# Η ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΚΑΙ Η ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ ΣΤΙΣ ΑΡΧΕΣ ΤΟΥ 18ου ΑΙΩΝΑ

Ν. Καστάνη

Ο 17ος αιώνας κληροδότησε στον 18ο αιώνα δύο αλγεβρικές παραδόσεις, την καρτεσιανή και την νευτώνεια [1]. Η πρώτη είχε ως κυρίαρχο γνώρισμα την κατασκευασιμότητα των λύσεων εξισώσεων ως τομές γεωμετρικών καμπύλων, ενώ η δεύτερη αντιμετώπιζε την Άλγεβρα ως γενικευμένη αριθμητική, δηλ. μία αριθμητική με γράμματα, που αντιπροσώπευαν γενικά ποσότητες και τα οποία λειτουργούσαν μέσα σε εξισώσεις θεωρούμενες ως αναλυτικές εκφράσεις. Η μεθοδολογική απόκλιση αυτών των παραδόσεων γίνεται αισθητή με μία πρώτη ματιά, όταν αντιπαραθέσει κανείς δύο αντιπροσωπευτικές τους περιπτώσεις. Δεν είναι όμως καθόλου προφανή τα επιστημολογικά υπόβαθρα πάνω στα οποία στηρίζονται. Γι' αυτό ας επιχειρήσουμε να τα αποκαλύψουμε, για να κατανοήσουμε τα ουσιαστικά χαρακτηριστικά και την εμβέλεια των αλγεβρικών αυτών παραδόσεων.

Οι γεωμετρικές κατασκευές ως μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων ήταν σε ευρεία χρήση στα Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά [2]. Αυτός ο τρόπος χειρισμού μαθηματικών καταστάσεων όχι μόνο δεν περιθωριοποιήθηκε αλλά καλλιεργήθηκε παραπέρα στην αραβική μαθηματική παιδεία. Διαμέσου των Αραβικών Μαθηματικών αρχικά και κύρια με την ανεύρεση και διάδοση των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών έργων κατά το χρονικό διάστημα 1450-1550 μ.Χ., η μέθοδος αυτή επανήλθε στο προσκήνιο. Η κύρια όμως ώθηση δόθηκε το 1637 με την πρωτοεμφάνιση της ***Γεωμετρίας*** του Descartes (1596-1650), όπου όχι μόνο αναβαθμίστηκε η παραδοσιακή μέθοδος επίλυσης προβλημάτων, αλλά άνοιξε μία νέα προοπτική στη μαθηματική σκέψη της εποχής του.

Το νέο ερευνητικό πρόγραμμα που εισηγήθηκε ο Descartes είχε ως κύρια κατεύθυνση τη διαμόρφωση μίας γενικής μεθόδου για τη λύση γεωμετρικών προβλημάτων διαμέσου της Άλγεβρας, όπου η λύση των εμφανιζόμενων εξισώσεων γινόταν με γεωμετρικές κατασκευές [3]. Με το πρόγραμμα αυτό αναμορφωνόταν η κλασική μεθόδος των γεωμετρικών κατασκευών με την συνύφανση σ' αυτήν αλγεβρικών στοιχείων, τα οποία άλλαζαν τη φύση της γεωμετρικής σκέψης, αλλά δημιουργούσε και μία νέα συμπεριφορά στα αλγεβρικά θέματα. Συγκεκριμένα, μέσα στα πλαίσια του ερευνητικού προγράμματος του ο Descartes προώθησε μια σύνδεση των αλγεβρικών εξισώσεων με τις επίπεδες καμπύλες, την οποία χρησιμοποίησε στη μεθόδευση της κατασκευής των ριζών εξισώσεων ως τομή καμπύλων. Εδώ όμως θα πρέπει να διευκρινίσουμε ότι για το ν Descartes η εξίσωση μίας καμπύλης ήταν κύρια ένα εργαλείο και όχι ένας τρόπος ορισμού ή αναπαράστασης της. Να σημειώσουμε ακόμη ότι οι πιο σημαντικές χρήσεις της εξίσωσης, ήταν στην ταξινόμηση των καμπύλων σε κλάσεις και στον προσδιορισμό των καθέτων (normals) των καμπύλων [4]. Με τη μεθοδολογική αυτή επιλογή του

