

## ΤΥΠΟΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΟΡΘΟΛΟΓΙΚΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΕΙΔΗ ΙΣΤΟΡΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

**N. Καστάνη**

Σήμερα δύσκολα θα υποστήριζε κανείς τη μονολιθικότητα της διδακτικής θεωρίας και πράξης των σχολικών Μαθηματικών. Άλλο τόσο δύσκολα μπορεί να γίνει δεκτό ότι η μαθηματική εκπαίδευση συγκροτείται και πραγματοποιείται αναρχικά. Αυτό σημαίνει ότι όλοι οι εμπλεκόμενοι με την ανάπτυξη της μαθηματικής παιδείας δέχονται, λίγο-πολύ, την πολλαπλότητα των διδακτικών προσεγγίσεων της και την επικράτηση μιάς απ'αυτές σ'ένα θεσμικό και πολιτιστικό πλαίσιο.

Αυτή λοιπόν η διαισθητική παραδοχή των διαφορετικών διδακτικών μοντέλων της μαθηματικής εκπαίδευσης θέτει το ερώτημα της διάκρισης των θεωρητικών και κανονιστικών βάσεων της διδακτικής των Μαθηματικών. Μιά τέτοια βάση τη συνθέτουν: ένα επιστημολογικό ιδεώδες, κάποια κριτήρια εγκυρότητας κι ένας διδακτικό-μαθηματικός Λόγος. Μ'άλλα λόγια αποτελεί έναν τύπο ορθολογικότητας του συγκεκριμένου κλάδου. Κατά συνέπεια το ζήτημα που εγείρεται είναι η ανάδειξη των διαφορετικών τύπων διδακτικής ορθολογικότητας των Μαθηματικών.

Δύο πολύ γνωστοί τύποι ορθολογικότητας της Διδακτικής των Μαθηματικών στη δεκαετία του 1960 ήταν αυτός του Μπιχεβιορισμού κι αυτός της Γενετικής Επιστημολογίας του Piaget. Από το 1980 και μετά ο επιστημολογικός προβληματισμός στο συγκεκριμένο κλάδο διευρύνθηκε και προτάθηκαν νέα θεωρητικά πλαίσια, όπως π.χ. αυτό του Lakatos[1] ή αυτό του Kuhn[2]. Παράλληλα μιά πρώτη απόπειρα κατηγοροποίησης των διδακτικών τύπων ορθολογικότητας των Μαθηματικών παρουσιάστηκε το 1980 στην Εθνική Συνάντηση της Αμερικανικής Εταιρείας Διδακτικών Ερευνών (American Educational Research Association) από την J. Confrey. Στη σχετική εισήγησή της[3] διέκρινε τα εξής πρότυπα θεώρησης της επιστημονικής γνώσης: 1) της απολυτοκρατίας (absolutism), 2) της προοδευτικής απολυτοκρατίας (progressive absolutism) και 3) της εννοιολογικής αλλαγής (conceptual change). Και διευκρινίζει: Το πρότυπο της απολυτοκρατίας θεωρεί ότι η γνώση είναι συσσωρευτική, που σημαίνει ότι η νέα γνώση απλά προστίθεται στην παρακαταθήκη της προηγούμενης γνώσης. Σ'αυτή την περίπτωση η γνώση είναι ανεξάρτητη από αξίες (value-free) και θεωρία (theory-free). Επιστημαίνεται δε ότι το πρότυπο αυτό έχει τις ρίζες του στον εμπειρισμό και το θετικισμό. Σύμφωνα με το δεύτερο πρότυπο η γνώση αναπτύσσεται με συνεχή αναπλήρωση των θεωριών από ισχυρότερες και ευρύτερες θεωρίες. Κατά τον Popper, ο οποίος πρεσβεύει αυτό το επιστημολογικό μοντέλο, η νέα

θεωρία αν και εξηγεί ό,τι η παλιά θεωρία εξηγεί, διορθώνει την παλιά θεωρία έτσι ώστε αυτή στην πραγματικότητα αντιπαρατίθεται στην παλιά θεωρία, που σημαίνει ότι την περιέχει αλλά μόνο ως μία προσέγγιση. Σ'αυτό το πρότυπο η παραδοχή της απόλυτης αλήθειας αποτελεί μία υποκείμενη προϋπόθεση. Επίσης θεωρείται ότι δύο διαδοχικές θεωρίες είναι συγκρίσιμες κι ότι μπορεί να προσδιοριστεί αντικειμενικά η ανώτερη θεωρία από τη μεγαλύτερη δυνατότητά της για εξήγηση. Στην τρίτη τέλος περίπτωση η επιστημονική γνώση θεωρείται ότι αλλάζει κι αναπτύσσεται ριζοσπαστικά, μεταμορφώνοντας την εννοιολογική υποδομή της. Οι διαδοχικές θεωρίες υποστηρίζεται ότι είναι επιστημολογικά «ασύμμετρες» και εξαρτώνται από την επιστημονική κοινότητα που τις υιοθετεί κι αυτό σημαίνει ότι η ανάπτυξή τους θεωρείται ότι εξαρτάται από τις αξίες και τη θεωρία. Μεταξύ των πρωτοπόρων αυτού του μοντέλου είναι ο Kuhn, ο Lakatos και ο Toulmin[4].

Αναφορικά με τα Μαθηματικά παρατηρεί ότι παρουσιάζονται, από τη σκοπιά του μοντέλου της απολυτοκρατίας, ως παράδειγμα βεβαιότητας, αμετάβλητων αληθειών και ακαταμάχητων μεθόδων. Στην προκειμένη περίπτωση οι μαθηματικές έννοιες δεν εμφανίζονται ως αναπτυσσόμενες θεωρητικές καταστάσεις, αλλά θεωρούνται ότι ανακαλύφθηκαν μία για πάντα και δίνεται η εντύπωση ότι η δομή τους είναι αμετάβλητη[5]. Στο πλαίσιο της προοδευτικής απολυτοκρατίας οι μαθηματικές θεωρίες δεν εμπλουτίζονται απλά με νέες μαθηματικές αλήθειες, αλλά ανασκευάζονται, που σημαίνει ότι αντικαθίστανται από «ισχυρότερες». Οι μαθηματικές αλήθειες όμως εξακολουθούν να θεωρούνται αυτόνομες, ανεξάρτητες από το πλαίσιο της θεωρίας που συμπεριλαμβάνονται[6]. Για το μοντέλο της εννοιολογικής αλλαγής επισημαίνει ότι η ανάπτυξη των Μαθηματικών επιτυγχάνεται με την ανανέωση των μαθηματικών ιδεών που γίνεται σε συνάρτηση με τις συλλογικές αξίες και τις θεωρητικές επιλογές. Οι μαθηματικές δηλ. αλήθειες δεν είναι ανεξάρτητες από τους ερευνητές των Μαθηματικών, αλλά είναι αποτέλεσμα των αλληλοεπιδράσεων μεταξύ συναγωνισμών θεωριών, προσδοκιών, διανοητικών ιδεωδών και προηγούμενης γνώσης[7].

