$  και στην γραμμικοποίηση αυτών. Η αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος ονομάζεται επαυξημένη Lagrangian και αποτελείται από τη συνάρτηση Lagrange (ή Lagrangian), όπως αυτή ορίσθηκε στην ενότητα 3.3.1, και μία τετραγωνική συνάρτηση ποινής (quadratic penalty function).

Για την επίλυση του γραμμικοποιημένου υποπρόβληματος (4.8) εφαρμόζεται η μέθοδος της μειωμένης κλίσης (reduced gradient method). Στη γενική περίπτωση ύπαρξης περιορισμών ανισοτήτων, εισάγονται μεταβλητές χαλαρότητας (slack variables), ώστε αυτοί να μετατραπούν σε ισότητες. Το παραπάνω βήμα παραλείπεται εδώ, επομένως οι περιορισμοί λαμβάνουν τη μορφή

$$\begin{pmatrix} \mathbf{G}_k \\ \Gamma \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_k \mathbf{X}_k - \mathbf{g}_{nk} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

η γενική μορφή του παραπάνω γράφεται  $\mathbf{AX} = \mathbf{b}$  και το MINOS, κατά τη μέθοδο της μειωμένης κλίσης, τη μετασχηματίζει σε

$$\mathbf{Bx}_b + \mathbf{Sx}_s + \mathbf{Nx}_n = \mathbf{b} \quad (4.10)$$

όπου  $\mathbf{x}_b$  και  $\mathbf{x}_n$  είναι οι βασικές και οι μη-βασικές μεταβλητές αντίστοιχα, όπως αυτές χρησιμοποιούνται κατά την μέθοδο Simplex, στο γραμμικό προγραμματισμό. Σε ένα εφικτό σημείο (feasible point), οι βασικές μεταβλητές βρίσκονται μεταξύ των ορίων τους,  $b_l$  και  $b_u$ , ενώ οι μη-βασικές είναι ίσες με την τιμή ενός ορίου. Εφικτό ονομάζεται ένα σημείο  $\mathbf{x}$  που ικανοποιεί τους περιορισμούς  $\mathbf{AX} = \mathbf{b}$ . Το διάνυσμα  $\mathbf{x}_s$  περιέχει τις υπερβασικές μεταβλητές (superbasic variables), οι οποίες εκφράζουν ουσιαστικά τους βαθμούς ελευθερίας του συστήματος, καθώς κινούνται ανεξάρτητα προς την κατεύθυνση μείωσης της αντικειμενικής συνάρτησης και στη συνέχεια προσαρμόζεται η τιμή των βασικών μεταβλητών, ώστε να ικανοποιούνται και πάλι οι περιορισμοί. Εαν σε κάποιο βήμα της διαδικασίας, μία βασική ή υπερβασική μεταβλητή γίνει ίση με κάποιο από τα όριά της, τότε αυτή

μεταφέρεται στο διάνυσμα μη βασικών μεταβλητών και αλλάζουν οι διαστάσεις των ανάλογων μητρώων.

Στο παρόν πρόβλημα, οι υπερβασικές μεταβλητές ταυτίζονται με τις δράσεις ελέγχου  $u_i$ . Σε κάθε σπιγμή μόνο το διάνυσμα ακολουθίας ελέγχου  $u$ , από το διευρυμένο διάνυσμα κατάστασης  $X$  του προβλήματος, χρησιμοποείται ενεργά στη βελτιστοποίηση. Η παραπάνω προσέγγιση είναι ανάλογη με αυτή που παρουσιάζεται στο [5], όπου με αντιστροφή των περιορισμών, δημιουργούνται πεπλεγμένες συναρτήσεις (implicit functions), της μορφής  $X(u)$ , οδηγώντας σε μείωση της διάστασης του προβλήματος βελτιστοποίησης από  $\underset{X,u}{\text{minimize}}$  σε  $\underset{u}{\text{minimize}}$ .

Σε κάθε βήμα της μεθόδου μειωμένης κλίσης, το οποίο το MINOS ονομάζει *δευτερεύουσα επανάληψη* (*minor iteration*), ορίζεται το μητρώο

$$Z = \begin{bmatrix} -B^{-1}S \\ I \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

το οποίο επιλέγεται έτσι ώστε να πραγματοποιούνται οικονομικά οι υπολογισμοί της μειωμένης κλίσης  $d_s$  και της εφικτής κατεύθυνσης καθόδου (feasible descent direction)  $p$ , μέσω LU παραγοντοποίησης του μητρώου  $B$ . Το διάνυσμα κατεύθυνσης και το διάνυσμα κλίσης της επαυξημένης συνάρτησης Lagrange γράφονται στη μορφή  $p = [p_B \ p_S \ p_N]^T$  και  $\tilde{L} = [\tilde{L}_B \ \tilde{L}_S \ \tilde{L}_N]^T$  αντίστοιχα. Ισχύουν οι συμβολισμοί

$$\tilde{L} = \frac{\partial L}{\partial X} = \tilde{f}(X) - (\mathbf{G} - \mathbf{G}_k)^T [\lambda_k - \rho(g_n - \bar{g}_n)] \quad (4.12)$$

$$\tilde{f}(X) = \begin{bmatrix} \tilde{f}_{x_1} \\ \vdots \\ \tilde{f}_{x_{n_e}} \\ \tilde{f}_{u_1} \\ \vdots \\ \tilde{f}_{u_{n_e}} \end{bmatrix}, \quad \text{από την (3.105)}$$

Στη συνέχεια της ίδιας δευτερεύουσας επανάληψης, υπολογίζονται οι πολλαπλασιαστές Lagrange από την εξίσωση

$$\mathbf{B}^T \lambda = g_B \quad (4.13)$$

και το διάνυσμα μειωμένης κλίσης από

$$d_S = Z^T \tilde{L} \quad (4.14)$$

Εάν το μέτρο της κλίσης  $\|d\|_S$  είναι αρκετά μικρό, υπολογίζονται μερικές ή όλες

οι τιμές μειωμένου κόστους  $d_N = g_N - \mathbf{N}^T \lambda$ , ώστε να αποφασισθεί αν κάποια μη-βασική μεταβλητή είναι κατάλληλη για να εισαχθεί στο διάνυσμα υπερβασικών μεταβλητών. Αφού οριστηκοποιηθεί ο αριθμός των υπερβασικών μεταβλητών για τη συγκεκριμένη επανάληψη, προσδιορίζεται η κατεύθυνση προς την οποία ελαττώνεται η αντικειμενική συνάρτηση,  $p$ , αφού υπολογιστούν οι αντίστοιχες συνιστώσες των βασικών και υπερβασικών μεταβλητών από τις σχέσεις

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} p_s = -d_S \quad (4.15)$$

$$\mathbf{B}^T p_B = -\mathbf{S} p_S \quad (4.16)$$

όπου  $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{Z}^T \mathbf{H} \mathbf{Z}$  είναι η προσέγγιση της μειωμένης Εσσιανής, μέσω της μεθόδου quasi-Newton, με  $\mathbf{H}$  την Εσσιανή της επαυξημένης συνάρτησης Lagrange. Το μητρώο  $\mathbf{R}$  είναι πυκνό (dense), άνω τριγωνικό, διάστασης τουλάχιστον ίσης με τον αριθμό των υπερβασικών μεταβλητών.

Αφού υπολογιστεί η μέγιστη τιμή βήματος  $\alpha_{max}$ , έτσι ώστε οι μεταβλητές  $\mathbf{X} + \alpha_{max} \mathbf{p}$  να βρίσκονται εντός των ορίων τους, εφαρμόζεται η μονοδιάστατη γραμμική αναζήτηση (line-search) της μορφής

$$\begin{aligned} \underset{\alpha}{\text{minimize}} \quad & L(\mathbf{X} + \alpha \mathbf{p}, \mathbf{X}_k, \boldsymbol{\lambda}_k, \rho) \\ \text{s.t.} \quad & 0 \leq \alpha \leq \alpha_{max} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Εφαρμόζεται το μέγεθος βήματος  $\alpha$  που προκύπτει και ενημερώνεται το μητρώο  $\mathbf{R}$ , λόγω του βήματος. Εάν κάποια βασική μεταβλητή έχει φτάσει σε όριο, εκλέγεται μία υπερβασική μεταβλητή για να μεταφερθεί στο διάνυσμα των βασικών και η βασική μεταβλητή εισάγεται στις μη-βασικές.

Με την ολοκλήρωση των δευτερεύουσων επαναλήψεων της μεθόδου μειωμένης κλίσης, είναι διαθέσιμη μία προσεγγιστική λύση του γραμμικοποιημένου υποπροβλήματος (4.8),  $(\bar{\mathbf{X}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}})$ . Επομένως, μπορεί να βρεθεί μία κατεύθυνση αναζήτησης λύσης  $(\Delta \mathbf{X}, \Delta \boldsymbol{\lambda}) = (\bar{\mathbf{X}} - \mathbf{X}_k, \bar{\boldsymbol{\lambda}} - \boldsymbol{\lambda}_k)$  και ένα μέγεθος βήματος  $\sigma$  προς αυτήν την κατεύθυνση, ώστε κάποια συνάρτηση αξίας (merit function)  $M(\mathbf{X}, \boldsymbol{\lambda})$  να έχει κατάλληλη τιμή στο σημείο  $(\mathbf{X}_k + \sigma \Delta \mathbf{X}, \boldsymbol{\lambda}_k + \sigma \Delta \boldsymbol{\lambda})$ . Εφαρμόζεται, τέλος, το βήμα  $(\sigma \Delta \mathbf{X}, \sigma \Delta \boldsymbol{\lambda})$  και προκύπτουν οι αρχικές τιμές της επόμενης μείζονος επανάληψης,  $(\mathbf{X}_{k+1}, \boldsymbol{\lambda}_{k+1})$ . Στο σημείο, όπου δεν είναι δυνατές περαιτέρω μεταθέσεις μεταβλητών, ώστε να υπολογιστεί μία νέα κατεύθυνση μεταβολής της τιμής της επαυξημένης συνάρτησης Lagrange, ενώ παράλληλα να ικανοποιούνται οι περιορισμοί, η λύση θεωρείται βέλτιστη.

Εάν παρατηρηθεί ότι η ακολουθία  $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\lambda})$  συγκλίνει προς κάποιο ελάχιστο σημείο, η τιμή του δείκτη ποινής  $\rho$  μηδενίζεται, ώστε να ελαχιστοποιηθεί η συνάρτηση Lagrange, όπως ζητείται. Σε περιπτώσεις όπου το σημείο γραμμικοποίησης  $\mathbf{X}_k$  βρίσκεται σε ακατάλληλη θέση, σε σχέση με τη βέλτιστη λύση  $\mathbf{X}^*$ , η μέθοδος της

προβαλλόμενης συνάρτησης Lagrange αδυνατεί να συγκλίνει σε ένα ελάχιστο, π.χ κατά τη γραμμικοποίηση κοντά σε ένα σημείο σέλας (saddle point). Μεγάλες τιμές του  $\rho$  σε τέτοιες περιπτώσεις, επιβάλλουν επιθυμητές ιδιότητες καμπυλότητας στη συνάρτηση Lagrange, μέσω του τετραγωνικού όρου ποινής που την επαυξάνει.