Descartes γίνεται μία επαναφορά στην αρχαία ελληνική μέθοδο επίλυσης προβλημάτων με γεωμετρικό-κατασκευαστικούς χειρισμούς και μία παράλληλη ανάπτυξή της με την αξιοποίηση των αλγεβρικό-συμβολικών μέσων δραστηριότητας. Πράγματι επανέφερε στο μαθηματικό “στίβο” την κλασική γεωμετρική μέθοδο επίλυσης προβλημάτων, καθ' όσον αυτή είχε υποσκελισθεί [5] στην πριν απ' αυτόν περίοδο, από τις επιτυχίες των συμβολικών τεχνικών του N. Tartaglia (περ. 1500-1557),του G. Gardano (1501-1576) και του L. Ferrari (1522-1565) στη λύση των τριτοβάθμιων και τεταρτοβάθμιων εξισώσεων [6]. Από την άλλη μεριά ανάπτυξε τη μέθοδο αυτή αναβαπτίζοντάς την μέσα σε ένα αναλυτικό πλαίσιο. Έτσι με την καταλυτική μεσολάβηση του αλγεβρικού λογισμού η γεωμετρικό-κατασκευαστική μέθοδος στα χέρια του Descartes διεύρυνε την εμβέλεια της και ανταποκρινόταν στις απαιτήσεις δύσκολων κατασκευαστικών καταστάσεων, που ήταν πέρα από το μεθολογικό επίπεδο της μαθηματικής σκέψης των Αρχαίων Ελλήνων. Βρισκόμενη λοιπόν η Άλγεβρα στην υπηρεσία των γεωμετρικό-κατασκευαστικών απαιτήσεων επισκιαζόταν από μια εποπτική οντολογία [7], ενώ παράλληλα υπόβοσκαν λειτουργούσε ο λογισμός των συμβολικών σχέσεων. Είναι αλήθεια ότι αυτός, ο γεωμετρικό-κατασκευαστικός τρόπος αντιμετώπισης των εξισώσεων, υποταγμένος όπως ήταν στο γεωμετρικό πρόγραμμα του Descartes, δεν μπορούσε να ξεπεράσει τον προσαρτημένο ρόλο του στη γεωμετρική αποστολή της ***Geometrie***. Σύντομα όμως, η μέθοδος αυτή απέκτησε αρκετή ανεξαρτησία και έγινε ένας καθιερωμένος τρόπος για την λύση εξισώσεων, είτε αυτές οι εξισώσεις προερχόταν από γεωμετρικό-κατασκευαστικά προβλήματα, είτε όχι. Η παραπέρα απομάκρυνση της από τον αρχικό επικουρικό της ρόλο στην αντιμετώπιση γεωμετρικών καταστάσεων είχε ως αποτέλεσμα την ανάπτυξή της ως μια συλλογή αλγεβρικών τεχνικών και την απόκτηση μίας σχετικής αυτοτέλειας στο αλγεβρικό μάλλον πλαίσιο, παρά στο γεωμετρικό πεδίο. Ο τρόπος αυτός αντιμετώπισης των αλγεβρικών εξισώσεων, αν και δεν διατήρησε την προνομιούχα θέση που κατείχε στο πρόγραμμα του Descartes, κράτησε την επικαιρότητα και τη ζωτικότητα του για πάνω από έναν αιώνα. Αρκετοί μαθηματικοί του 17ου αιώνα και του πρώτου μισού του 18ου, όπως ο Fermat, ο Wallis, ο Newton, ο Jacob Bernoulli, ο l' Hopital, ο Euler και ο Gramer, δραστηριοποιήθηκαν μέσα σ' αυτό το πλαίσιο, το προώθησαν, ή στάθηκαν κριτικά απέναντι του. Με δύο λόγια το πεδίο αυτό δραστηριότητας, παρουσίαζε ένα σοβαρό ενδιαφέρον στη μαθηματική έρευνα και αποτελούσε ένα ευυπόληπτο και πάγιο μέρος, των εγχειριδίων Άλγεβρας και Αναλυτικής Γεωμετρίας μέχρι το 1750 περίπου [8].

Από πρώτη ματιά ο τρόπος αυτός αντιμετώπισης των αλγεβρικών εξισώσεων φαίνεται να έχει μόνο μεθοδολογική υπόσταση. Μία πιό κριτική, όμως, εξέτασή του δείχνει ότι εξέφραζε μία γενικότερη θεώρηση και συμπεριφορά στις αλγεβρικές εξισώσεις, δηλ. μία μαθηματική θεωρία [9]. 'Οσον αφορά τώρα την παρουσία της, μέσα στο μαθηματικό σκηνικό του 17ου αιώνα και τη δυναμική της μέχρι το 1750 περίπου, να παρατηρήσουμε ότι αυτή δεν αυτοπροσδιορίζεται απλά και μόνο από την αποτελεσματικότητα της, αλλά οριοθετείται κι αναπτύσσεται σε σχέση με την αναλυτική θεωρία των αλγεβρικών εξισώσεων. Από επιστημολογική άποψη θα μπορούσαμε να διακρίνουμε αυτές τις δύο συμπεριφορές θεωρώντας την πρώτη ως κατασκευαστικό-αναλυτική και τη δεύτερη ως συντακτικό-αναλυτική. Αυτή όμως η συνύπαρξη και ταυτόχρονα απόκλιση τους δημιουργεί φυσιολογικά το ερώτημα: από που αντλούσαν την επιστημονική σημασία τους και το ρόλο τους;

Το πρώτο που παρατηρούμε είναι ότι παρ' όλο που και οι δύο θεωρίες στόχευαν στον ακριβή (όχι προσεγγιστικό) προσδιορισμό των ριζών των εξισώσεων, κάθε μία είχε το δικό της τρόπο στον καθορισμό της ακρίβειας. Η πρώτη θεωρία δεχόταν τις γραφικές αναπαραστάσεις των καμπύλων, που μπορούσαν να γίνουν με συνεχείς κινήσεις, ως γενίκευση των κατασκευών με κανόνα και διαβήτη, διευρύνοντας έτσι τη σημασία της ακριβούς κατασκευής. Από την άλλη μεριά η αναλυτική θεωρία αποδεχόταν ως ακριβείς, τις λύσεις που εκφραζόταν με ριζικά νιοστής τάξης [10]. Το γεγονός αυτό δείχνει ότι η μαθηματική βεβαιότητα στην κατασκευαστικό-αναλυτική θεωρία στηρίζεται στη γεωμετρική κατοχύρωση των μαθηματικών αντικειμένων και χειρισμών, ενώ στη δεύτερη περίπτωση την επαληθευσιμότητα των πραξιακών τελεστών, που επιτυγχάνεται λόγω της αντιστρεψιμότητάς τους μέσα στο σημειωτικό σύστημα της Άλγεβρας.