Μετά απ'αυτή τη διάκριση των επιστημολογικών πλαισίων των Μαθηματικών, η Confrey επιχειρεί να αναδείξει τις συνέπειες του μοντέλου της εννοιολογικής αλλαγής στη θεωρία των αναλυτικών προγραμμάτων των σχολικών Μαθηματικών. Υπογραμμίζει δύο επακόλουθα. Το πρώτο έχει να κάνει με την ανάγκη της επανεξέτασης του τρόπου θεώρησης και οργάνωσης του αναλυτικού προγράμματος των σχολικών Μαθηματικών, έτσι ώστε η επιλογή του περιεχομένου του να παίρνει υπ'όψη της την ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών και την αλληλοεπίδραση των μαθηματικών μεθόδων με το περιεχόμενο των Μαθηματικών στις διάφορες φάσεις των μεταλλαγών τους. Αυτό σημαίνει ότι δεν θα έπρεπε να διδάσκονται ως ένα σύνολο τελειωμένων προϊόντων για τα οποία η εξέλιξή τους δεν έχει νόημα και ενδιαφέρον[8]. Το δεύτερο αναφέρεται στη βαρύτητα που θα έπρεπε να δοθεί κατά τη σύνταξη του αναλυτικού προγράμματος στον πολύπλευρο «φωτισμό» της κάθε έννοιας, όπου η ιστορία προμηθεύει, το λιγότερο, έναν τέτοιο «προβολέα»[9]. Στο πνεύμα αυτό δεν παραλείπει να σχολιάσει την ακαταλληλότητα, για το πρότυπο της εννοιολογικής αλλαγής, της παραδοσιακής ιστοριογραφίας των Μαθηματικών, που τη χαρακτηρίζει ως μία καταλογογράφηση μαθηματικών ανακαλύψεων[10].

Οι ιδέες αυτές, όπως φαίνεται, γονιμοποίησαν τον προβληματισμό του άγγλου διδακτολόγου (didactician) P. Ernest, ο οποίος από το 1985 και μετά συμβάλλει συστηματικά στην ανάπτυξή τους. Το βιβλίο του: *The Philosophy of Mathematics Education*, που εκδόθηκε το 1991[11], είναι μία πρώτη ολοκλήρωση των σχετικών μελετών του κι αποτελεί ένα αξιόλογο υπόβαθρο για την παραπέρα ανάπτυξη του θέματος.

Ο Ernest έχει μία ανάλογη προσέγγιση με την Confrey στη διάκριση των μεταγνωστικών πλαισίων της διδακτικής των Μαθηματικών. Στη θέση όμως του τριπολικού σχήματος της Confrey χρησιμοποιεί ένα