### 4.1.2 Αλγόριθμος IPOPT 3.12

Για την απλοποίηση της περιγραφής του αλγορίθμου, το (4.2) μετασχηματίζεται σε

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_e}}{\text{minimize}} \quad & f(\mathbf{X}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{0} \\ & \mathbf{X} \leq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{4.18}$$

Το IPOPT (Interior Point OPTimizer), όπως αναλύεται στο [15], χρησιμοποιεί τη μέθοδο φράγματος (*barrier method*) για την επίλυση του προβλήματος (4.18), κατά την οποία λύνεται μία σειρά προβλημάτων της μορφής

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_e}}{\text{minimize}} \quad & \phi_\mu = f(\mathbf{X}) - \mu \sum_{i=1}^{n_x+n_e} \ln(X^{(i)}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{4.19}$$

για μία φθίνουσα ακολουθία τιμών της παραμέτρου φράγματος (*barrier parameter*)  $\mu$ , η οποία συγκλίνει στο μηδέν. Το  $X^{(i)}$  αντιπροσωπεύει το  $i$  στοιχείο του διευρυμένου διανύσματος κατάστασης. Εισάγονται οι πολλαπλασιαστές για τις ανισότητες  $\mathbf{X} \leq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{z}$ , στη συνάρτηση Lagrange. Η επαναληπτική επίλυση του (4.19) για κάθε τιμή του  $\mu$  είναι ισοδύναμη με την εφαρμογή μιας ομοτοπικής μεθόδου (homotopy method) στο σύστημα

$$\nabla_{\mathbf{X}} f(\mathbf{X}) + \boldsymbol{\lambda}^T \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{g}(\mathbf{X}) - \mathbf{z} = \mathbf{0} \tag{4.20}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{0} \tag{4.21}$$

$$\mathbf{X}_d \mathbf{Z}_d \mathbf{e} - \mu \mathbf{e} = \mathbf{0} \tag{4.22}$$

όπου  $\mathbf{X}_d := diag(\mathbf{X})$ ,  $\mathbf{Z}_d := diag(\mathbf{z})$ ,  $\mathbf{e}$  ένα διάνυσμα μονάδων, κατάλληλων διαστάσεων και  $\mu$  η ομοτοπική παράμετρος που φθίνει προς το μηδέν. Κατά τη μέθοδο φράγματος, επιλύεται το πρόβλημα (4.19) για κάποια σταθερή τιμή του  $\mu$ , στη συνέχεια μειώνεται η τιμή του και επιλύεται εκ νέου το πρόβλημα με βάση την προσεγγιστική λύση του προηγούμενου. Το σφάλμα βέλτιστου (*optimality error*) ορίζεται ως

$$E_\mu(\mathbf{X}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{z}) := \max \left\{ \frac{\|\nabla_{\mathbf{X}} f(\mathbf{X}) + \boldsymbol{\lambda}^T \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{g}(\mathbf{X}) - \mathbf{z}\|_\infty}{s_d}, \|\mathbf{g}(\mathbf{X})\|_\infty, \frac{\|\mathbf{X}_d \mathbf{Z}_d \mathbf{e} - \mu \mathbf{e}\|_\infty}{s_c} \right\} \tag{4.23}$$

με τις παραμέτρους κλίμακας  $s_d$ ,  $s_c \geq 1$ . Η συνθήκη τερματισμού, την οποία πρέπει να ικανοποιεί μία προσεγγιστική λύση,  $(\tilde{\mathbf{X}}_*, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_*, \tilde{\mathbf{z}}_*)$ , είναι

$$E_0(\tilde{\mathbf{X}}_*, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_*, \tilde{\mathbf{z}}_*) \leq \epsilon_{tol} \quad (4.24)$$

όπου  $\epsilon_{tol}$ , η ανοχή σφάλματος, όπως αυτή εισάγεται από τον χρήστη. Κατά την επίλυση του προβλήματος (4.19) για κάθε  $\mu_j$ , υπολογίζονται επαναληπτικά οι κατευθύνσεις  $(\mathbf{d}_k^X, \mathbf{d}_k^\lambda, \mathbf{d}_k^z)$  αναζήτησης της προσεγγιστικής λύσης για το παρών βήμα  $j$ ,  $(\tilde{\mathbf{X}}_{*,j+1}, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{*,j+1}, \tilde{\mathbf{z}}_{*,j+1})$ , όπου  $k$ , ο δείκτης της επανάληψης. Ο υπολογισμός πραγματοποιείται μέσω γραμμικοποίησης του συστήματος των (4.20), (4.21), (4.22), γύρω από το σημείο  $(\mathbf{X}_{k,j}, \boldsymbol{\lambda}_{k,j}, \mathbf{z}_{k,j})$ , ως εξής

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_k & \mathbf{A}_k & -\mathbf{I} \\ \mathbf{A}_k^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_{dk} & \mathbf{0} & \mathbf{X}_{dk} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_k^X \\ \mathbf{d}_k^\lambda \\ \mathbf{d}_k^z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{X}} f(\mathbf{X}_k) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{A}_k - \mathbf{z}_k \\ g(\mathbf{X}_k) \\ \mathbf{X}_k \mathbf{Z}_k \mathbf{e} - \mu_j \mathbf{e} \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

όπου  $\mathbf{A}_k := \nabla_{\mathbf{X}} g(\mathbf{X}_k)$  η Ιακωβιανή των περιορισμών και  $\mathbf{W}_k := \nabla_{\mathbf{XX}}^2 L(\mathbf{X}_k, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{z}_k)$  η Εσσιανή της συνάρτησης Lagrange  $L(\mathbf{X}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{z}) = f(\mathbf{X}) + \boldsymbol{\lambda}^T g(\mathbf{X}) - \mathbf{z}^T \mathbf{X}$  του απλοποιημένου προβλήματος (4.18). Εύκολα φαίνεται πως  $\mathbf{W}_k = \frac{\partial (\nabla_{\mathbf{X}} \Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}))^T}{\partial \mathbf{X}}$ , όπως αυτή υπολογίστηκε στην (3.160). Αντί για την άμεση επίλυση του παραπάνω ασύμμετρου γραμμικού συστήματος, η μέθοδος που χρησιμοποιείται επιλύει αρχικά το συμμετρικό γραμμικό σύστημα μικρότερης διάστασης

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_k + \Sigma_k + \delta_w \mathbf{I} & \mathbf{A}_k \\ \mathbf{A}_k^T & -\delta_c \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_k^X \\ \mathbf{d}_k^\lambda \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{X}} \phi_{\mu_j}(\mathbf{X}_k) + \boldsymbol{\lambda}_k^T \mathbf{A}_k \\ g(\mathbf{X}_k) \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

$$\delta_w, \delta_c \geq 0 \quad (4.27)$$

όπου  $\Sigma_k = \mathbf{X}_{dk}^{-1} \mathbf{Z}_{dk}$ . Το βαθμωτό μέγεθος  $\delta_w$  εισάγεται στο σύστημα για να επιβεβαιώσει ότι το μητρώο  $\mathbf{W}_k + \Sigma_k + \delta_w \mathbf{I}$  είναι θετικά ορισμένο, ώστε να εξασφαλισθούν ορισμένες επιθυμητές ιδιότητες καθόδου κατά την γραμμική αναζήτηση (line-search) παρακάτω, και το  $\delta_c$ , ώστε το μητρώο μετασχηματισμού των διανυσμάτων κατεύθυνσης να μην είναι ιδιάζων (singular), σε περίπτωση όπου το  $\mathbf{A}_k$  δεν έχει πλήρη τάξη (full rank).

Αφού προσδιοριστούν οι κατευθύνσεις προς τις οποίες θα κινηθούν οι μεταβλητές, εφαρμόζεται ο αλγόριθμος γραμμικής αναζήτησης με φίλτρο (filter line-search algorithm), για να επιλεχθεί το κατάλληλο μέγεθος βήματος, έτσι ώστε

$$\mathbf{X}_{k+1} := \mathbf{X}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k^X \quad (4.28)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{k+1} := \boldsymbol{\lambda}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k^\lambda \quad (4.29)$$

$$\mathbf{z}_{k+1} := \mathbf{z}_k + \alpha_k^z \mathbf{d}_k^z \quad (4.30)$$

Χρησιμοποιείται διαφορετικό βήμα για τους πολλαπλασιαστές  $\mathbf{z}$ , καθώς παρατη-

ρίθηκε εμπειρικά ότι έτσι περιορίζεται λιγότερο το μέγεθος βήματος στις υπόλοιπες μεταβλητές. Κατά τη μέθοδο γραμμικής αναζήτησης, θέτονται δύο παράλληλοι στόχοι: η ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης  $\phi_{\mu_j}(\mathbf{X})$  και της παραβίασης των περιορισμών (constraint violation)  $\theta(\mathbf{X}) := \|\mathbf{g}(\mathbf{X})\|$ . Ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί την ακολουθία μεγεθών βήματος  $\alpha_{k,l} = 2^{-l}\alpha_k^{max}$ ,  $l = 0, 1, 2, \dots$  και εξετάζει επαναληπτικά, με βάση τους δύο στόχους, εάν το δοκιμαστικό σημείο  $\mathbf{X}_k(\alpha_{k,l})$  είναι το βέλτιστο.

Το ζεύγος τιμών  $(\theta(\mathbf{X}_k(\alpha_{k,l})), \phi_{\mu_j}(\mathbf{X}_k(\alpha_{k,l})))$  για κάθε σημείο, το οποίο δεν πληροί τις προϋποθέσεις που θέτει ο αλγόριθμος, εισάγεται στο φίλτρο  $F$ . Με αυτόν τον τρόπο αποφεύγεται η επιστροφή της διαδικασίας βελτιστοποίησης σε κοντινά σημεία του  $\mathbf{X}_k$ . Κατά την έναρξη της διαδικασίας και σε κάθε νέο βήμα  $j$  της μεθόδου το φίλτρο αρχικοποιείται ως

$$F_0 := \left\{ (\theta, \phi) \in \mathbb{R}^2 : \theta \geq \theta^{max} \right\} \quad (4.31)$$

όπου η μέγιστη παραβίαση των περιορισμών  $\theta^{max}$  παρέχεται από τον χρήστη. Στην περίπτωση που το πρώτο μέγεθος βήματος της  $k$  επανάληψης προσέγγισης λύσης ενός εκ των (4.19) προβλημάτων,  $\alpha_{k,0}$ , απορριφθεί από τον αλγόριθμο γραμμικής αναζήτησης, εφαρμόζεται μία διόρθωση δεύτερης τάξης (second-order correction)  $\mathbf{d}_k^{X,soc}$  στο βήμα  $\tilde{\mathbf{d}}_k^X = \alpha_{k,0} \mathbf{d}_k^X$ , η οποία υπολογίζεται ως εξής

$$\mathbf{A}_k \mathbf{d}_k^{X,soc} + \mathbf{g}(\mathbf{X}_k + \alpha_{k,0} \mathbf{d}_k^X) = \mathbf{0} \quad (4.32)$$

και η νέα κατεύθυνση αναζήτησης προκύπτει ως

$$\mathbf{d}_k^{X,cor} = \alpha_{k,0} \mathbf{d}_k^X + \mathbf{d}_k^{X,soc} \quad (4.33)$$

Με αυτόν τον τρόπο, χρησιμοποιείται η Ιακωβιανή για την εφαρμογή ενός επιπλέον βήματος τύπου Newton, στοχεύοντας στη μείωση της μη-εφικτότητας (infeasibility) των περιορισμών στο σημείο  $\mathbf{X}_k + \tilde{\mathbf{d}}_k^X$ .