Αν τώρα δούμε τις δύο αυτές θεωρίες μέσα από μία ευρύτερη οπτική γωνία, τότε θα παρατηρήσουμε ότι η δημοτικότητά τους, η ευδοκίμησή τους, ή ο μαρασμός τους εξαρτιόταν από τον "επιστημολογικό φορέα", ο οποίος αντιπροσώπευε και προωθούσε τη μία ή την άλλη. Μια τέτοια περίπτωση, αρκετά χαρακτηριστική, αποτέλεσαν οι ***καρτεσιανοί*** που απασχολήθηκαν με τις εξισώσεις. Αυτο ίδιαπνεόταν από τις ιδέες της κατασκευαστικό-αναλυτικής θεωρίας του Descartes, οι οποίες διαμόρφωναν τη φύση των αντικειμένων και των μέσων της αλγεβρικής δραστηριότητας τους. Στη συνέχεια ανάπτυξαν μία δυναμική που μετατόπιζε το σχετικό ενδιαφέρον και την έρευνα, όλο και πιο πολύ, από το γεωμετρικό πλαίσιο στο αλγεβρικό. Αυτό είχε ως συνέπεια την υπονόμευση και τελικά το μαρασμό της θεωρίας αυτής, κύρια λόγω της αδυναμίας να επιτευχθεί μια "φυσική μετάφραση" των αρχικών γεωμετρικών κριτηρίων σε αλγεβρικά, γεγονός που στάθηκε εμπόδιο, ανυπέρβλητο, σε μια φυσιολογική μετεξέλιξή της [11].

Παράλληλα όμως ένας άλλος "επιστημολογικός φορέας" βρισκόταν σε εξέλιξη. Ήταν εκείνος που αντιμετώπιζε την Άλγεβρα ως ars analytica (αναλυτική τέχνη), δηλ. ως μια γενική θεωρία των εξισώσεων που θεμελιωνόταν πάνω στην αναλυτική μέθοδο και τον καθολικό συμβολισμό. Δεν είναι δύσκολο να διαπιστωθεί [12] ότι η θεωρία αυτή των εξισώσεων ήταν μία μετεξέλιξη των επί μέρους τεχνικών επίλυσης προβλημάτων με τη βοήθεια του όρου και του συμβόλου για τον "άγνωστο αριθμό", που προώθησαν, από το ν 13ο αιώνα, οι αμπακιστές (abbacists) [13] και οι κοσσιστές (cossists) [14]. Να σημειώσουμε εδώ ότι το πλαίσιο και το στυλ της δραστηριότητας τους χαρακτηρίζεται από τη χρησιμοποίηση ενός συμβολισμού που προέρχεται από τις συντμήσεις του αντίστοιχου μαθηματικού λεξιλογίου και από μία μεγάλη συλλογή αντιπροσωπευτικών προβλημάτων μαζί με τις λύσεις τους, τα οποία λειτουργούσαν ως πρότυπα για την αντιμετώπιση ανάλογων περιπτώσεων. Με τη συνεχή επανάληψη τα πρότυπα αυτά "μπορούσαν να μεταφραστούν σε λειτουργικές συνταγές, αλλά σπανίως κατέληγαν σε τύπους με την πραγματική σημασία του όρου" [15]. Η κοσσιστική τέχνη "παρέμεινε στα Μαθηματικά από την αρχή ως το τέλος, μια διαδικασία επίλυσης προβλημάτων" [16] και ελάχιστη προσπάθεια καταβλήθηκε στην κατεύθυνση της ενίσχυσης των θεωρητικών θεμελίων της. Η πρώτη απόπειρα σ' αυτή την κατεύθυνση έγινε από τον

Rafael Bombelli (1526-1572), ο οποίος στην ***Άλγεβρά*** του (1572, 1579) αξιοποίησε την Διοφαντική κληρονομιά, προωθώντας έτσι την συμβολικοποίηση της κοσσιστικής τέχνης και την αναδρομή στα Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά για την επιστημονική θεμελίωση της [17]. Το αποφασιστικό όμως βήμα έγινε από τον Francois Viete (1540-1603). Αυτός, μέσα σ' ένα κλίμα μεταστροφής της αριστοτελικής επιστημονικής μεθοδολογίας δημιούργησε μια "καθολική μέθοδο" για τη θεμελίωση της Άλγεβρας και για την "εξόρυξη" νέων αλγεβρικών γνώσεων μ' έναν αναλυτικό-συνδυαστικό τρόπο, τον οποίο πρόβαλε πριν απ' αυτόν ο Peter Ramus (1505-1572) [18] και αξιοποίησαν οι οπαδο του. Αναμόρφωσε έτσι τη προηγούμενη παράδοση επίλυσης προβλημάτων με τη βοήθεια αγνώστων, σε μία γενική θεωρία εξισώσεων.