διπολικό σύστημα ανάλυσης. Σύμφωνα μ'αυτό ταξινομεί τις διάφορες φιλοσοφικές παραδόσεις και τάσεις των Μαθηματικών σε δύο ομάδες. Στην πρώτη, που ονομάζει κανονιστική (normative ή prescriptive), εντάσσει όλα εκείνα τα φιλοσοφικά «παραδείγματα» τα οποία έχουν μιά άποψη απολυτοκρατίας (absolutist view) για τη μαθηματική γνώση, δηλ. θεωρούν ότι συντίθεται από βέβαιες και αμετάβλητες αλήθειες. Με άλλα λόγια τα Μαθηματικά αντιμετωπίζονται, υπό το πρίσμα αυτό, ως μιά απομονωμένη καθαρή γνώση, στατική και άχρονη, αν και αναγνωρίζεται η δυνατότητα συσσώρευσης νέων αληθειών και θεωριών. Στην περίπτωση αυτή η Ιστορία των Μαθηματικών είναι άσχετη (irrelevant) για τη φύση και τη θεμελίωση (justification) της μαθηματικής γνώσης. Επίσης θεωρείται ότι η ευρύτητα των μαθηματικών εφαρμογών οφείλεται στην καθολική εγκυρότητά τους, κατά συνέπεια είναι ανεξάρτητα από αξίες και πολιτιστικά πλαίσια[12]. Σ'αυτή την ομάδα ο Ernest κατατάσσει τα φιλοσοφικά ρεύματα του Λογικισμού και του Φορμαλισμού και σε κάποιο βαθμό του Πλατωνισμού και του Ενορατισμού[13]. Τη δεύτερη ομάδα την ονομάζει φυσιοκρατική (naturalistic ή descriptive) και την προσδιορίζει με βάση τις σύγχρονες εκείνες φιλοσοφικές αντιλήψεις που απορρίπτουν την άποψη της απολυτοκρατίας για τα Μαθηματικά. Πρόκειται για τις αντιλήψεις εκείνες που δίνουν έμφαση στην άσκηση, δηλ. στη λειτουργία και χρήση, των Μαθηματικών, όπως και στην ανθρώπινη πλευρά τους. Η θέση αυτή ονομάσθηκε σχεδόν-εμπειρικιστική (quasi-empiricist) και «επισφαλιστική» (fallibilist) σκοπιά των Μαθηματικών και θεωρείται ότι σχετίζεται με τον κονστρουκτιβισμό (constructivism)[14]. Ως σχεδόν-εμπειρικιστική και «επισφαλιστική» θεώρηση των Μαθηματικών αναφέρεται η φιλοσοφία που ανέπτυξε ο I. Lakatos. Σύμφωνα με τη θεώρηση αυτή η μαθηματική γνώση είναι επισφαλής, δηλ. τα αποτελέσματα των μαθηματικών δραστηριοτήτων, μαζί με τις έννοιες και τις αποδείξεις, δεν μπορούν ποτέ να θεωρηθούν ως τελικά ή τέλεια, αλλά υπόκεινται πάντοτε σε ανασκευές και αναθεωρήσεις ως συνέπεια της αλλαγής των κριτηρίων αυστηρότητας, ή των νέων απαιτήσεων, ή της ανάδυσης νέων σημασιών. Εδώ κεντρική θέση έχει η ιστορική αντίληψη της εκάστοτε γνωστικής κατάστασης των Μαθηματικών και η άποψη ότι τα Μαθηματικά είναι ανθρώπινη δραστηριότητα. Αυτό σημαίνει ότι οι μαθηματικές γνώσεις δεν αντιμετωπίζονται ως ανεξάρτητες από το πλαίσιο της θεωρίας και τις αξίες. Αξιοσημείωτη είναι επίσης η αποδοχή, σ'αυτή την περίπτωση, μιάς εμπειρικής βάσης των Μαθηματικών[15]. Όσον αφορά τον κονστρουκτιβισμό (κατά το ελληνικότερο «κατασκευαστισμό» ή «οικοδομισμό») ο Ernest διακρίνει δύο κατευθύνσεις. Τον ριζοσπαστικό κονστρουκτιβισμό (radical constructivism), που εκπροσωπεί ο E. von Glasersfeld και εκφράζει μιά καθαρά υποκειμενική αντίληψη για τη γνώση[16]. Σύμφωνα μ'αυτήν, το γνωρίζον υποκείμενο δεν προσλαμβάνει τη γνώση παθητικά, αλλά ενεργητικά την οικοδομεί, την κατασκευάζει, θεωρώντας ότι η γνωστική λειτουργία προσαρμόζεται και εξυπηρετεί την οργάνωση του κόσμου της εμπειρίας (experiential world), όχι την ανακάλυψη της οντολογικής πραγματικότητας[17]. Η δεύτερη κατεύθυνση είναι ο κοινωνικός κονστρουκτιβισμός (social constructivism), σύμφωνα με τον οποίο οι μαθηματικές έννοιες, δομές, μέθοδοι, κανόνες κι αποτελέσματα είναι επινόηση των ανθρώπων[18]. Τα Μαθηματικά, από τη σκοπιά του κοινωνικού κονστρουκτιβισμού, στηρίζονται στο εξής τριμερές υπόβαθρο: i) Η βάση της μαθηματικής γνώσης είναι γλωσσολογική γνώση, συμβάσεις και κανόνες. Η δε γλώσσα είναι μιά κοινωνική κατασκευή. ii) Οι διαπροσωπικές κοινωνικές διαδικασίες απαιτούνται για να μετασηματισθεί μιά υποκειμενική μαθηματική γνώση ενός ατόμου, μετά τη δημοσίευσή της, σε μιά γνώση αποδεκτή ως αντικειμενική. iii) Η αντικειμενικότητα αυτή καθ'αυτή θεωρείται ότι καθορίζεται κοινωνικά[19].

Στη συνέχεια ο άγγλος ειδικός επισήμανε ότι η κάθε μεταγνωστική ομάδα έχει κι ένα δικό της κανονιστικό πλαίσιο. Δηλαδή αυτοί που συνειδητά ή ασυνειδητά δέχονται και ακολουθούν τις θέσεις μιάς μεταγνωστικής ομάδας έχουν μιά ιδιάζουσα στάση και νοοτροπία για τα Μαθηματικά και τη μαθηματική παιδεία. Κατά συνέπεια υιοθετούν ένα ιδιαίτερο στύλ επικοινωνίας κι αντιμετώπισης των Μαθηματικών και διαμορφώνουν ένα αντίστοιχο πλαίσιο επιλογών και νομιμοποίησης. Έτσι στην περίπτωση της ομάδας με το πρότυπο της απολυτοκρατίας των Μαθηματικών παρατηρείται μιά προτίμηση στο αφηρημένο παρά στο συγκεκριμένο, στο λογικό παρά στο διαισθητικό, στο θεωρητικό

παρά στο πρακτικό, στη θεμελίωση (justification) παρά στην ανακάλυψη. Από τη σκοπιά αυτή τα Μαθηματικά που γίνονται αποδεκτά ως θεμιτά (legitimate) είναι τα αποτελέσματα των τυποκρατικών διαδικασιών[20]. Από την άλλη μεριά η «επισφαλιστική» άποψη δίνει έμφαση στην ανθρώπινη δημιουργία και τις ευρετικές μεθόδους, στις εννοιολογικές και μεθοδολογικές αλλαγές και, ιδιαίτερα ο κοινωνικός κονστρουκτιβισμός, στο κοινωνικό και πολιτιστικό πλαίσιο αναφοράς των Μαθηματικών[21]. Στο πλαίσιο αυτό η κατανόηση των Μαθηματικών ως μία ειδική γνώση που μετεξελίσσεται σε σχέση με την επιστημονική, κοινωνική και πολιτιστική συγκυρία, αποτελεί το ειδοποιό γνώρισμά του και κατά συνέπεια το βασικό κριτήριο αναγνώρισης και εγκυρότητάς του.

Είναι φανερό ότι το κάθε επιστημολογικό μοντέλο των Μαθηματικών, με το αντίστοιχο κανονιστικό πλαίσιο της διδακτικής τους, συγκροτεί κι έναν ιδιαίτερο διδακτικό Λόγο. Συγκεκριμένα στο πρότυπο της απολυτοκρατίας ο Λόγος είναι τεχνοκρατικός, θεμελιωτικός (foundationalist) και κλειστός, ενώ στο «επισφαλιστικό» μοντέλο είναι ιστορικό-επιστημολογικός και πλαισιοκρατικός (ή συγκυριακός, contextual). Κατά συνέπεια η κάθε μία από τις δύο αυτές περιπτώσεις αποτελούν ένα ξεχωριστό τύπο διδακτικής ορθολογικότητας των Μαθηματικών. Για χάρη δε της ονοματολογικής προσαρμογής στην ελληνική γλώσσα θα μπορούσε να ονομαστεί ο πρώτος, αυτός που αντιστοιχεί στο μοντέλο της απολυτοκρατίας, τεχνοκρατικός τύπος και ο δεύτερος, που έχει ως βάση την «επισφαλιστική» θεώρηση, προοδευτικός τύπος. Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφερθεί η επισήμανση, που έκανε η Confrey, ο Ernest κι άλλοι, ότι ο τεχνοκρατικός τύπος έχει μία δεσπίζουσα θέση στον κόσμο των μαθηματικών[22].