Το πλήρες πρόβλημα (4.2), με όλους τους περιορισμούς ανισοτήτων, οδηγεί στο εξής πρόβλημα κατά τη μέθοδο φράγματος

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{ne}}{\text{minimize}} \quad & \phi_{\mu_j}(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}) - \mu_j \sum_{i \in \mathcal{I}_L} \ln(X^{(i)} - \mathbf{X}_L^{(i)}) - \mu_j \sum_{i \in \mathcal{I}_U} \ln(X_U^{(i)} - \mathbf{X}^{(i)}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.34)$$

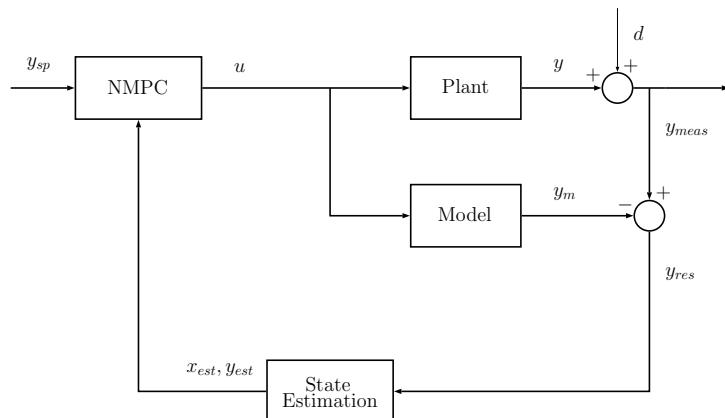
όπου  $\mathcal{I}_L = \{i : X_L^{(i)} \neq -\infty\}$  και  $\mathcal{I}_U = \{i : X_U^{(i)} \neq \infty\}$ . Εισάγονται οι πολλαπλασιαστές των άνω και κάτω ορίων,  $z_U^{(i)}$  και  $z_L^{(i)}$  αντίστοιχα, στην συνάρτηση Lagrange  $L(\mathbf{X}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{z}_U, \mathbf{z}_L, \boldsymbol{\mu})$ . Η επίλυση του (4.34) είναι παρόμοια με αυτήν που περιγράφηκε παραπάνω για το πρόβλημα (4.18).

Αναλυτικές πληροφορίες σχετικά με την εκλογή και τον υπολογισμό των παραμέτρων και την εφαρμογή συνθηκών του αλγορίθμου του IPOPT, υπάρχουν στο [15]. Το IPOPT, χειρίζεται, καθ'όλη τη διάρκεια επίλυσης, την Εσσιανή στην πλήρη διάστασή της, σε αντίθεση με το MINOS, όπου προσεγγίζεται μία μειωμένη Εσσιανή, διάστασης ανάλογης των υπερβασικών μεταβλητών. Ο αναλυτικός προσδιορισμός της Εσσιανής της συνάρτησης Lagrange και η εισαγωγή της στον αλγόριθμο, στη μορφή αραιού μητρώου, ευνοεί την ακρίβεια της μεθόδου. Επιπλέον η βελτιστοποίηση στο IPOPT συμβαίνει ταυτόχρονα στο πλήρες διάνυσμα κατάστασης  $X$ , σε αντίθεση με τον διαχωρισμό σε ανεξάρτητες και μη μεταβλητές του MINOS και τη βελτιστοποίηση ως προς τις υπερβασικές μεταβλητές.

Το [11] αναφέρει πως δεν είναι γνωστό πως μπορεί να ορισθεί συνάρτηση αξίας  $M(X, \lambda)$ , η οποία να μειώνεται σε κάθε μείζονα επανάληψη, ώστε να επιλέγεται κατάλληλο μέγεθος βήματος κατά την μέθοδο προβαλλόμενης συνάρτησης Lagrange. Επομένως, η εφαρμογή της τετραγωνικής συνάρτησης σφάλματος είναι ο μόνος μηχανισμός που συμβάλλει ενεργά στη σύγκλιση από κάποιο αυθαίρετο αρχικό σημείο. Το IPOPT, από την άλλη πλευρά, θέτει ένα σύνολο συνθηκών και σταθμισμένων μεταβλητών παράλληλα με την ύπαρξη του φίλτρου  $F$  και της διόρθωσης δεύτερης τάξης, ώστε να εκλέγεται το βέλτιστο δυνατό μέγεθος βήματος.

## 4.2 Προσομοίωση συστήματος κλειστού βρόχου

Το σύστημα κλειστού βρόχου κατά τον μη-γραμμικό προβλεπτικό έλεγχο των  $n$  εκκρεμών αναπαρίσταται στο παρακάτω σχήμα Η βαθμίδα "NMPC" περιλαμβά-



Σχήμα 4.1: Σύστημα NMPC κλειστού βρόχου

νει τον αλγόριθμο επίλυσης του MINOS ή IPOPT, όπως αυτοί παρουσιάστηκαν παραπάνω. Το "Plant" συμβολίζει το πραγματικό σύστημα των εκκρεμών με το αμάξωμα, το οποίο στην προκειμένη περίπτωση αντιπροσωπεύεται από τον αλγόριθμο επίλυσης συστημάτων διαφορικών αλγεβρικών εξισώσεων DASSL ([12]). Το

"Model" είναι το σύνολο των αγεθρικών εξισώσεων, το οποίο αποτελεί το μοντέλο της προσέγγισης του πραγματικού συστήματος, σύμφωνα με τη μέθοδο συντοπισμού. Ο αλγόριθμος "State estimation" αφορά την εκτίμηση καταστάσεων, για τις οποίες δεν υπάρχουν διαθέσιμες μετρήσεις, όπως, παραδείγματος χάρη, είναι ο αλγόριθμος του φίλτρου Kalman, ενώ η είσοδος  $d$  αντιπροσωπεύει τον πιθανό θόρυβο στις μετρούμενες μεταβλητές. Κατά την παρούσα ανάλυση, θεωρούνται όλες οι μεταβλητές μετρήσιμες, επομένως οι μεταβλητές εξόδου είναι άμεσα συδεόμενες με τις μεταβλητές κατάστασης, όπως αναφέρεται στο υποκεφάλαιο 3.1, και δεν υπάρχει θόρυβος στην έξοδο του πραγματικού συστήματος. Το διάνυσμα  $y_{res} = y_{meas} - y_m$  αντιπροσωπεύει το σφάλμα ανάμεσα στην έξοδο του πραγματικού συστήματος και του μοντέλου και λειτουργεί σαν κριτήριο της ακρίβειας του τελευταίου. Το διάνυσμα αυτό δέχεται σαν είσοδο ο αλγόριθμος του NMPC, σε κάθε διάστημα δειγματοληψίας, μετά το πρώτο, και επιλύει το πρόβλημα βελτιστοποίησης, έχοντας σαν αρχική εκτίμηση την λύση του προηγούμενου διαστήματος (διαδικασία "Warm Start" του εκάστοτε αλγορίθμου). Η βελτιστοποίηση πραγματοποιείται με στόχο την επίτευξη της επιθυμητής τροχιάς ή κατάστασης,  $y_{sp}$ .

#### 4.2.1 Αριθμητικά δεδομένα

Οι φυσικές παράμετροι του συστήματος που χρησιμοποιούνται κατά την αριθμητική επίλυση έχουν ως εξής

$$\begin{aligned} m_c &= 10.0 \text{ kg} \\ m_i &= 2.5 \text{ kg}, \quad \text{για κάθε } i \in \{1, 2, \dots, n\} \\ l_i &= 1.0 \text{ m} \\ b &= 0.2 N \frac{s}{m} \\ g &= 9.81 \frac{m}{s^2} \end{aligned}$$

Εκλέγονται επίσης οι παρακάτω παράμετροι διακριτοποίησης του χρονικού ορίζοντα

$$\begin{aligned} n_e &= 20 \\ c_i &= 4, \quad \text{για κάθε } i \in \{1, 2, \dots, n_e\} \\ k &= 4 \\ \delta t &= 0.1 \text{ s} \end{aligned} \tag{4.35}$$

Σε κάθε πεπερασμένο στοιχείο υπάρχει και το μηδενικό σημείο συντοπισμού,  $x_{i0}$  και εκλέγεται ο μικρότερος δυνατός βαθμός πολυωνύμων Lagrange,  $k = 4$ , για το σύνολο των  $c_i + 1$  σημείων. Σε μία πρακτική εφαρμογή, θα ήταν δόκιμη η παρα-

τήρηση της δυναμικής συμπεριφοράς του συστήματος αρχικά και η τοποθέτηση κατάλληλου αριθμού σημείων συντοπισμού σε κάθε πεπερασμένο στοιχείο στη συνέχεια, ανάλογα με την ένταση και τη συχνότητα των μεταβολών στο εκάστοτε χρονικό διάστημα. Εδώ, χρησιμοποιείται ο ίδιος αριθμός σημείων συντοπισμού,  $c_i = 4$ , σε όλα τα στοιχεία, για την διαμόρφωση ενός θεωρητικού μοντέλου, με ικανοποιητικά μεγάλη κλίμακα. Το διάστημα δειγματοληψίας,  $\delta t = 0.1 s$ , είναι ανάλογο των διαστημάτων σε εφαρμογές ελέγχου μηχανικών συστημάτων πραγματικού χρόνου.

Τα άνω και κάτω όρια των ανισοτικών περιορισμών  $b_L \leq X \leq b_u$  του προβλήματος (4.2) φράσσουν την κάθε μεταβλητή κατάστασης σύμφωνα με τις ανισότητες

$$\begin{aligned} -10.0 &\leq \dot{x}_c \leq 10.0 \quad \left[ \frac{m}{s} \right] \\ -3.0 &\leq \omega_i \leq 3.0 \quad \left[ \frac{rad}{s} \right], \quad \text{για κάθε } i \in \{1, 2, \dots, n\} \\ -100.0 &\leq x_c \leq 100.0 \quad [m] \\ -\frac{3\pi}{8} &\leq \theta_i \leq \frac{3\pi}{8} \quad [rad] \\ -100.0 &\leq u_j \leq 100.0 \quad [N], \quad \text{για κάθε } j \in \{1, 2, \dots, n_e\} \\ \text{όπου } \omega_i &\equiv \dot{\theta}_i \end{aligned} \tag{4.36}$$

Τέλος, διαμορφώνονται τα μητρώα στάθμισης της αντικειμενικής συνάρτησης (3.35), ως εξής

$$\mathbf{Q}_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{a}{\omega_{max}^2} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{a}{\omega_{max}^2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{a}{\theta_{max}^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{a}{\theta_{max}^2} \end{bmatrix} \tag{4.37}$$

$$\mathbf{Q}_f = 1.2 \mathbf{Q}_x \tag{4.38}$$

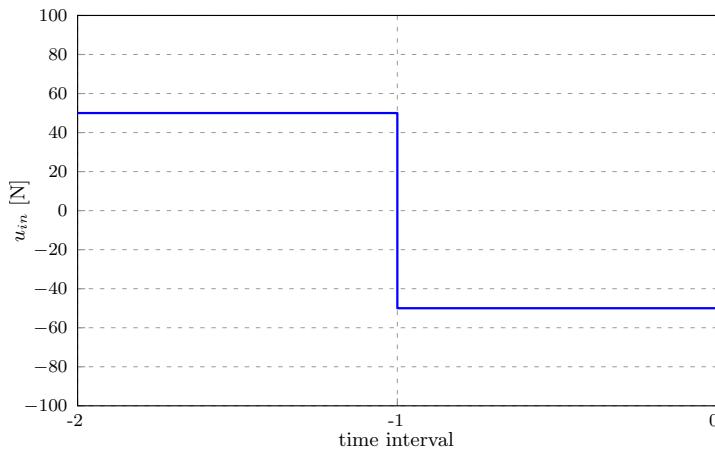
$$Q_u = \frac{b}{u_{max}^2} \tag{4.39}$$

όπου  $\omega_{max} = 3.0 \frac{rad}{s}$  και  $\theta_{max} = \frac{3\pi}{8} rad$ . Οι τιμές των μητρώων εκλέγονται έτσι, ώστε να κανονικοποιούνται οι όροι συμβολής των γωνιακών ταχυτήτων, γωνιών και δράσεων ελέγχου και να ελέγχεται ευκολότερα το μέτρο της επίδρασης κάθε όρου στην αντικειμενική συνάρτηση, μέσω των συντελεστών  $a$  και  $b$ . Για τις προσομοιώσεις που έγιναν, ισχύει  $a = 5$  και  $b = 2$ . Το μητρώο  $\mathbf{Q}_f$  ορίζεται μεγαλύτερο από το  $\mathbf{Q}_x$ , ώστε να τονιστεί η τελική επιθυμητή κατάσταση.