Το υπόβαθρο αυτής της θεωρίας διαρθρωνόταν πάνω σε μία καθολική γλώσσα και σε μία αναπτυγμένη μορφή της αναλυτικής μαθόδου. Ο Viete με την εισαγωγή των γραμμάτων της αλφαβήτου στα Μαθηματικά, για να εκφράσει εκτός από τις άγνωστες ποσότητες και τις γνωστές, έβαλε στο προσκήνιο τις εξισώσεις με τη γενική μορφή. Το εγχείρημα αυτό θα ήταν αδύναμο και περιορισμένης σημασίας αν δεν συνοδευόταν από μια συντακτική ρύθμιση των πραξιακών διαδικασιών, αναγκαία για την στήριξη κι ανάπτυξη της λειτουργικότητας του εγγράμματου λογισμού. Στη νέα αλγεβρική σημειολογία του Viete, το θέμα αυτό όχι μόνο δεν αγνοήθηκε ή υποτιμήθηκε, αλλά έτυχε μίας ιδιαίτερης προσοχής. Αυτό γίνεται φανερό αν δούμε με εμβρίθεια τις εργασίες του: Ad logisticen speciosam notae priores (Προκαταρκτικές σημειώσεις για την συμβολική λογιστική, 1631) και De aequationum recognitione et emendatione tractatus duo (Δύο πραγματείες για την αναγνώριση και τροποποίηση των εξισώσεων, 1615), όπου πίσω από τη λάμψη των πρωτότυπων ιδεών για τις σχέσεις των συντελεστών με τις ρίζες των εξισώσεων, που περιέχουν, μπορούμε να διακρίνουμε τους συντακτικούς χειρισμούς του για τη συγκρότηση των συνθετών προτάσεων με αφετηρία μερικά πρωταρχικά στοιχεία από τη μία και για την αποδόμηση των σύνθετων συνδυασμών στα αρχικά τους στοιχεία από την άλλη. Παράλληλα όμως με την εδραίωση της δομής και της λειτουργίας του νέου συμβολικού συστήματος του, ο Viete εφοδίασε το μεθοδολογικό υπόστρωμα της δικής του αλγεβρικής "τέχνης" με μία αναλυτική μέθοδο. Άντλησε, είναι αλήθεια, τα θεωρητικά της στοιχεία από το απάνθισμα της μαθηματικής κληρονομιάς των Αρχαίων Ελλήνων κι επηρεάστηκε ιδιαίτερα από τη "Συναγωγή" του Πάππου. Στον Πάππο διέκρινε δύο είδη ανάλυσης: αυτήν που εφάρμοζε στην απόδειξη θεωρημάτων κι αυτήν που χρησιμοποιούσε στη λύση των προβλημάτων. Ονόμασε την πρώτη "ΖΗΤΗΤΙΚΗ" και τη δεύτερη "ΠΟΡΙΣΤΙΚΗ". Έχοντας στη συνέχεια ως βασική επιδίωξη την απόσπαση τους από το γεωμετρικό πλαίσιο και την αξιοποίησή τους στον εγγράμματο λογισμό του χρησιμοποίησε τη ΖΗΤΗΤΙΚΗ ανάλυση ως διαδικασία μετασχηματισμού ενός προβλήματος σε αλγεβρική εξίσωση, συνδέοντας τις γνωστές με τις άγνωστες ποσότητες και την ΠΟΡΙΣΤΙΚΗ ανάλυση ως διαδικασία για την εξασφάλιση της εγκυρότητας της εξίσωσης [20]. Αυτοί οι χειρισμοί του απέβλεπαν στον ευρύτερο στόχο του: την αναλυτική ανάπλαση της Άλγεβρας της εποχής του. Και σ' αυτήν την προοπτική εισήγαγε ένα τρίτο είδος ανάλυσης, την "ΡΗΤΙΚΗ" ή "ΕΞΗΓΗΤΙΚΗ", η οποία αντιπροσώπευε τη διαδικασία επίλυσης των εξισώσεων και των αναλογιών [21]. Αυτή η τριαδική αναλυτική θεώρηση, μ' άλλα λόγια η "γενική ανάλυση", αποτελούσε για τον Viete ένα ευρετικό μέσο στις μαθηματικές αναζητήσεις. Θα πρέπει επίσης να επισημάνουμε ότι η "γενική ανάλυση" διαπότιζε όλη τη μεταθεωρητική βάση της νέας αλγεβρικής σκέψης και πράξης κι έτσι άνοιγε μια νέα σελίδα στη μαθηματική δραστηριότητα της επόμενης γενιάς.