Από την παρουσίαση τώρα, των δύο μεταθεωρητικών βάσεων της μαθηματικής γνώσης, διαφαίνεται ότι η σημασία και ο χαρακτήρας της Ιστορίας των Μαθηματικών διαφέρουν, από το ένα πλαίσιο αναφοράς στο άλλο, σε μεγάλο βαθμό. Η παρατήρηση αυτή είναι ιδιαίτερα σημαντική για την εξέταση της συμβατότητας και της αρμοδιότητας της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική τους θεωρία και πράξη. Για το σκοπό αυτό θα πρέπει πρώτα να «φωτιστεί» λίγο το επιστημολογικό «παρασκήνιο» της ιστορικής θεώρησης των Μαθηματικών.

Στην προκειμένη περίπτωση το ζήτημα της ιστορικής κατανόησης των Μαθηματικών έχει μία κεντρική θέση. Υπάρχει όμως μία αρχική δυσκολία με τον όρο κατανόηση, αυτόν καθ'εαυτόν, λόγω της διφορούμενης σημασίας του[23]. Παρακάμπτοντας ωστόσο τις διάφορες φιλοσοφικές, ψυχολογικές, γλωσσολογικές κ.α. αποκλίσεις, μπορεί να θεωρηθεί ότι η κατανόηση έχει να κάνει με την απόκτηση, ταυτόχρονα και τη συνειδητοποίηση, του νοήματος ενός θέματος, (έννοιας, πρότασης, συλλογισμού ή θεωρίας) κατά τη διαδικασία της επικοινωνίας και της ανάγνωσης ειδικότερα. Από μία λίγο πιο αναλυτική σκοπιά, η διαδικασία της κατανόησης ενός θέματος μπορεί να θεωρηθεί ως μία συνισταμένη της διαδικασίας ερμηνείας του (δηλ. της «αποκρυπτογράφησης» του μέσα στην εσωτερική του δομή και τα συμφραζόμενά του), της διαδικασίας εξήγησής του (δηλ. της αντίληψης, «αποκάλυψης» του εξωτερικού ή πραγματιστικού (pragmatic) νοήματός του, μ'άλλα λόγια της απέξω «θέαση» του) και της επίγνωσής του (δηλ. της αναγνώρισης του ρόλου, της αναγκαιότητας, της σκοπιμότητας, της λειτουργικότητας και της αξίας του)[24]. Αξιοσημείωτη είναι η επισήμανση ότι η κατανόηση στην επιστήμη διαφέρει, ως προς το επίπεδό της, από την κατανόηση στην καθημερινή ζωή. Στην πρώτη περίπτωση το αντικείμενο της κατανόησης είναι θεωρητική γνώση η οποία, εν γένει, δεν είναι μία απλή γενίκευση εμπειρικών καταστάσεων, ενώ στη δεύτερη περίπτωση η κατανόηση εδράζεται στην εμπειρική συμπεριφορά και πρακτική[25]. Είναι φανερό ότι η παρατήρηση αυτή έχει ιδιαίτερη σημασία στη διδακτική των επιστημονικών μαθημάτων και των Μαθηματικών ειδικότερα.

Η κατανόηση, τώρα, των Μαθηματικών εμφανίζεται, κατά κανόνα, ως ιδιότυπη κι αυτό γιατί έχει δοθεί, μέχρι σήμερα, μεγάλη έμφαση στον αφηρημένο χαρακτήρα τους, στη συμβολική παράστασή τους και στη συντακτική πλευρά της εσωτερικής λογικής τους. Μία ιδιαιτερότητα η οποία δεν πρέπει να είναι

ανεξάρτητη από τη θεωρητική φύση των σύγχρονων Μαθηματικών, που σημαίνει ότι η γνωστική τους βάση δεν είναι εμπειρική, ατομοκεντρική, αλλά σχεσιακή (relational), συστημική. Μέσα σ' αυτό (και παράλληλα μ' αυτό) το επιστημολογικό πλαίσιο αναπτύχθηκε ο δομικός τρόπος αξιωματικοποίησης των μαθηματικών θεωριών, ο οποίος, όπως φαίνεται, διόγκωσε τη συμβολικο-συντακτική λειτουργία των Μαθηματικών και σε μεγάλο βαθμό παραμέρισε τη σημασιολογική όπως και την πραγματιστική πλευρά τους. Έγιναν δηλ. τα Μαθηματικά ένα παιχνίδι συμβόλων με αυστηρούς κανόνες. Μ' αυτό το πνεύμα, η κατανόησή τους εκλαμβάνεται ή υπονοείται ως συνώνυμη με τη μύηση, δηλ. με την προσαρμογή στη νοοτροπία των ήδη μυημένων, όπου η αναγνώριση των μαθηματικών συμβόλων και η γνώση των μηχανισμών λειτουργίας τους είναι η πεμπτουσία της μαθηματικής «μυσταγωγίας»[26].