### 4.2.2 Αποτελέσματα προσομοιώσεων

Αφού διαμορφώθηκε το σύστημα κλειστού 6ρόχου και επιλέχθηκαν οι αριθμητικές τιμές των παραμέτρων του προβλήματος μη-γραμμικού προγραμματισμού, διεξήχθησαν 6 παραδείγματα προσομοιώσεων. Τα παραδείγματα Προσ.1 - Προσ.4 αφορούν την επίλυση του προβλήματος για έναν αυξανόμενο αριθμό εκκρεμών, ενώ τα παραδείγματα προσομοιώσεων Προσ.5 και Προσ.6 εξετάζουν την επίδοση των δύο αλγορίθμων σε ένα περισσότερο απαιτητικό πρόβλημα, θέτοντας υψηλότερες τιμές στις αρχικές γωνίες των εκκρεμών. Όλες οι προσομοιώσεις πραγματοποιήθηκαν με συνολικό χρόνο ελέγχου  $10s$  και 100 περιόδους δειγματοληψίας. Για την πραγματοποίηση όλων των παραδειγμάτων προσομοίωσης χρησιμοποιήθηκε υπολογιστής με επεξεργαστή Intel Core 2 Duo, 2.66 GHz, και λειτουργικό σύστημα Mac Os X 10.9.5.

Όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 3.3.2, προκαλείται αρχικά μία διέγερση των εκκρεμών, μέσω της δύναμης  $u_{in}$  στο αμάξωμα, και οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος ελέγχου προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος εξισώσεων κίνησης με τη δεδομένη δύναμη  $u_{in}$ . Η αρχική διέγερση των εκκρεμών διατυπώνεται σχηματικά ως εξής

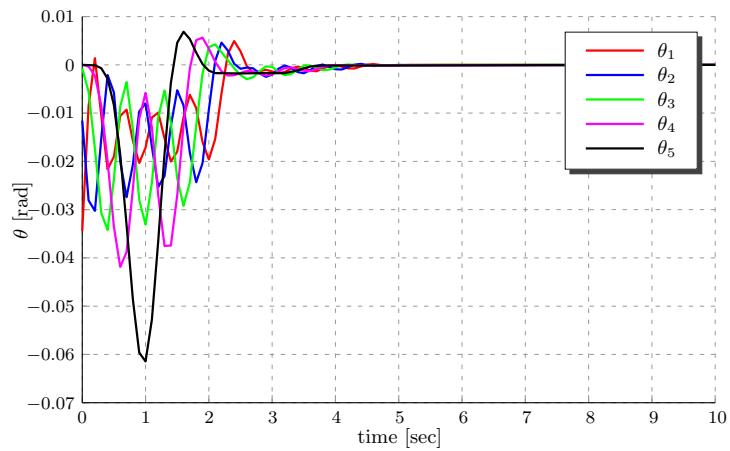


Σχήμα 4.2: Αρχική διέγερση εκκρεμών

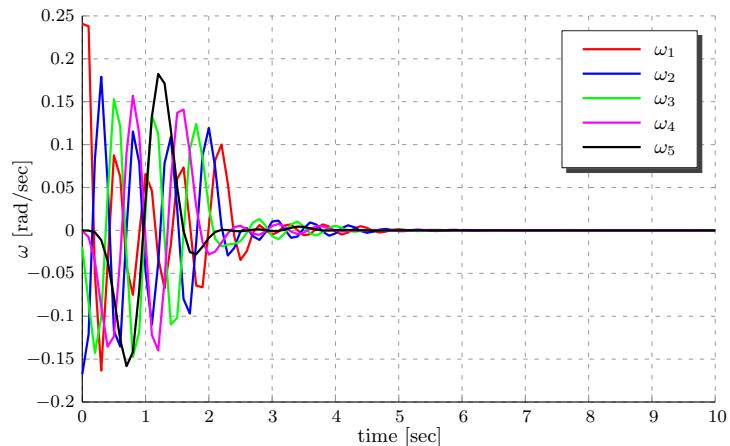
Επομένως, ισχύει ότι  $u_0 = -50 N$ . Στις Προσ.1 - Προσ.4, οι αλγόριθμοι των MINOS και IPOPT βρήκαν την ίδια λύση ως βέλτιστη, με διαφορετικούς χρόνους επίλυσης, οι οποίοι θα παρουσιασθούν μετά τα αποτελέσματα των δράσεων ελέγχου, γωνιακών ταχυτήτων και γωνιών σε κάθε μία προσομοίωση. Εφαρμόσθηκε η ίδια τιμή ανοχής βέλτιστης λύσης και ικανοποίησης των περιορισμών,  $10^{-8}$ , καθώς και ο ίδιος μέγιστος αριθμός επαναλήψεων, 1000, και στους δύο αλγορίθμους επίλυσης.

Στην Προσ.1, εξετάζεται ο έλεγχος 5 εκκρεμών ( $n=5$ ). Στο πρόβλημα μη-γραμμικού προγραμματισμού προκύπτουν  $n_e(c_i + 1)(2n + 2) + n_e = 980$  μεταβλητές, οι οποίες

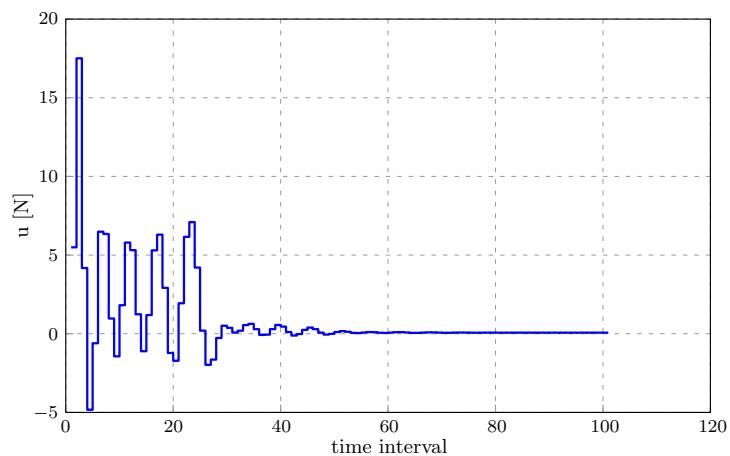
εμφανίζονται σε  $c_i n_e (2n + 2)/2 = 360$  μη-γραμμικές εξισώσεις. Το σύνολο των περιορισμών, συμπεριλαμβανομένων και των γραμμικών, θα είναι  $n_e(c_i+1)(2n+2) = 960$ , ίσο με τον συνολικό αριθμό των μεταβλητών κατάστασης σε κάθε σημείο συντοπισμού. Τα αποτελέσματα της Προσ.1 είναι



Σχήμα 4.3: Προσ.1 - Γωνίες εκκρεμών



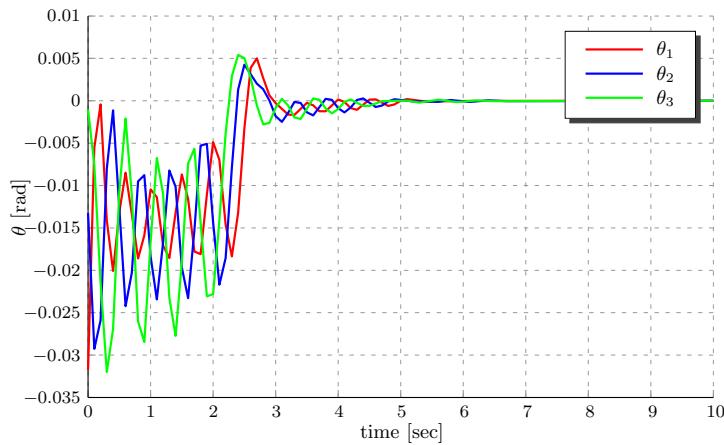
Σχήμα 4.4: Προσ.1 - Γωνιακές ταχύτητες εκκρεμών



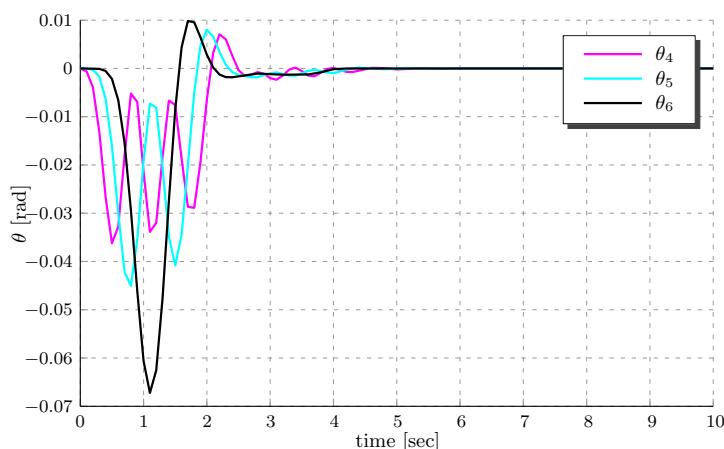
Σχήμα 4.5: Προσ.1 - Δράση ελέγχου

Όπως παρατηρείται στα διαγράμματα 4.3 και 4.4, ο ελεγκτής καταφέρνει να σταματήσει την κίνηση των εκκρεμών σε ικανοποιητικά μικρό χρονικό διάστημα, σε σχέση με τη διάρκεια του ελέγχου. Επιπλέον οι διαδοχικές δράσεις (σχήμα 4.5 δεν εμφανίζουν μεγάλες διαφορές, με μέγιστη τιμή  $\delta u \simeq 0.075\delta u_{max}$ , όπου  $\delta u_{max} = |u_{max} - u_{min}| = |100 + 100| = 200 N$ .

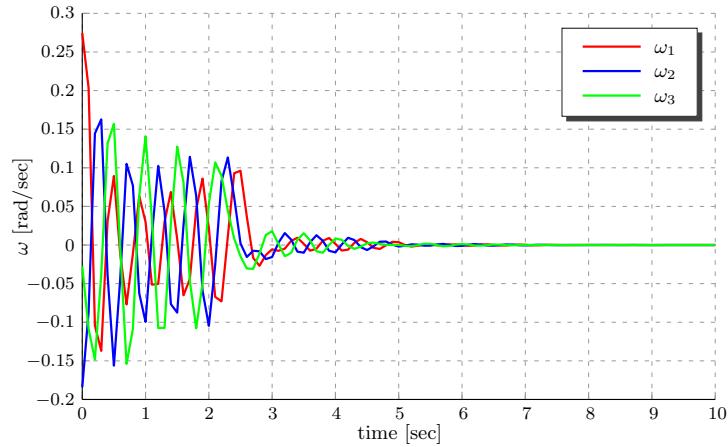
Στην Προσ.2, ισχύει  $n = 6$ . Οι μεταβλητές εδώ θα είναι 1140, ενώ οι μη-γραμμικοί περιορισμοί 420. Τα αποτελέσματα έχουν ως εξής



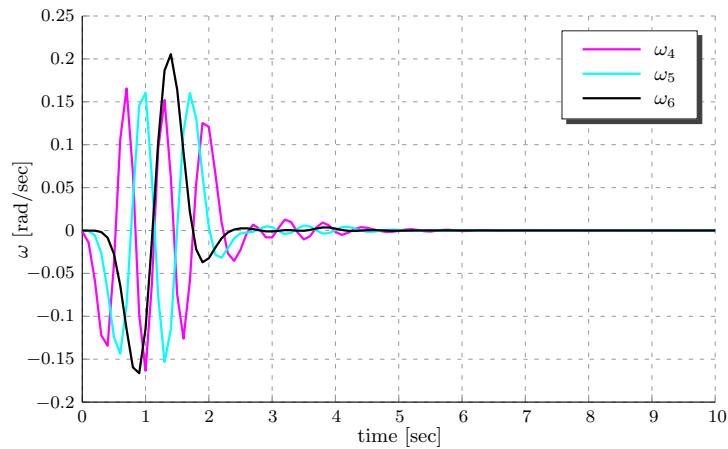
**Σχήμα 4.6:** Προσ.2 - Γωνίες εκκρεμών  $\theta_1 - \theta_3$