Το έργο του Viete γενικά και η αναλυτική θεωρία των εξισώσεων ειδικότερα δεν έμειναν ούτε στιγμή σε αδράνεια. Οι μαθητές και οι οπαδοί του: Alexander Ghetaldi (1556-1626), Jean Beaugrand (1595-1640), Alexander Anderson (περ. 1582-1620), Nathaniel Torporley (1564-1632) κ.α. το συνέχισαν και το διέδοσαν. Φυσική συνέπεια της δυναμικής των μαθηματικών του ιδεών ήταν το πέρασμα και ο απόηχος τους έξω από τα σύνορα της χώρας του. Ανάμεσα στις μαθηματικές κοινότητες που άντλησαν, προώθησαν ή προσάρμοσαν σ' ένα δικό τους στυλ το μαθηματικό έργο του Viete ήταν και αυτή της Αγγλίας. Σ' αυτήν την περίπτωση δεν είναι δύσκολο να διαπιστωθεί ότι η πιο αντιπροσωπευτική ομόλογη μεθόδευση με την "ars analytica" του Viete ήταν η πραγματεία ***Artis Analyticae Praxis*** (1631) του Thomas Harriot (1560-1621), που εκδόθηκε 10 χρόνια μετά το θάνατο του.

Οι αναφορές του Harriot [22] στον Viete επιβεβαιώνουν την επίδραση που δέχτηκε απ' αυτόν. Πιθανότατα η επίδραση αυτή να ήταν έμμεση και να οφείλεται στο Nathaniel Totporley, ο οποίος υπήρξε μαθητής του Viete και στενός φίλος του Harriot. Πίσω όμως από αυτήν την εξωτερική σχέση ανάμεσα σ' αυτούς τους δύο "αναλύστες" θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η αναλυτική τέχνη στα χέρια ενός "επαγγελματία" (practitioner) μαθηματικού, δηλ. κάποιου που ασκεί, εφαρμόζει, μαθηματικά με κάποια μορφή και για κάποιο σκοπό [23], του Harriot [24], ήταν πιο πολύ ένα διαθέσιμο εργαλείο παρά μια θεωρία. Αυτό γίνεται φανερό από τον προσανατολισμό και τη φυσιογνωμία της *Artis Analyticae Ptaxis* σε σχέση με την *Ars Analytica* του Viete. Πράγματι, η πρακτική κατεύθυνση της αναλυτικής τέχνης του HARRIOT, προσανατολισμένη, όπως ήταν, στη νοοτροπία των "επαγγελματιών" μαθηματικών από τη μία και στο επίπεδο και τις προσδοκίες των ερασιτεχνών που προριζόταν [25] από την άλλη, υπερτόνιζε τους παραδειγματικούς χειρισμούς και "παρασκηνοποιούσε" το μεταθεωρητικό ιστό. Μέσα σ' αυτό το πνεύμα η γεωμετρική εγκυρότητα των αναλυτικών εκφράσεων και διαδικασιών ήταν περιττή. Η δικαίωση τους εξασφαλιζόταν με τη δοκιμή και με την επαληθευσιμότητα των συντακτικών τους κανόνων. Απ' αυτή την οπτική γωνία η αναλυτική πραγματεία του Harriot πρωτοστάτησε στην εμφάνιση ενός είδους αλγεβρικής δραστηριότητας, το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ως μετεξέλιξη της κοσσιστικής τέχνης, η οποία γονιμοποιήθηκε από την αναλυτική τέχνη του Viete. Στην τροχιά συτή κινήθηκε, πιο αποτελεσματικά, ο συμπατριώτης του William Oughtred (1575-1660). Με το βιβλίο του ***Clavis mathematicae***, που πρωτοεμφανίστηκε το 1631, την ίδια δηλ. χρονιά με το *Artis Analyticae Praxis* η "απογεωμετροικοποιημένη" αναλυτική τέχνη πέρασε ενεργητικά στο προσκήνιο της βρετανικής μαθηματικής παιδείας. Ο Oughtred ήταν μια αντιπροσωπευτική περίπτωση "επαγγελματία" *(practitioner)* μαθηματικού ο οποίος, άσκησε μεγάλη επίδραση στους μαθηματικούς της περιόδου ακαδημαϊκοποίησης της αγγλικής επιστήμης.

Ανάμεσα στους μαθητές του διακρίνονται: ο μαθηματικός John Wallis (1616-1703), και ο αστρονόμος Christopher Wren (1632-1723), ενώ καταλυτική ήταν και η επιρροή που είχε το βιβλίο του *Clavis mathematicae* στον Isaac Newton (1642-1727). Γίνεται φανερό ότι μέσα σ' αυτές τις διαστάσεις της προσφοράς του, ο χαρακτήρας της αλγεβρικής σκέψης που προώθησε είχε ένα αυξημένο ειδικό βάρος στην εξέλιξη του θέματος. Έτσι στην κατεύθυνση μιας αναγλυφοποίησης του ρόλου του στην μαθηματική ανέλιξη, το πρώτο που θα επισημάνουμε είναι ότι η Άλγεβρα είχε μια προνομιούχα θέση στο *Clavis mathematicae* και τη θεωρούσε ως κλειδί για όλα τα Μαθηματικά. Ο Ougthred, εντεταγμένος πλήρως στην επιστημολογική παράδοση των practitioners, έδινε έμφαση σ' έναν εργαλειακό (instrumental) ρόλο της άλγεβρας και ελάχιστα ενδιαφερόταν για την παρουσίαση αυστηρών αιτιολογήσεων των αναλυτικών του τεχνικών. Το γεγονός αυτό αποσυμπίεζε την αναλυτική τέχνη από τη γεωμετρική επικυριαρχία και από το βάρος των γεωμετρικών κατασκευών, ενώ ταυτόχρονα εδραίωνε την αριθμητική ως σύστημα αναφοράς της. Με τη στροφή αυτή αναδύθηκε η αλγεβρική ανάλυση, η οποία άμεσα ή έμμεσα επικέντρωνε την ευρετική της λειτουργία στη δομή των σχέσεων του υπό εξέταση θέματος. Ο "Ougthred δίδαξε ότι το πιο αποτελεσματικό μέσο για την ανακάλυψη των μαθηματικών θεωρημάτων ήταν η αποδέσμευση από τις συγκεκριμένες γεωμετρικές ή αριθμητικές λεπτομέρειες του προβλήματος και η επικέντρωση στη δομή των σχέσεων, όπως αποκαλύπτεται με την αλγεβρική ανάλυση" [26].