Από την άλλη μεριά σύγχρονες μελέτες έδειξαν ένα πλουσιότερο και βαθύτερο περιεχόμενο της κατανόησης των Μαθηματικών. Για παράδειγμα η E.R. Michener υποστήριξε ότι η κατανόηση των Μαθηματικών σχετίζεται με τη διαδικασία οικοδόμησης και εμπλουτισμού της γνωστικής τους βάσης, στην οποία περιλαμβάνονται οι δημιουργικές διασυνδέσεις των διαφόρων γνωστικών ειδών και στοιχείων όπως και η μεταξύ τους διαφοροποίηση όσον αφορά τη λειτουργία τους στην απόκτηση γνώσης, οικειοποίηση και επιδεξιότητα. Επισήμανε δε τα εξής συστατικά της διαδικασίας κατανόησης των Μαθηματικών: 1) γνώση των μαθηματικών εννοιών, αποτελεσμάτων, παραδειγμάτων και των συσχετίσεών τους, 2) γενική στρατηγική ή έλεγχο της μαθηματικής γνώσης, 3) μεταγνώση των Μαθηματικών, 4) επιστημολογική γνώση των Μαθηματικών και 5) αναπαραστατική γνώση των Μαθηματικών[27]. Πιό πρόσφατα η A. Sierpínska πρότεινε να θεωρηθεί η κατανόηση ως μία διαδικασία ή έναν τρόπο γνώσης[28]. Υπογράμμισε ότι το βάθος της κατανόησης μπορεί να μετρηθεί από τον αριθμό και την ποιότητα των ενεργειών κατανόησης, που κάποιος έχει επιχειρήσει, ή από τον αριθμό των επιστημολογικών εμποδίων, που έχει ξεπεράσει[29]. Και δεν παράλειψε να συσχετίσει την κατανόηση με την εξήγηση και την επικύρωση[30].

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι το ζήτημα της κατανόησης των Μαθηματικών έτυχε μιάς ιδιαίτερης προσοχής, τα τελευταία χρόνια, στο χώρο της Διδακτικής των Μαθηματικών. Αυτό οφείλεται, σε μεγάλο βαθμό, στη μετατόπιση των διδακτικών ενδιαφερόντων και μελετών προς την επιστημολογική διάσταση του κλάδου αυτού. Η αξιοσημείωτη δε συμβολή της Sierpínska στην κατανόηση των Μαθηματικών είναι σαφώς ενταγμένη σ' αυτή την τάση. Αξίζει όμως να επισημανθεί μιά πρώιμη παρέμβαση στο θέμα αυτό, που έπαιξε και παίζει σημαντικό ρόλο. Πρόκειται για τη διάκριση της εργαλειακής (instrumental) από τη σχεσιακή (relational) κατανόηση των Μαθηματικών, δηλ. της χρήσης κανόνων χωρίς δικαιολογήσεις (reasons) από τη μιά και της γνώσης του τι και του γιατί από την άλλη, που πρότειναν ο S. Mellin-Olsen και ο R.R. Skemp[31]. Τα δύο αυτά είδη κατανόησης των Μαθηματικών φαίνεται να συσχετίζονται με τους δύο τύπους διδακτικής ορθολογικότητας, η εργαλειακή κατανόηση να αντιστοιχεί στον τεχνοκρατικό τύπο και η σχεσιακή με τον προοδευτικό. Σήμερα στη Διδακτική των Μαθηματικών δίνεται μεγάλη έμφαση στα δύο αυτά είδη κατανόησης και στο ρόλο τους στη μαθηματική παιδεία. Αναλύθηκαν περισσότερο και έγιναν σχετικές εμπειρικές και κλινικές έρευνες επικεντρώνοντας τώρα την προσοχή όχι στη διχοτόμηση: σχεσιακή-εργαλειακή κατανόηση, αλλά μάλλον στην συμπληρωματικότητα: εννοιολογικού-διαδικαστικού τρόπου σκέψης και κατανόησης των Μαθηματικών[32].

Αυτή η αναφορά στα είδη κατανόησης των Μαθηματικών μπορεί να ανοίξει κι έναν προβληματισμό για την ιστορική τους κατανόηση. Έναν προβληματισμό που δεν έχει εγκυκλοπαιδικό χαρακτήρα, αλλά μιά ουσιαστική σχέση με τη Διδακτική των Μαθηματικών, γιατί η ιστορία των Μαθηματικών αντιμετωπίζεται διαφορετικά στον έναν ή τον άλλο τύπο διδακτικής ορθολογικότητάς τους. Κι αυτό φαίνεται από την επισήμανση της Confrey και του Ernest ότι στο πρότυπο της απολυτοκρατίας, κατά συνέπεια στον τεχνοκρατικό τύπο διδακτικής ορθολογικότητας των Μαθηματικών, η ουσία των μαθηματικών εννοιών, μεθόδων και θεωριών θεωρείται εν γένει πάγια κι έτσι η ιστορία των

Μαθηματικών δεν έχει ουσιαστικό ρόλο. Από την άλλη μεριά στον προοδευτικό τύπο τονίστηκε η σημασία της ως καταστατική του βάσης κι όχι απλά ως μία συνεπαγωγή του.

Ένα ακόμη έρεισμα του προβληματισμού αυτού αποτελεί η έντονη κριτική που δέχθηκε, στα μέσα της δεκαετίας του 1970, η «παραδοσιακή» ιστοριογραφία των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών, η οποία είχε μία γενικότερη επίπτωση στον τρόπο κατανόησης της ιστορίας των Μαθηματικών. Το γεγονός αυτό ανάδειξε την ύπαρξη διαφορετικών ειδών κατανόησης της ιστορίας των Μαθηματικών[33]. Εδώ χρειάζεται κάποια αποσαφήνιση του τί σημαίνει κατανόηση της ιστορίας των Μαθηματικών και ποιές είναι οι ενδογενείς παραλλαγές της. Για το σκοπό αυτό παρατηρείται ότι η ιστορία των Μαθηματικών έχει ως επίκεντρο τη μεταβολή της κατάστασης και της κατανόησής τους. Κι από τη γενική αυτή παραδοχή συνάγεται ότι η κατανόηση της ιστορίας των Μαθηματικών έχει να κάνει με την απόδοση του νοήματος και τη συνειδητοποίηση αυτής της μεταβολής. Όσον αφορά τις παραλλαγές της, αποκαλυπτική ήταν η αντιπαράθεση γύρω από την «παραδοσιακή» κατανόηση της ιστορίας των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών. Στην περίπτωση αυτή επικρίθηκε η αντίληψη της μορφολογικής μόνο μεταβολής των Μαθηματικών και της αμετάβλητης ουσίας τους, που αντιπροσωπεύει μία παροντική κατανόηση της ιστορίας των Μαθηματικών, δηλ. την κατανόηση των ιστορικά προγενέστερων καταστάσεων των Μαθηματικών ως μία μορφή της σημερινής τους ουσίας. Κι αυτό σ'αντίθεση με τη σύγχρονη ιστοριογραφική αντίληψη, που εκπροσωπούν οι επικριτές, σύμφωνα με την οποία η κατανόηση μιάς ιστορικής κατάστασης των Μαθηματικών επιτυγχάνεται με την αναγνώριση των επιστημολογικών και οικολογικών της ιδιαιτεροτήτων στη συγκεκριμένη ιστορική εποχή και με την οπτική γωνία των γνωστικών μεταλλαγών της στις διάφορες ιστορικές περιόδους[34]. Οι περιπτώσεις αυτές αποτελούν σήμερα τα δύο κύρια είδη κατανόησης της ιστορίας των Μαθηματικών κι έχουν, όπως φαίνεται άμεση συνάφεια με τους δύο τύπους διδακτικής ορθολογικότητας των Μαθηματικών.