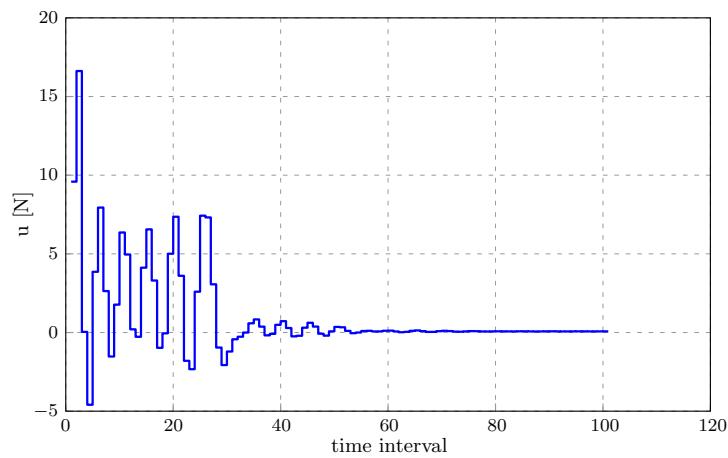
**Σχήμα 4.7:** Προσ.2 - Γωνίες εκκρεμών  $\theta_4 - \theta_6$



**Σχήμα 4.8:** Προσ.2 - Γωνιακές ταχύτητες εκκρεμών  $\omega_1 - \omega_3$



**Σχήμα 4.9:** Προσ.2 - Γωνίες εκκρεμών  $\omega_4 - \omega_6$

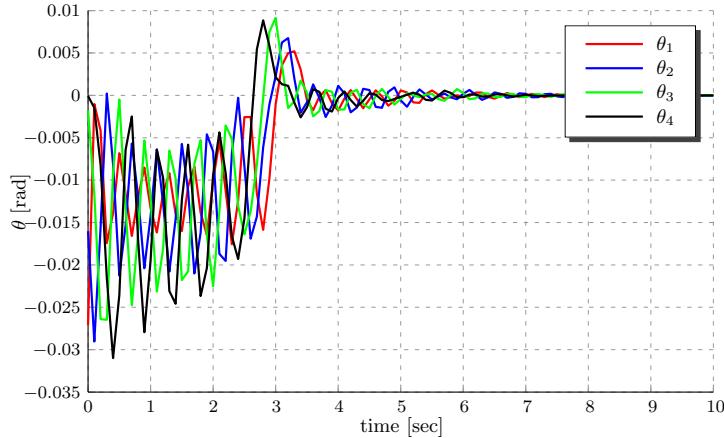


**Σχήμα 4.10:** Προσ.2 - Δράση ελέγχου

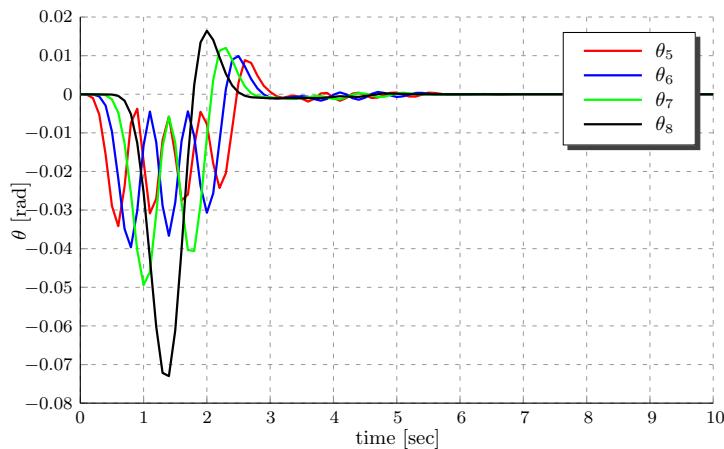
Οι δράσεις ελέγχου που εφαρμόζονται είναι παρόμοιες με αυτές της Προσ.1, οδηγώντας και εδώ στην επίτευξη του στόχου δίχως την σημαντική καταπόνηση του

ενεργοποιητή.

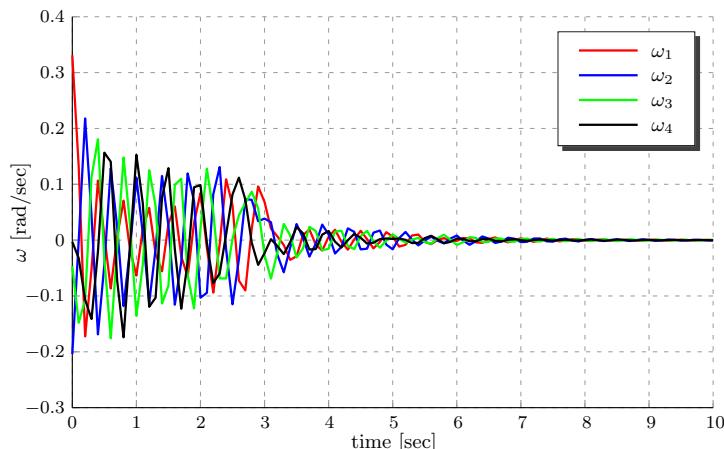
Η Προσ.3 αφορά την περίπτωση  $n = 8$ . Εδώ, προκύπτουν 1480 μεταβλητές και 540 μη-γραμμικές εξισώσεις, με τα εξής αποτελέσματα



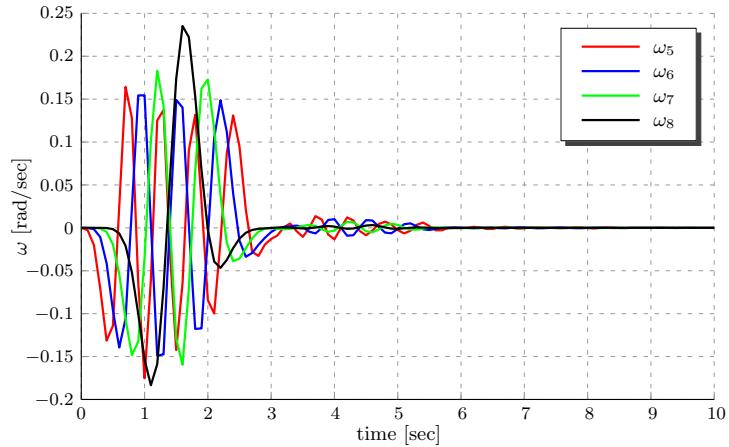
Σχήμα 4.11: Προσ.3 - Γωνίες εκκρεμών  $\theta_1 - \theta_4$



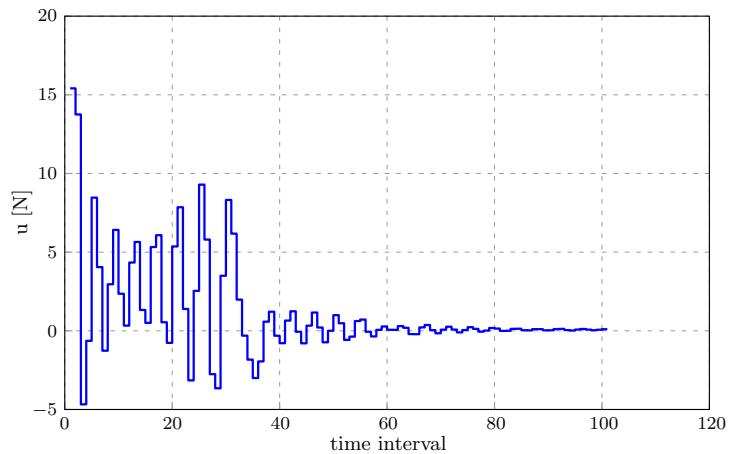
Σχήμα 4.12: Προσ.3 - Γωνίες εκκρεμών  $\theta_5 - \theta_8$



Σχήμα 4.13: Προσ.3 - Γωνιακές ταχύτητες εκκρεμών  $\omega_1 - \omega_4$



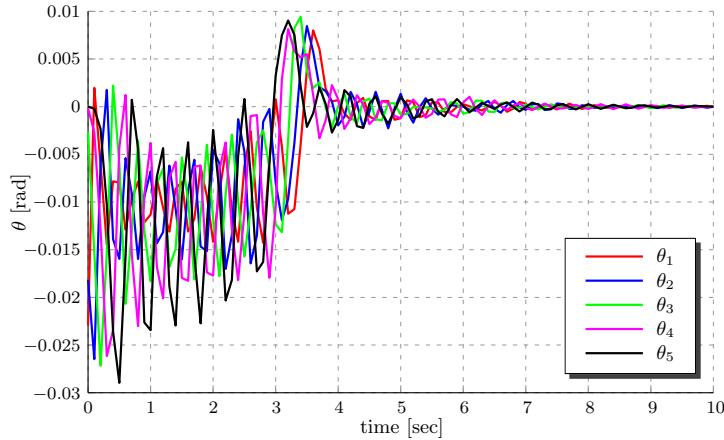
Σχήμα 4.14: Προσ.3 - Γωνίες εκκρεμών  $\omega_5 - \omega_8$



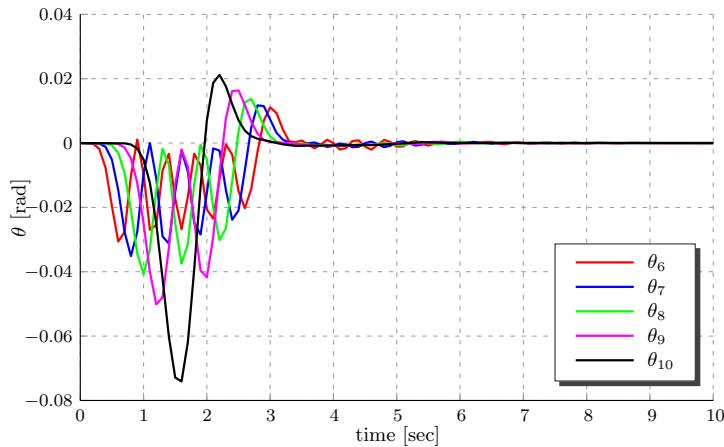
Σχήμα 4.15: Προσ.3 - Δράση ελέγχου

Οι διαδοχικές μεταβολές στις δράσεις ελέγχου αυξάνονται στο συγκεκριμένο παράδειγμα, σε σχέση με τα προγούμενα, όπως δείχνει το σχήμα 4.15. Παρόλα αυτά, παραμένουν σε ικανοποιητικά όρια και επιτυγχάνεται ο σημαντικότερος στόχος της παύσης της ταλάντωσης των εκκρεμών.

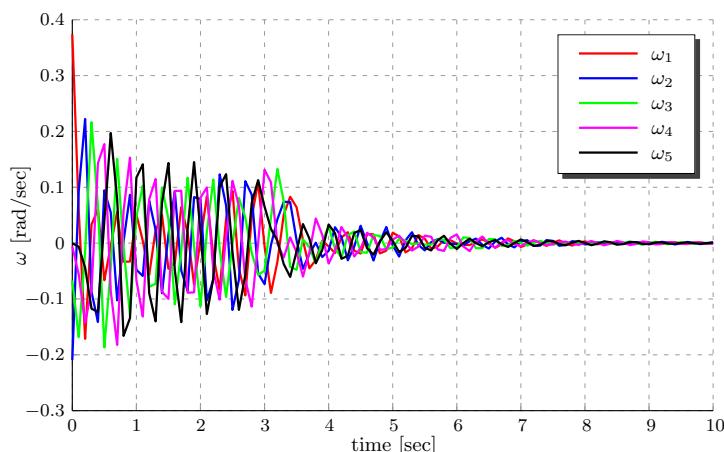
Ο μέγιστος αριθμός εκκρεμών που εξετάσθηκε είναι  $n = 10$ , στην Προσ.4. Στην περίπτωση αυτή ο αριθμός των μεταβλητών είναι 1780, ενώ των μη-γραμμικών περιορισμών 660.