Η επιστημολογική αυτή τάση πέρασε σ' ένα άλλο επίπεδο το 1649, όταν ο John Wallis, μαθητής του Ougthred, έγινε καθηγητής της Γεωμετρίας στο πανεπιστήμιο της Oxford. Ήταν η εποχή όπου τα Μαθηματικά και οι Θετικές Επιστήμες έγιναν αποδεκτά στο ακαδημαϊκό προσκήνιο της Αγγλίας. Ήταν ταυτόχρονα η περίοδος όπου η αναλυτική τέχνη, μέσα από το πρίσμα της επισημοποίησης της, αναβαθμίστηκε σε αναλυτική επιστήμη. Και είναι φανερό ότι ο κύριος μοχλός αυτής της μετεξέλιξης ήταν ο John Wallis. Θα πρέπει να επισημάνουμε, στο σημείο αυτό, ότι η συμβολή του στην ανάπτυξη της αλγεβρικής ανάλυσης είχε τρεις διαστάσεις, πέρα από την επένδυση της με το προσωπικό του κύρος. Η πρώτη είχε να κάνει με την εφαρμογή της "δομικό-ευρετικής" προσέγγισης του Ougthred στα προβλήματα του τετραγωνισμού καμπύλης. Ο Wallis στο βιβλίο του ***Arithmetica infinitorum*** (1655) παρέκαμψε τον γεωμετρικό τρόπο αντιμετώπισης των τετραγωνισμών με βάση τα "αδιαίρετα" και διαπραγματεύτηκε το θέμα αριθμητικά, με τη βοήθεια αριθμητικών σειρών . Κύριος στόχος του στο βιβλίο αυτό ήταν να παρουσιάσει ότι η αριθμητική εκδοχή της μεθόδου των "αδιαιρέτων" θα μπορούσε να λύσει το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου. Για το εγχείρημα αυτό επανεξέτασε, με αριθμητικές διαδικασίες, τις γεωμετρικές μεθόδους που είχε εφαρμόσει ο B. Cavalieri (1598-1647) σε προβλήματα τετραγωνισμών και ανάλυσε τα δομικά χαρακτηριστικά τους, με βάση την αριθμητική μετάφραση των γεωμετρικών σχέσεων. Έτσι μπόρεσε να διεισδύσει στο παρασκήνιο των γεωμετρικών σχέσεων που υπόκεινται του γεωμετρικού τετραγωνισμού του κύκλου, γεγονός το οποίο τον βοήθησε στην επίτευξη του σκοπού του. Γίνεται φανερό ότι με το βήμα αυτό είχαμε μία σημαντι-κή εξέλιξη στην αναλυτική σκέψη στα Μαθηματικά γενικά, η οποία ταυτόχρονα λειτούργησε καταλυτικά και στην πρόοδο της αλγεβρικής ανάλυσης.