Στον τεχνοκρατικό λοιπόν τύπο ορθολογικότητας η ιστορία των Μαθηματικών έχει, στην καλύτερη περίπτωση, μία περιθωριακή θέση. Κι αυτό γιατί τα Μαθηματικά θεωρούνται ως συστήματα αμετάβλητων αληθειών. Το ενδιαφέρον, σ'αυτήν την περίπτωση, επικεντρώνεται στη λογικο-συνταντική οργάνωση και λειτουργία των μαθηματικών όρων και προτάσεων σε μία μαθηματική θεωρία. Εδώ η ιστορία των Μαθηματικών δεν έχει καμιά ουσιαστική αρμοδιότητα. Μόνο περιστασιακά και μ'ένα εγκυκλοπαιδικό πνεύμα θίγονται κάποια ιστορικά ζητήματα. Κατά κανόνα είναι περιγραφές ιστορικών εκφάνσεων των σημαντικότερων μαθηματικών ιδεών και βιογραφικές επιφυλλίδες επιφανών μαθηματικών[35]. Σ'αυτή την περίπτωση, αν και ο ρόλος, που δίνεται στην ιστορία των Μαθηματικών είναι εγκυκλοπαιδικός και μάλλον διακοσμητικός, ωστόσο ανοίγει, κατά κάποιο τρόπο, μιά «οπτική γωνία» κατανόησης των Μαθηματικών και μάλιστα κάπως διαφορετική απ'αυτή της «τεχνικής» παρουσιάσής τους. Η ιστορική αυτή κατανόηση των Μαθηματικών χαρακτηρίζεται: 1) από μιά συσσωρευτική αντίληψη των Μαθηματικών, δηλ, από μιά ποσοτική διεύρυνση του συνόλου των μαθηματικών προτάσεων με την προσθήκη νέων αληθειών που προσδόθηκαν στον κλάδο από τους μεγαλοφυείς διανοούμενους, στην πορεία του χρόνου, 2) από έναν «επιλεκτισμό» (ελιστισμό), δηλ. ένα πνεύμα πετυχημένων μόνο μαθηματικών αποτελεσμάτων και από πετυχημένες πάντοτε μαθηματικές αποκαλύψεις σοφών επιστημόνων, μαθηματικών, 3) από μιά ατομοκρατική άποψη σύμφωνα με την οποία η κατάσταση και η διεύρυνση των Μαθηματικών είναι αποκλειστική συνέπεια των πρωτοπόρων του κλάδου και 4) από μιά αντίληψη αυτοδικαίωσης της σημερινής πραγματικότητάς τους[36]. Σε σχέση τώρα με τον καθαρό μαθηματικό Λόγο, που είναι κωδικοποιημένος, ερμηνευτικός και κλειστός, οι ιστορικές αυτές παρεμβάσεις αφήνουν κάποιες μικρές χαραμάδες παρεισαγωγής καθημερινού Λόγου στα Μαθηματικά, με ίχνη εξηγητικών στοιχείων και με μιά υποκείμενη διάσταση αποστεγανοποίησής τους. Αυτό σημαίνει ότι τα ιστορικά σημειώματα αυτού του είδους δίνουν μιά δυνατότητα εκλαΐκευσης των Μαθηματικών και προσέγγισής τους εξωτερικά, δηλ. έξω από την εσωτερική λογική τους. Για να αναπτυχθεί όμως αυτή η δυνατότητα θα πρέπει τα σημειώματα αυτά να

έχουν έναν λειτουργικό και δυναμικό ρόλο στη συνολική απεικόνιση των Μαθηματικών. Κάτι τέτοιο ωστόσο υπερβαίνει το κανονιστικό πλαίσιο του συγκεκριμένου τύπου κατανόησής τους, που χαρακτηρίζεται από εσωστρεφή κριτήρια αναγνώρισης και εγκυρότητας. Η καλλιέργεια λοιπόν μιάς προωθημένης ιστορικής συνιστώσας στον τεχνοκρατικό τύπο ορθολογικότητας των Μαθηματικών δεν είναι παρά μιά ψευδαίσθηση, μιά ουτοπία. Μ'άλλα λόγια το ίδιο το σύστημα μαθηματικής εκπαίδευσης, διδακτικής της μεθόδευσης και ελέγχου, που διέπεται από αυτόν τον τύπο διδακτικής ορθολογικότητας των Μαθηματικών, δεν είναι συμβατό με μιά πιά γενική και πιά διεισδυτική χρησιμοποίηση της ιστορίας του κλάδου. Παρ'όλα αυτά για τους εκπαιδευτικούς που προσπαθούν να ανανεώσουν τη μαθηματική εκπαίδευση, απελευθερώνοντάς την από την τεχνοκρατική καθήλωσή της, τα ιστορικά αυτά σημειώματα μπορούν να αποτελέσουν αφορμές για να αναδείξουν, στην εκπαιδευτική πράξη, ένα άλλο είδος ιστορικής κατανόησης των Μαθηματικών, αφού πρώτα αναθεωρήσουν το χαρακτήρα και το ρόλο τους. Είναι φανερό ότι για ένα τέτοιο ριζοσπαστικό εγχείρημα απαιτείται υψηλός βαθμός συνειδητότητας και σχετικής μόρφωσης.