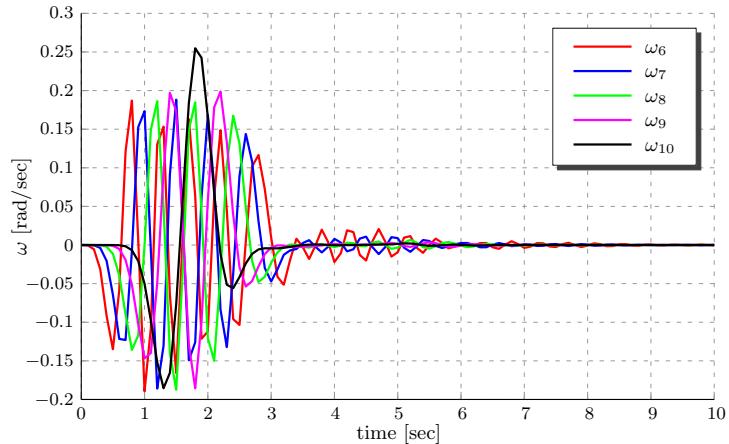
Σχήμα 4.16: Προσ.4 - Γωνίες εκκρεμών  $\theta_1 - \theta_5$



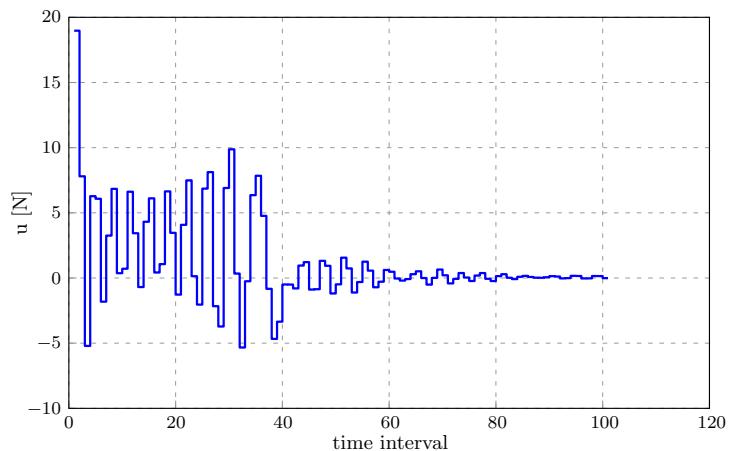
Σχήμα 4.17: Προσ.4 - Γωνίες εκκρεμών  $\theta_6 - \theta_{10}$



Σχήμα 4.18: Προσ.4 - Γωνιακές ταχύτητες εκκρεμών  $\omega_1 - \omega_5$



Σχήμα 4.19: Προσ.4 - Γωνίες εκκρεμών  $\omega_6 - \omega_{10}$



Σχήμα 4.20: Προσ.4 - Δράση ελέγχου

Όπως είναι εμφανές από το σχήμα 4.16, τα πρώτα 5 εκκρεμή εμφανίζουν μικρές ταλαντώσεις, στο τέλος του χρόνου ελέγχου. Επίσης, υπάρχουν ενεργές δράσεις στο ίδιο διάνυσμα (σχήμα 4.20, γεγονός το οποίο δεν παρατηρείται στις προηγούμενες προσομοιώσεις).

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζεται ο μέσος χρόνος επίλυσης (mean cpu time) και ο χρόνος της πρώτης επανάληψης (cs cpu time) για κάθε μία από τις Προσ.1 - Προσ.4, για τους δύο αλγορίθμους, MINOS και IPOPT. Η πρώτη επανάληψη είναι η υπολογιστικά απαιτητικότερη, αφού είναι η μοναδική όπου δεν υπάρχει κάποια καλή εκτίμηση των μεταβλητών κατάστασης και των πολλαπλασιαστών Lagrange κατά την έναρξη της (διαδικασία "Cold Start") και ο υπολογιστικός της χρόνος είναι περίπου διπλάσιος του μέσου χρόνου του συνόλου των επαναλήψεων για κάθε διάστημα δειγματοληψίας. Ενδεικτικά παρουσιάζονται και τα αποτελέσματα προσομοιώσεων για  $n = 12$  και  $n = 15$ , δίχως την εισαγωγή των αντίστοιχων διαγραμμάτων. Στις 2 τελευταίες περιπτώσεις, ο ελεγκτής αποτυγχάνει στην επίτευξη της μόνιμης κατάστασης ακινησίας, καθώς παρουσιάζονται ταλαντώσεις στα

εκκρεμή, ανάλογες με αυτές της Προσ.4. Ο μέγιστος επιτρεπόμενος αριθμός επαναλήψεων αυξάνεται στις 3000, λόγω της αυξημένης κλίμακας του προβλήματος. Παρουσιάζονται, επιπλέον, ο αριθμός των μη-γραμμικών περιορισμών,  $n_{nl}$  και ο συνολικός αριθμός των περιορισμών,  $n_x$ , ο οποίος ισούται με το σύνολο των μεταβλητών κατάστασης του προβλήματος. Σημειώνεται, τέλος, πως όλες οι μεταβλητές, κάθε διανύσματος κατάστασης,  $x_{ij}$ , εμφανίζονται σε μη-γραμμικούς όρους των  $n_{nl}$  εξισώσεων.

	$n_{nl}$	$n_x$	MINOS cs cpu time [s]	IPOPT cs cpu time [s]	MINOS mean cpu time [s]	IPOPT mean cpu time [s]
Προσ.1	360	960	0.273	0.169	0.176	0.075
Προσ.2	420	1120	0.386	0.264	0.234	0.137
Προσ.3	540	1440	0.714	0.952	0.387	0.512
Προσ.4	660	1660	1.255	2.967	0.605	1.494
Προσ. $n = 12$	780	2080	2.005	4.586	0.932	2.261
Προσ. $n = 15$	960	2560	3.918	6.106	1.598	4.787

Πίνακας 4.1: Πίνακας υπολογιστικών χρόνων προσομοιώσεων Προσ.1-Προσ.4 & για  $n = 12$  και  $n = 15$

Όπως εμφανίζεται στον πίνακα 4.1, μετα την Προσ.2 ( $n = 6$ ), ο υπολογιστικός χρόνος του MINOS γίνεται μικρότερος από αυτόν του IPOPT, όσο αναφορά την πρώτη επανάληψη και τη μέση τιμή του συνόλου αυτών. Παρατηρείται επομένως, ότι η μέθοδος του αλγορίθμου του MINOS χειρίζεται αποδοτικότερα το σύστημα μεγάλης κλίμακας. Βέβαια, η αρχική διέγερση του σχήματος 4.2 δεν προκαλεί σημαντικές μεταβολές στις γωνίες και γωνιακές ταχύτητες των εκκρεμών, λόγω της αυξημένης αδράνειας του συστήματος, επομένως οι μη-γραμμικότητες των εξισώσεων κίνησης δεν είναι αρκετά ισχυρές.

Στα παραδείγματα προσομοιώσεων Προσ.5 και Προσ.6 εφαρμόζονται μεγαλύτερες, σε απόλυτη τιμή, αρχικές συνθήκες γωνιών, ώστε να εξετασθεί η επίδοση των αλγορίθμων σε περιπτώσεις περισσότερο απαιτητικού στόχου ελέγχου, με ισχυρότερους τους μη-γραμμικούς όρους, σε σύγκριση με τα προηγούμενα παραδείγματα. Στις περιπτώσεις αυτές, δεν εφαρμόζεται κάποια αρχική διέγερση από τον ελεγκτή,  $u_0 = 0$ , αλλά το σύστημα αφήνεται να κινηθεί από κάποια μη μηδενική θέση. Σημειώνεται εδώ, πως ο αλγόριθμος του MINOS δεν κατάφερε να βρει λύση για τις προσομοιώσεις Προσ.5 και Προσ.6. Η τιμή των ανοχών επιλέγεται ίση με  $10^{-6}$ , ενώ τα όρια των γωνιακών ταχυτήτων διευρύνονται ως εξής

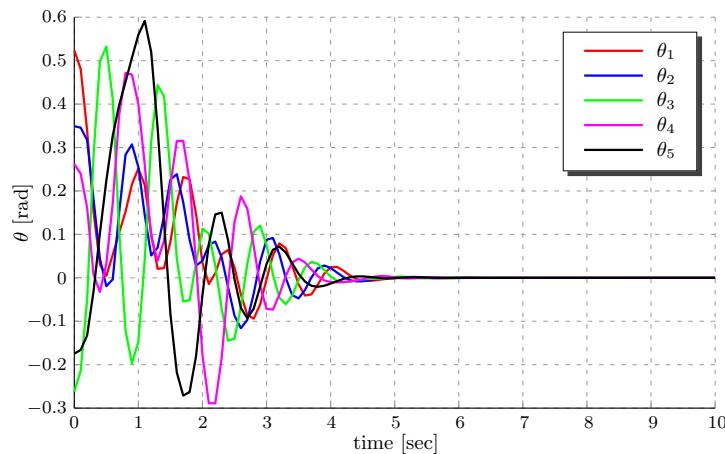
$$-5.0 \leq \omega_i \leq 5.0 \quad \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right], \quad \text{για κάθε } i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (4.40)$$

Στην Προσ.5, επιλέχθηκε το διάνυσμα αρχικής κατάστασης,  $\mathbf{x}_{10} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{10} & \mathbf{q}_{10} \end{bmatrix}^T$ , του μηδενικού σημείου συντοπισμού του πρώτου στοιχείου, για την περίπτωση των 5 εκκρεμών, ως

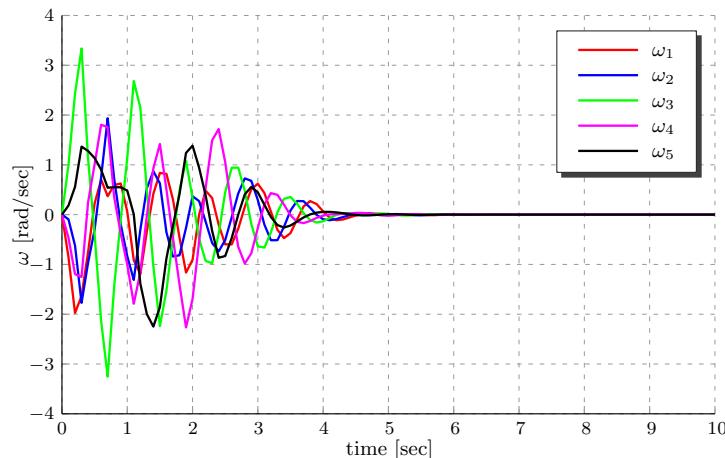
$$\mathbf{v}_{10} = \mathbf{0} \quad (4.41)$$

$$\mathbf{q}_{10} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_c \\ \boldsymbol{\theta}_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 30^\circ \\ 20^\circ \\ -15^\circ \\ 15^\circ \\ -10^\circ \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