Ως δεύτερη διάσταση της συμβολής του Wallis στην προώθηση της αλγεβρικής ανάλυσης μπορούμε να θεωρήσουμε την προοπτική ενός ανταγωνιστικού πνεύματος στο πεδίο της Άλγεβρας, ανάμεσα στην αγγλική παράδοση και σ' αυτήν των καρτεσιανών. Μ' έναν επιθετικό τόνο πρόβαλε στο βιβλίο του ***Treatise of Algebra*, both historical and practicall** (1685) όχι μόνο την προτεραιότητα της αναλυτικής τέχνης του Harriot σε σχέση με την "Άλγεβρα" του Descartes, αλλά και την εξάρτηση της δεύτερης από την πρώτη [27]. Χωρίς αμφιβολία αυτή η εθνικιστική έξαρση συνδεδεμένη με την αντικαρτεσιανή φιλοσοφικό-επιστημονική αντιπαράθεση θρησκευτικών κύκλων αυτής της περιόδου [28] δημιουργούσε μία επιστημολογική ένταση στη βρετανική αλγεβρικό- αναλυτική δραστηριότητα, η οποία πλέον διεκδικούσε την υπεροχή της. Η επίδραση τέλος του Wallis στη μαθηματική σκέψη του Newton εκφράζει την τρίτη διάσταση του ρόλου του στην ανάπτυξη της αναλυτικής κατεύθυνσης στην Άλγεβρα. "Ο Wallis τον δίδαξε ότι η δομή ήταν η ουσία της μαθηματικής πραγματικότητας . Η *Arithmetica infinitorum* ήταν εξαιρετικά πολύτιμη στον προσανατολισμό της προσοχής του Newton στη μαθηματική δομή" [29]. Εδώ να σημειώσουμε ότι η *Arithmetica infinitorum* μαζί με το *Clavis mathematicae* του Oughtred και την έκδοση του Franz van Schooten της Γεωμε-τρίας του Descartes αποτέλεσαν τα βιβλία της νεανικής αυτομόρφωσης του Newton στα Μαθηματικά. Κάτω λοιπόν από την επίδραση όχι μόνο του Wallis αλλά και του Oughtred, ο Newton αφομοίωσε τον αναλυτικό τρόπο θεώρησης των Μαθηματικών και διαμόρφωσε τον δικό του επιστημολογικό άξονα στη μαθηματική του δραστηριότητα. Πολύ αποκαλυπτική για την περίπτωση μας είναι η θέση του ότι " Η Άλγεβρα είναι η ανάλυση των αδέξιων στα Μαθηματικά" [30]. Να σημειώσουμε εδώ ότι αυτή η υποτιμητική στάση του στην Άλγεβρα οφειλόταν σε μια διαδεδομένη αντίληψη της εποχής του, σύμφωνα με την οποία αυτή εξέφραζε τους μηχανιστικούς χειρισμούς για την επίλυση προβλημάτων με τη βοήθεια αγνώστων [31]. Αν δούμε τώρα τη θετική πλευρά αυτής της πρότασης του, τότε χωρίς δυσκολία θα λέγαμε ότι η ανάλυση ήταν γι' αυτόν η πεμπτουσία των Μαθηματικών. Θα παρατηρήσουμε όμως ότι καθόλου διαφωτιστική δεν είναι η ρήση του αυτή για το επιστημολογικό υπόβαθρο της "αναλυτικής" του Άλγεβρας. Για να καταλάβουμε λοιπόν την ποιότητα της δικής του συμβολής στην εξέλιξη της αλγεβρικής σκέψης, θα πρέπει να ρίξουμε λίγο φως σ' συτό το νευραλγικό ζήτημα. Εδώ ο D. T. Whiteside, ένας σύγχρονος μας μελετητής και επιμελητής του μαθηματικού έργου του Newton, θα μας βοηθήσει. Πράγματι, εξετάζοντας τις αλγεβρικές εργασίες του Newton επισήμανε ότι η ταύτιση της Άλγεβρας με τη "Γενικευμένη Αριθμητική" ("Universal Arithmetick") αποτελεί για το ν επιφανή άγγλο επιστήμονα "καθοδηγητικό δόγμα" [32]. Και διευκρινίζει ότι ο Newton προώθησε την ιδέα σύμφωνα με την οποία "η άλγεβρα είναι στην ουσία της η αφηρημένη λογική των σχέσεων ανάμεσα σε ποσότητες, αποσπασμένες από το συγκεκριμένο τους περιεχόμενο κι έτσι μπορεί να αναπτυχθεί ως ένα ανεξάρτητο, μεταθεωρητικό σύστημα **...** Γι' αυτόν οι μόνες βιώσιμες έννοιες και αποδεκτές πράξεις που παραμένουν ανυπέρ-βλητες στην Άλγεβρα είναι οι γενικευμένες εκείνες νοητικές εικόνες (universalized images) της κοινής αριθμητικής" [33]. Γίνεται έτσι φανερό ότι ο Newton όχι μόνο ήταν ενταγμένος στον επιστημολογικό φορέα της "αναλυτικής άλγεβρας" αλλά εξώθησε αυτόν σ' ένα πιο προχωρημένο στάδιο, το αριθμητικό-λογικό. Να σημειώσουμε ότι η αλγεβρική του, γενικότερα, δραστηριότητα προήλθε από τις διαλέξεις που έδωσε ως καθηγητής του Cambridge. στο διάστημα 1673-83. Αυτές οι διαλέξεις, αποτέλεσαν την πρώτη ύλη του βιβλίου ***Arithmetica Universalis*** που πρωτοεκδόθηκε το 1707 σπό τον διάδοχο του στη λουκασιανή έδρα, William Whiston (1667-1752). Το βιβλίο αυτό είχε πολλές επανεκδόσεις [34] και άσκησε μεγάλη επίδραση κατά τον 18 αιώνα.

Πολύ ενδεικτικά για την επιστημολογική θέση της *Arithmetica Universalis*, είναι η άποψη του Henry Pemderton (1694 -1771), ενός από τους επιγόνους του Newton, ο οποίος το 1728 στον πρόλογο του βιβλίου του 'View of Newton's Philosophy" υποστήριξε ότι ο Newton ονόμασε την πραγματεία του Universal Arithmetick σε αντίθεση με τον Descartes που ονόμασε την ανάλογη εργασία του, Γεωμετρία. Αν και δεν είναι σίγουρο ότι ο ίδιος, ο Newton, ή ο επιμελητής του βιβλίου του το ονόμασε έτσι, η αξία αυτής της μαρτυρίας βρίσκεται στο γεγονός ότι διατυπώνει ρητά τη διάκριση ανάμεσα στα δυο είδη Άλγεβρας και υποδηλώνει μια ευρύτερη συνειδητοποίηση της.