Από την άλλη μεριά στον προοδευτικό τύπο ορθολογικότητας η ιστορία των Μαθηματικών είναι ο εγγενής του πυρήνας. Όχι η περιγραφική ούτε η τελεολογική εκδοχή της, αλλά μιά ιστορία ευαίσθητη στις επιστημολογικές αλλαγές των Μαθηματικών, στα εκάστοτε πολιτισμικά τους πλαίσια και στην προοδευτική μετεξέλιξή τους. Είναι φανερό ότι αυτή η οπτική γωνία δίνει μιά δική της εικόνα των Μαθηματικών. Μ'άλλα λόγια η συγκεκριμένη ιστορική σκοπιά των Μαθηματικών διαμορφώνει μιά αντίστοιχη κατανόησή τους. Στην προκειμένη περίπτωση ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στην κατανόηση της φύσης της μαθηματικής δραστηριότητας και του τρόπου μαθηματικής σκέψης, όπως και των πολιτισμικών, θεσμικών και διυποκειμενικών-συλλογικών πλαισίων (συγκυριών) επίδρασης και θέσπισης της εκάστοτε μαθηματικής πραγματικότητας. Για το σκοπό αυτό αναπτύσσονται ολόπλευρα οι διαδικασίες ερμηνείας και εξήγησης των εννοιολογικών αλλαγών, που είναι στο επίκεντρο του ενδιαφέροντος. Παράλληλα υπάρχει μιά ευνοϊκή στάση και για την ανάδειξη της πρακτικής και θεωρητικής αναγκαιότητας των μαθηματικών εννοιών και των αλλαγών τους, του ρόλου και της αξίας των μαθηματικών θεωριών στην επιστήμη και τον πολιτισμό γενικότερα[37].

Το είδος αυτό της ιστορικής κατανόησης των Μαθηματικών δεν αποσκοπεί τόσο στην εκλαΐκευσή τους, όσο στην αποκάλυψη του επιστημολογικού του παρασκήνιου. Μιά σημαντική διάσταση που αναδεικνύεται στην προσπάθεια αυτή έχει να κάνει με τη μεταγνώση των Μαθηματικών, δηλ. με την γνώση των χαρακτηριστικών της μαθηματικής γνώσης, π.χ. τη φύση των θεωρητικών εννοιών, τη μαθηματική επιχειρηματολογία, το στυλ της μαθηματικής σκέψης, τη θεμελίωση, επαναθεμελίωση κι ανάπτυξη των μαθηματικών θεωριών, την εφαρμοσιμότητα των καθαρών μαθηματικών δομών κ.τ.λ.[38]. Στο συγκεκριμένο πλαίσιο η σχέση της ιστορικής κατανόησης των Μαθηματικών και της μεταγνώσης τους είναι αμφίδρομη, διαλεκτική, δηλ. η κάθε μιά προϋποθέτει και αναδεικνύει την άλλη.

Φαίνεται, χωρίς δυσκολία, ότι αυτή η ιστορική κατανόηση των Μαθηματικών είναι διαφορετική, αν όχι διαμετρικά αντίθετη, από την ιστορική κατανόησή τους που εμφανίζεται στο πλαίσιο του τεχνοκρατικού τύπου διδακτικής ορθολογικότητας. Πρόκειται δηλ. για δύο διαφορετικά είδη ιστορικής κατανόησης των Μαθηματικών.

Αξίζει να σημειωθεί ότι τα τελευταία χρόνια δίνεται, στη Διδακτική των Μαθηματικών, μιά ιδιαίτερη έμφαση στο «προοδευτικό» είδος της ιστορικής κατανόησης των Μαθηματικών[39]. Κι αυτό οφείλεται στην βαρύτητα που έχει η επιστημολογική ανάλυση στη σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών. Στη μαθηματική όμως εκπαίδευση εξακολουθεί να επικρατεί ο τεχνοκρατικός τύπος διδακτικής ορθολογικότητας των Μαθηματικών.

## Παραπομπές

1. βλ. Agassi, J.: On Mathematics Education: the Lakatosian Revolution, FLM, 1, 1980, σελ. 27-31. Επίσης βλ. Wolfson, P.: Philosophy Enters the Mathematics Classroom, FLM, 2, 1981, σελ. 22-26.
2. βλ. Orton, R.E.: Two Theories of «Theory» in Mathematics Education: Using Kuhn and Lakatos to Examine Four Foundational Issues, FLM, 8, 1988, σελ. 36-43.
3. βλ. Confrey, J.: Conceptual Change Analysis: Implications for Mathematics and Curriculum Inquiry, A paper presented at the American Educational Research Association National Meeting, Boston, February 1980.
4. στο ίδιο, σελ. 4-5.
5. στο ίδιο, σελ. 7-8.
6. στο ίδιο, σελ. 10.
7. στο ίδιο, σελ. 12.
8. στο ίδιο, σελ. 14-15.
9. στο ίδιο, σελ. 15.
10. στο ίδιο, σελ. 14.
11. Στις εκδόσεις «The Falmer Press».
12. βλ. Ernest, P.: The Philosophy of Mathematics and the Didactics of Mathematics, στο βιβλίο Biehler, R., et. al.(eds): Didactics of Mathematics as Scientific Discipline, Kluwer Academic Publications, 1994, σελ. 335-349, ειδ. σελ. 335 και 339.
13. βλ. Ernest, P.: Images of Mathematics, Values and Education: A Philosophical Perspective, στο βιβλίο Διδακτική των Μαθηματικών και Πληροφορική στην Εκπαίδευση, Β΄ Πανελλήνιο Συνέδριο, επιμέλεια Γ. Φιλίππου, Κ. Χρίστου, Α. Κάκας, Σύγχρονη Εποχή Κύπρου, 1995, σελ. 61-80, ειδ. σελ. 63.
14. στο ίδιο, σελ. 65.
15. βλ. Ernest, P.: The Philosophy of Mathematics Education, The Falmer Press, 1991, σελ. 34-38.
16. στο ίδιο, σελ. 70.
17. βλ. Ernest, P.: Constructivism, the Psychology of Learning, and the Nature of Mathematics: Some Critical Issues, Science and Education, 2(1), 1993, σελ. 87-93, ειδ. σελ. 89.
18. βλ. Ernest, P.: The Nature of Mathematics: Towards a Social Constructivist Account, Science and Education, 1(1), 1992, σελ. 89-100, ειδ. σελ. 93.
19. βλ. Ernest, P.: πρ. παρ. [15], σελ. 42.
20. στο ίδιο, σελ. 259.
21. στο ίδιο, σελ. 117. Επίσης βλ. Τουμάσης, Μ.: Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών, εκδ. Gutenberg, 1994, σελ. 95-7.
22. βλ. Confrey, J.: πρ. παρ. [3], σελ. 7, Ernest, P. πρ. παρ. [15], σελ. 259 και Davis, P.J./R. Hersh: Η Μαθηματική Εμπειρία, εκδ. Τροχαλία, (1991), σελ. 309.
23. βλ. Sierprinska, A.: Understanding in Mathematics, The Falmer Press, 1994, σελ. 1.
24. βλ. σχετικά Hirsch, E.D. Jr.: Validity in Interpretation, Yale Univ. Press, 1967, σελ. 133-9, Wartofsky, M.: Conceptual Foundations of Scientific Thought, The MacMillan Comp. 1969, σελ. 240-9, Kurayev, V./F. Lazarev: Foundations of Scientific Knowledge: Reflexion and Rationality, Social Sciences, 1978, 1, σελ. 43-58, ειδ. σελ. 52-3, Moravcsik, J.M.: On Understanding, Communication and Cognition, 10, 1977, σελ. 97-106.
25. βλ. Kurayev, V. / F. Lazarev, πρ. παρ. [24], σελ. 52-3.
26. Αυτό το πνεύμα απηχεί η εισήγηση του Artemiadis, N.K.: Mathematics versus Educational Systems, στα Proceedings of the 4th International Congress of Geometry, Edited by N.K. Artemiadis and N.K. Stephanidis, Academy of Athens, Aristotle University of Thessaloniki, Thessaloniki 1997, σελ. 3-11.