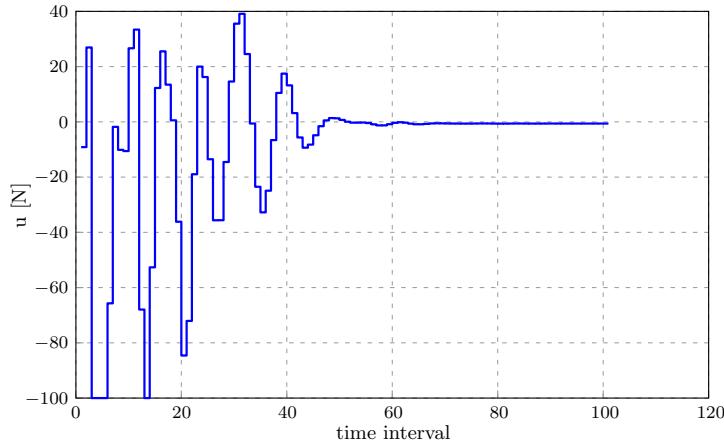
ενώ οι υπόλοιπες μεταβλητές κατάστασης τέθηκαν μηδενικές. Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης έχουν ως εξής



Σχήμα 4.21: Προσ.5 - Γωνίες εκκρεμών



Σχήμα 4.22: Προσ.5 - Γωνιακές ταχύτητες εκκρεμών



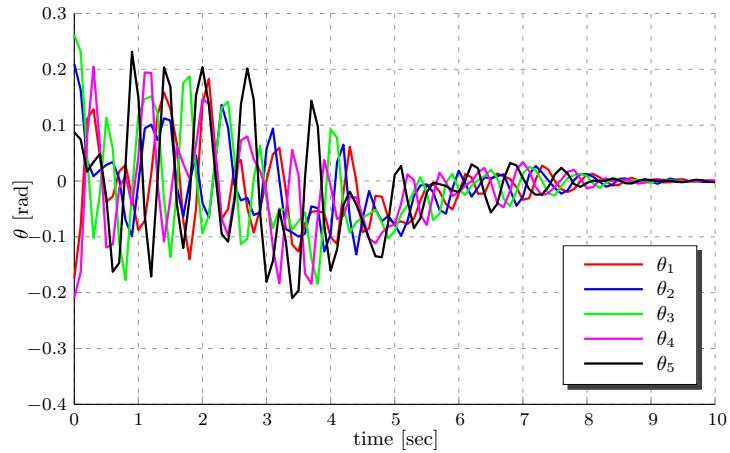
**Σχήμα 4.23:** Προσ.5 - Δράση ελέγχου

Η μόνιμη κατάσταση στο σύστημα επιτυγχάνεται στο μισό, περίπου, του χρόνου ελέγχου. Μέσω της κανονικοποίησης και της επιλογής των συντελεστών  $a = 5$  και  $b = 2$  στην αντικειμενική συνάρτηση, γίνεται εμφανής η προτίμηση του στόχου μηδενικής γωνίας των εκκρεμών από τον στόχο ελαχιστοποίησης των μεταβολών στις δράσεις ελέγχου. Τα διαγράμματα 4.21, 4.22 και 4.23, αντικατοπτρίζουν καθαρά την παραπάνω προτίμηση, καθώς οι διαδοχικές δράσεις ελέγχου αποκλίνουν αρκετά στα πρώτα χρονικά διαστήματα, όπου τα εύρη ταλάντωσης των εκκρεμών είναι μεγάλα.

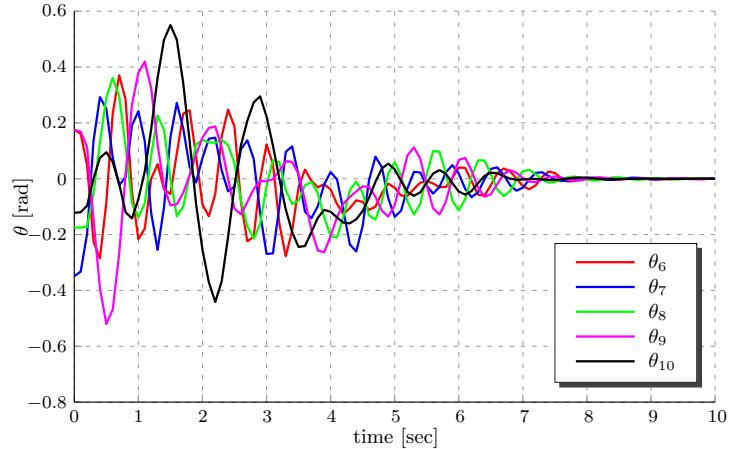
Η Προσ.6 αφορά την περίπτωση των 10 εκκρεμών. Παρόμοια με την Προσ.5 και τις (4.41) και (4.42), εκλέγεται το διάνυσμα αρχικών γωνιών ως μη-μηδενικό και ίσο με

$$\theta_{10} = \begin{bmatrix} -10^\circ \\ 12^\circ \\ 15^\circ \\ -12^\circ \\ 5^\circ \\ 10^\circ \\ -20^\circ \\ -10^\circ \\ 10^\circ \\ -7^\circ \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

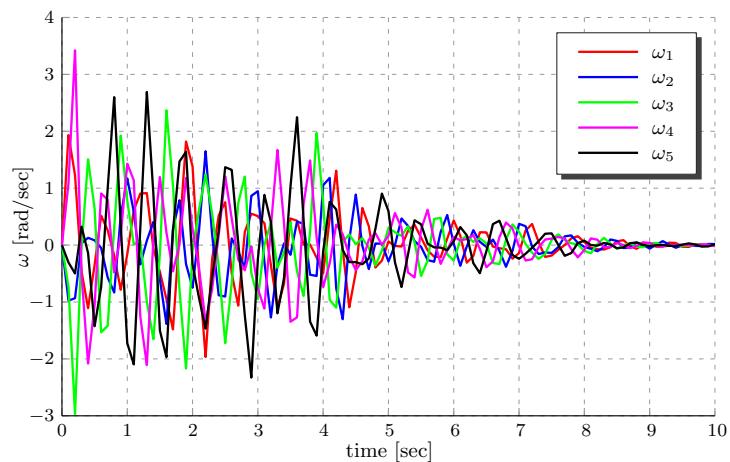
Επιπλέον, τα άνω και κάτω όρια των δράσεων ελέγχου μεταβάλλονται σε 150 και  $-150$  Newton αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα της Προσ.6, σύμφωνα με τις αρχικές συνθήκες (4.43), θα είναι



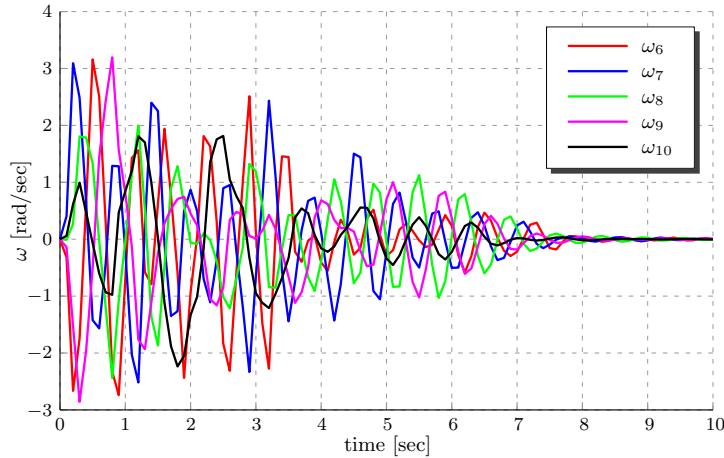
Σχήμα 4.24: Προσ.6 - Γωνίες εκκρεμών  $\theta_1 - \theta_5$



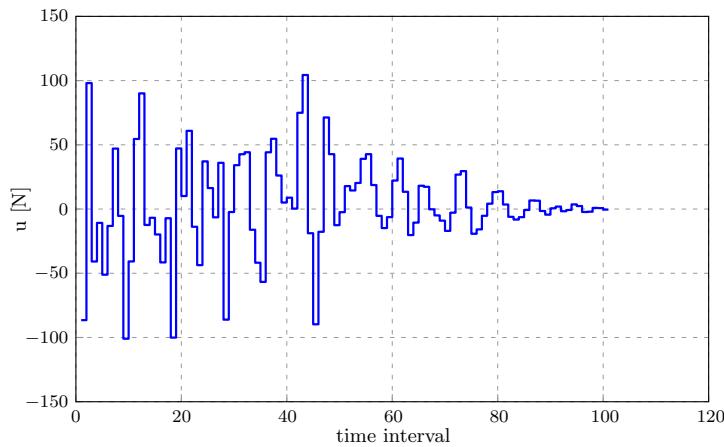
Σχήμα 4.25: Προσ.6 - Γωνίες εκκρεμών  $\theta_6 - \theta_{10}$



Σχήμα 4.26: Προσ.6 - Γωνιακές ταχύτητες εκκρεμών  $\omega_1 - \omega_5$



**Σχήμα 4.27:** Προσ.6 - Γωνίες εκκρεμών  $\omega_6 - \omega_{10}$



**Σχήμα 4.28:** Προσ.6 - Δράση ελέγχου

Τα σχήματα 4.24 και 4.26 δείχνουν ότι τα 5 πρώτα εκκρεμή έχουν μη-μηδενικές ταχύτητες και γωνίες ταλάντωσης κατά τον τερματισμό της διαδικασίας ελέγχου. Η ακολουθία δράσεων ελέγχου εμφανίζει τις μέγιστες μετατοπίσεις, σε σχέση με τα προηγούμενα παραδείγματα, όπως παρουσιάζεται στο σχήμα 4.28. Στο αποτέλεσμα αυτό συμβάλλει η διεύρυνση του συνόλου των επιτρεπόμενων τιμών των δράσεων και ο εξαιρετικά απαιτητικός στόχος ελέγχου, με τις δεδομένες αρχικές συνθήκες.

Οι υπολογιστικοί χρόνοι κατά την επίλυση των Προσ.5 και Προσ.6 με τον αλγόριθμο του IPOPT παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

	IPOPT cs cpu time [s]	IPOPT mean cpu time [s]
Προσ.5	10.352	0.096
Προσ.6	97.966	15.773

**Πίνακας 4.2:** Πίνακας υπολογιστικών χρόνων προσομοιώσεων Προσ.5 & Προσ.6

---

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

---

# Συμπεράσματα & Μελλοντικές Προεκτάσεις

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετήθηκε η εφαρμογή του μη-γραμμικού προβλεπτικού ελέγχου σε ένα σύστημα  $n$  καθοδηγούμενων εκκρεμών. Το σύστημα των εκκρεμών αποτέλεσε ένα εύχρηστο παράδειγμα μη-γραμμικού συστήματος μεγάλης κλίμακας, κατόπιν της δημιουργίας του αλγορίθμου για οποιονδήποτε αριθμό εκκρεμών  $n$ . Στον αλγόριθμο περιλαμβάνονται αναλυτικές εκφράσεις για τη συνάρτηση Lagrange του προβλήματος μη-γραμμικού προγραμματισμού, την κλίση και την καμπυλότητά της. Οι δύο αλγόριθμοι επίλυσης που χρησιμοποιήθηκαν προέρχονται από δύο βασικές κατηγορίες μεθόδων μη-γραμμικού προγραμματισμού: το Διαδοχικό Τετραγωνικό Προγραμματισμό (SQP) και τις μεθόδους Εσωτερικών Σημείων (IP).

Τα παραδείγματα προσομοιώσεων που διαμορφώθηκαν προς επίλυση από τους δύο αλγορίθμους υπό εξέταση, αυτούς των MINOS & IPOPT, μπορούν να διαχωριστούν σε δύο κατηγορίες, ανάλογα με τη δυσκολία του στόχου του ελεγκτή. Όπως περιγράφεται στο υποκεφάλαιο 4.2.2, χρησιμοποιήθηκε μία δεδομένη διέγερση στα 6 πρώτα παραδείγματα, όπου ο αριθμός των εκκρεμών αυξάνεται σταδιακά από  $n = 5$  σε  $n = 15$ . Οι προκύπτουσες αρχικές συνθήκες στο πρόβλημα ελέγχου από αυτήν την διέγερση ελαττώνονται σε μέτρο όσο αυξάνεται ο αριθμός των εκκρεμών, λόγω της ανάλογης αύξησης στην αδράνεια του συστήματος, και οι μη-γραμμικότητές του εξασθενούν. Στα 4 από τα 6 παραδείγματα ο αλγόριθμος του MINOS, όπως περιγράφεται στο υποκεφάλαιο 4.1.1, οδήγησε στον ταχύτερο υπολογισμό της βέλτιστης ακολουθίας δράσεων ελέγχου. Ο αλγόριθμος του IPOPT, του οποίου η λειτουργία περιγράφεται στο υποκεφάλαιο 4.1.2, εμφάνισε μικρότερους χρόνους επίλυσης στα 2 πρώτα παραδείγματα, για  $n = 5$  και  $n = 6$ .

Η δεύτερη κατηγορία παραδειγμάτων αφορά στην εκλογή, από τον χρήστη, αρχικών συνθηκών μεγαλύτερου μέτρου για τις γωνίες των εκκρεμών. Οι μη-γραμμικότητες του συστήματος είναι πλέον εντονότερες από τα προηγούμενα παραδείγματα. Στα

---

2 παραδείγματα αυτής της κατηγορίας, ο αλγόριθμος του MINOS δεν κατάφερε να δώσει λύση. Αντίθετα, ο αλγόριθμος του IPOPT υπολόγισε τη βέλτιστη σειρά δράσεων ελέγχου, σε σημαντικά αυξημένους υπολογιστικούς χρόνους σε σχέση με τα παραδείγματα της πρώτης κατηγορίας.

Τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων ρίζουν τη χρησιμότητα κάθε αλγόριθμου επίλυσης και της αντίστοιχης μεθόδου που εφαρμόζει. Το MINOS θεωρείται καταλληλότερη επιλόγη για γραμμικά προβλήματα ή μη-γραμμικά, δίχως την ύπαρξη ισχυρών μη-γραμμικών όρων. Στο λογισμικό του, περιέχεται αλγόριθμος επίλυσης γραμμικών προβλημάτων, με την διαδεδομένη μέθοδο Simplex. Αξίζει να σημειωθεί ότι κατά την πρώτη *μείζονα επανάληψη* της μεθόδου προβαλόμενης συνάρτησης Lagrange, αγνοούνται οι μη-γραμμικοί περιορισμοί και επιδιώκεται η εύρεση προσεγγιστικής λύσης των γραμμικών περιορισμών στο γραμμικοποιημένο υποπρόβλημα, μέσω των δευτερεύουσαν επαναλήψεων. Η παραπάνω διαδικασία συμβάλλει στη μείωση του χρόνου της πρώτης επανάληψης (escpu time), ενώ η εκτίμηση της επανάληψης είναι αρκετά καλή, ώστε ο αλγόριθμος να συγκλίνει στην ίδια βέλτιστη λύση με αυτόν του IPOPT.

Από την άλλη πλευρά, το IPOPT εμφάνισε καλύτερες επιδόσεις σε κάθε παράδειγμα με ισχυρούς μη-γραμμικούς όρους, τα δυσκολότερα εκ των οποίων δεν κατάφερε να λύσει ο αλγόριθμος του MINOS. Η σύγκλιση του IPOPT από οποιαδήποτε αρχική κατάσταση, πραγματοποιείται με υψηλότερη ακρίβεια σε κάθε παράδειγμα. Επιπλέον, η κατάλληλη επιλογή των όρων  $\delta_w$  και  $\delta_c$  της εξίσωσης (4.26) καθιστά το IPOPT ικανό να αντιμετωπίσει ιδιάζοντα σημεία και να εγγυηθεί την καθοδική πορεία της αντικειμενικής συνάρτησης. Εξάγεται έτσι το συμπέρασμα ότι το IPOPT είναι περισσότερο ευσταθές σε αλλαγές των αρχικών συνθηκών, ειδικά σε περιπτώσεις όπου αυτές βρίσκονται μακριά από κάποιο τοπικό ελάχιστο. Το υπολογιστικό κόστος της ευστάθειας δρα αρνητικά σε σύγκριση με το MINOS, στις περιπτώσεις ύπαρξης ασθενών μη-γραμμικών όρων, με αρχικές καταστάσεις σχετικά κοντά στη βέλτιστη. Σημειώνεται εδώ, ότι ο υπολογισμός της πλήρης Εσσιανής στο IPOPT σε αντίθεση με την εκτίμηση της μειωμένης Εσσιανή στο MINOS, δεν αποτελεί σημαντικό παράγοντα αύξησης του υπολογιστικού χρόνου του πρώτου στις περιπτώσεις μεγαλύτερης κλίμακας, αφού ο συνολικός χρόνος υπολογισμού όλων των αναλυτικών συναρτήσεων εισόδου αποτελεί 3–4% του συνολικού υπολογιστικού χρόνου, όπως αναφέρει το μήνυμα εξόδου του IPOPT σε κάθε διάστημα επίλυσης.

Η θεωρητική φύση του προβλήματος, με τον ασυνήθιστα μεγάλο αριθμό μη-γραμμικών όρων σε αντίστοιχα μεγάλο αριθμό διαστάσεων, αποτρέπει την επιδίωξη επίλυσης του προβλήματος στα πλαίσια ενός χρόνου δειγματοληψίας, αντιπροσωπευτικού των συστημάτων ελέγχου μηχανικών διατάξεων πραγματικού χρόνου. Παρ'όλα αυτά, τα αποτελέσματα των παραδειγμάτων προσομοιώσης της πα-

---

ρούσας μελέτης είναι ενθαρρυντικά για την εφαρμογή του μη-γραμμικού προβλεπτικού ελέγχου σε συστήματα πραγματικού χρόνου, όπου δεν συνδυάζεται εξίσου μεγάλος αριθμός μη-γραμμικών όρων και διαστάσεων, με την κατάλληλη επιλογή του λογισμικού επίλυσης, σύμφωνα με τα παραπάνω συμπεράσματα.

Ολοκληρώνοντας, παρουσιάζονται ορισμένες ιδέες για την μελλοντική προέκταση του προβλήματος καθοδήγησης των  $n$  εκκρεμών, καθώς και της εφαρμογής και επαλήθευσης της επίδοσης του μη-γραμμικού προβλεπτικού ελέγχου.

- Επίλυση του προβλήματος με την ομοτοπική μέθοδο συνέχισης, όπως αυτή εφαρμόσθηκε για την περίπτωση του διπλού εκκρεμούς, στο [13], και για τον έλεγχο ενός εναέριου οχήματος τεσσάρων ελίκων, στο [17]
- Μελέτη της επίδοσης του αλγορίθμου γρήγορης εκτίμησης κυλιόμενου ορίζοντα, όπως αυτός παρουσιάζεται στο [16], μέσω της εφαρμογής του στο IPOPT. Σύμφωνα με τον αλγόριθμο, γίνεται χρήση της ευαισθησίας του προβλήματος μη-γραμμικού προγραμματισμού, για την μείωση του υπολογιστικού χρόνου κατά τη διάρκεια του ελέγχου (online), ώστε το πρόβλημα να επιλύεται εντός των περιόδων δειγματοληψίας.
- Εισαγωγή ενεργοποιητών ροπής στα σημεία σύνδεσης των εκκρεμών και επίλυση του προβλήματος με σημαντικά αυξημένους βαθμούς ελευθερίας.
- Σύνδεση παραπάνω από μίας διάταξης αμαξώματος και  $n$  εκκρεμών και έλεγχος της συγχρονισμένης κίνησης αυτών, με σκοπό την προσομοίωση ενός κατανεμημένου δικτύου με μη-γραμμικά χαρακτηριστικά. Στο [4] διαμορφώνεται ένα αντίστοιχο πρόβλημα με απλά, γραμμικά εκκρεμή.
- Εφαρμογή μείωσης της τάξης του μοντέλου και ρητού προβλεπτικού ελέγχου (explicit Model Predictive Control), σύμφωνα με το [10], ώστε να μειωθούν οι διαστάσεις του διανύσματος κατάστασης και να απλοποιηθεί το μοντέλο, με σόχο τον περιορισμό του χρόνου επίλυσης κατά τη διάρκεια του ελέγχου (online).

# Βιβλιογραφία

- [1] M. Braun. On some properties of the multiple pendulum. *Archive of Applied Mechanics*, 72(11):899-910, 2003.
- [2] E. F. Camacho and C. Bordons. *Model Predictive Control*. Springer-Verlag London, 2007.
- [3] G. F. Carey and B. A. Finlayson. Orthogonal collocation on finite elements. *Chemical Engineering Science*, 30:587-596, 1975.
- [4] R. Chipalkatty, M. Egerstedt, and S. I. Azuma. Multi-pendulum synchronization using constrained agreement protocols. In *ROBOCOMM '09. Second International Conference on Robot Communication and Coordination*, pages 1-6. IEEE, 2009.
- [5] M. Diehl, H. Ferreau, and N. Haverbeke. Efficient numerical methods for nonlinear mpc and moving horizon estimation. In L. Magni, D. M. Raimondo, and F. Allgöwer, editors, *Nonlinear Model Predictive Control*, volume 384 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 391–417. Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [6] M. Diehl, I. Uslu, R. Findeisen, S. Schwarzkopf, F. Allgöwer, H. G. Bock, T. Bürner, E. Gilles, A. Kienle, J. Schlöder, and E. Stein. Real-time optimization for large scale processes: Nonlinear model predictive control of a high purity distillation column. In M. Grötschel, S. Krumke, and J. Rambau, editors, *Online Optimization of Large Scale Systems*, pages 363–383. Springer Berlin Heidelberg, 2001.
- [7] B. A. Finlayson. *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*. Academic Press, 1972.
- [8] M. Gerdts. Optimal control and real-time optimization of mechanical multi-body systems. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 83(10):705-719, 2003.

- [9] L. Grüne and J. Pannek. *Nonlinear Model Predictive Control: Theory & Algorithms*. Springer, 2011.
- [10] S. Hovland, K. Willcox, and J. T. Gravdahl. Mpc for large-scale systems via model reduction and multiparametric quadratic programming. In *45th Conference on Decision and Control*, pages 3418-3423. IEEE, 2006.
- [11] B. A. Murtagh and M. A. Saunders. A projected Lagrangian algorithm and its implementation for sparse nonlinear constraints. *Math. Programming Study*, 16:84-117, 1982.
- [12] L. R. Petzold. A description of DASSL: a differential/algebraic system solver. In *Scientific computing (Montreal, Quebec, 1982)*, pages 65–68. IMACS, 1983.
- [13] P. Seferlis, I. Stavrakis, and A. I. Papadopoulos. Homotopy continuation solution method with advanced step implementation for nonlinear model predictive control. In *Proceedings of the 22nd European Symposium on Computer Aided Process Engineering*. Elsevier B.V., 2012.
- [14] T. H. Tsang, D. M. Himmelblau, and T. F. Edgar. Optimal control via collocation and non-linear programming. *International Journal of Control*, 21(5):763-768, 1975.
- [15] A. Wächter and L. T. Biegler. On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming. *Mathematical Programming*, 106(1):25–57, 2006.
- [16] V. M. Zavala, C. D. Laird, and L. T. Biegler. A fast moving horizon estimation algorithm based on nonlinear programming sensitivity. *Journal of Process Control*, 18(9):876–884, 2008.
- [17] N. B. Βασίλας. Μη-Γραμμικός Προβλεπτικός Έλεγχος μη Επανδρωμένου Εναέριου Οχήματος Τεσσάρων Ελίκων. Master’s thesis, Αριστοτελείο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, 2014.
- [18] Σ. Νατσιάθας. *Εφαρμοσμένη Δυναμική*. Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 1994.
- [19] Σ. Νατσιάθας. *Ταλαντώσεις Δυναμικών Συστημάτων με Μη Γραμμικά Χαρακτηριστικά*. Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 2000.