- Επίσης και το τευχήδιο του Ν.Κ. Αρτεμιάδη: Η Διδασκαλία των Μαθηματικών στα Ανώτατα και σε Άλλα Εκπαιδευτικά Ιδρύματα της Ελλάδας, Πανεπιστήμιο Πατρών, 1979.
- 27.βλ. Michener, E.R.: Understanding Understanding Mathematics, Technical Report, M.I.T., Artificial Intelligence Laboratory, August 1978, σελ. 22-3.
- 28.βλ. Sierprinska, A.: Some Remarks on Understanding in Mathematics, FLM, 10(1), 1990, σελ. 24-36, ειδ. σελ. 24.
- 29.στο ίδιο, σελ. 35.
- 30.βλ. Sierprinska, A. πρ. παρ. [23], σελ. xiv, 75-7.
- 31.βλ. Skemp, R.P.: Relational Understanding and Instrumental Understanding, The Arithmetics Teacher, 26(3), 1978, σελ. 9-15, και Mellin-Olsen, S.: Instrumentalism as an Educational Concept, Educational Studies in Mathematics, 12(3), 1981, σελ. 351-367.
- 32.βλ. Hiebert, J. (ed): Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics, Lawrence Erlbaum Associates Publishers, 1986 και Sfard, A.: On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin, Educational Studies in Mathematics, 22, 1991, σελ. 1-36.
- 33.βλ. σχετικά Θωμαΐδη, Γ. / Ν. Καστάνη: Ο Όρος «Γεωμετρική Άλγεβρα» στο Στόχαστρο μιάς Σύγχρονης Επιστημολογικής Διαμάχης, Ζήτημα Ιστορίας των Μαθηματικών (του Ομίλου για την Ιστορία των Μαθηματικών) Νο 38, Μάρτιος 1990.
- 34.στο ίδιο, σελ. 10-12.
- 35.βλ. για παράδειγμα τα ιστορικά σημειώματα των βιβλίων: 1) Thomas, J.B.Jr. / R.L. Finney: Απειροστικός Λογισμός ΙΙ, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 1992, 2) Fraleigh, J.B.: Εισαγωγή στην Άλγεβρα, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 1994.
- 36.Τη σκοπιιά αυτή απηχεί, λίγο-πολύ, η εισήγηση του A. Weil: History of Mathematics: Why and How, Collected Papers, Vol. 3, Springer-Verlag, 1978, σελ. 434-442, την οποία κριτικάρει ο J.W. Dauben στην εισήγησή του Mathematics: an Historian's Perspective, που περιλαμβάνεται στο βιβλίο Chikara, S. et. al. (eds): The Intersection of History and Mathematics, Birkhauser, 1994, σελ. 1-13.
- 37.Στην κατεύθυνση αυτή είναι για παράδειγμα οι εξής εργασίες: 1) Jahnke, H.N.: The Historical Dimension of Mathematical Understanding-Objectifying the Subjective, στο Da Ponte, J./J. Matos (eds): Proceedings of the 18th Psychology of Mathematics Education, Univ. of Lisbon, Vol. 1, 1994, σελ. 139-156, 2) Sierprinska, A.: The Diachronic Dimension in Research on Understanding in Mathematics - Usefulness and Limitations of the Concept of Epistemological Obstacle, στο Jahnke, H.N./N. Knoche/M. Otte(eds): History of Mathematics and Education: Ideas and Experiences, Vandenhoeck und Ruprecht, 1996, σελ. 289-318, 3) Radford, L.: On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards of Socio-cultural History of Mathematics, στο FLM, 17(1), 1997, σελ. 26-33 και 4) Bkouche, R.: Epistemologie, Histoire et Enseignement de Mathematiques, στο ίδιο, σελ. 34-42.
- 38.βλ. Otte, M./F. Seeger: The Human Subject in Mathematics Education and in the History of Mathematics, στο Biehler, R. et. al. (eds), πρ. παρ. [12], σελ. 351-365.
- 39.βλ. Neshier, P./J. Kilpatrick (eds): Mathematics and Cognition, Cambridge Univ. Press, 1990, σελ. 16, Harel, G./E. Dubinsky (eds): The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy, The Mathematical Association of America, 1992, σελ. 25-84, Bednarz, N. et. al. (eds): Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching, Kluwer Academic Publishers, 1996, σελ. 5-7 και 39-53.