Όλα λοιπόν τα ιστορικά συνηγορούν ότι η *Arithmetica Universalis* αποτέλεσε ένα ορόσημο στην εξέλιξη της αλγεβρικής παιδείας. Μία τέτοια εκτίμηση επιτρέπει τη χρησιμοποίηση του βιβλίου αυτού ως σημείο αναφοράς στη μετέπειτα κατάσταση του κλάδου.

Μετά την παρουσίαση της αναλυτικής πορείας της Άλγεβρας μέχρι τη νευτώνεια σύνθεση της *Arithmetica Universalis*, θα πρέπει, να σταθούμε για λίγο σ' ένα παρακλάδι της, που αναπτύχθηκε από τον G. W. Leibniz (1646-1716) και προωθήθηκε από τους επιγόνους του.

Ο ιστορικός της επιστήμης E. J. Aiton σε μία σχετικά πρόσφατη βιβλιογραφική πραγματεία του για τον Leibniz επισήμανε ότι αυτός, θεωρούσε την Άλγεβρα ως μέρος της συνδυαστικής τέχνης (ars combinatoria) [35]. Η "τέχνη" αυτή, πρώιμο προϊόν της επιστημονικό-φιλοσοφικής δραστηριότητας του Leibniz [36], ήταν μια λογικό- γλωσσική θεώρηση, που η μεθοδολογική πλευρά της επικεντρωνόταν σ' έναν συνδυαστικό λογισμό. Ήταν ένας "λογικός" λογισμός που επιχειρούσε να αντικαταστήσει τις έννοιες με συνδυασμούς συμβόλων [37]. Για την επίτευξη αυτού του εγχειρήματος η συμβολικοποιημένη γλώσσα και η γραμματική της ήταν η ουσία του ερευνητικού προγράμματος, που ονόμαζε *"Γενικευμένη Χαρακτηριστική"* ή *"Καθολικός Συμβολισμός"* (*Universal Characteristic*). Παράλληλα όμως με τη γλωσσική πλευρά του προγράμματος του ο Leibniz επεδίωκε και προωθούσε τη λογική συμπεριφορά κι ανέλιξη της *"Γενικευμένης Χαρακτηριστικής"*. Με τον λογικό εξοπλισμό της ήθελε να εξασφαλίσει μία αυστηρή και συνεπή δομή και λειτουργία των πράξεων και των σχέσεων μεταξύ των συμβόλων, για να εκφραστούν και να αναπτυχθούν όλοι οι επιτρεπτοί συνδυασμοί των συμβολιζόμενων αντικειμένων. Η ολοκλήρωση όμως της *Γενικευμένης Χαρακτηριστικής* σ' ένα επαρκές καθολικό σύστημα, κάτι που αποσκοπούσε ο Leibniz, απαιτούσε μια μεθοδολογική επένδυση. Το ρόλο αυτό θα κάλυπτε η συνδυαστική τέχνη. Αρκετά ενδεικτικά για την περίπτωση μας, είναι τα λόγια του ίδιου του Leibniz σχετικά με το σκοπό και τα προβλήματα αυτής της "τέχνης":

" *Για μένα η συνδυαστική τέχνη είναι η επιστήμη ή, όπως θα μπορούσαμε να πούμε, η χαρακτηριστική ή η τέχνη της σημειογραφίας που έχει να κάνει με τις μορφές ή τους τύπους των πραγμάτων γενικά, δηλ. με τις ποιότητες τους, γενικά ή* *τη σχέση μεταξύ ομοίων κι ανόμοιων μ' αυτές· έτσι για παράδειγμα από τα δοσμένα στοιχεία a, b, c κ.τ.λ., τα οποία μπορούν να αναπαριστάνουν ποιότητες ή οποιουδήποτε άλλου είδους ιδιότητες, μπορούμε, παίρνοντας συνδυασμούς, να βρούμε αρκετά διαφορετικούς τύπους. Αυτό διακρίνει τη συνδυαστική χαρακτηριστική από την Άλγεβρα, η οποία έχει να κάνει με ποσοτικούς τύπους ή με σχέσεις μεταξύ ίσων και άνισων. Η Άλγεβρα λοιπόν, υπόκειται στην συνδυαστική τέχνη και σταθερά χρησιμοποιεί τους κανόνες της. Επομένως, οι κανόνες της συνδυαστικής τέχνης είναι πολύ πιο γενικοί και έχονν εφαρμογές όχι μόνο στην Άλγεβρα αλλά στην αποκρυπτογράφηση, σε διάφορα είδη παιχνιδιών κι ακόμα στην (κατασκευαστική) γεωμετρία όπως πραγματοποιήθηκε στά κλασικά χρόνια, με λίγα λόγια, σ' όλες τις περιπτώσεις στις οποίες κάποια σχέση ομοιότητας είναι υπό εξέταση" [38].*

Αυτό ήταν το επιστημολογικό υπόβαθρο της επιστημονικής δραστηριότητας του Leibniz γενικά και στην Άλγεβρα ειδικότερα. Είναι αλήθεια ότι δεν έγραψε κάποια ξεχωριστή πραγματεία για την Άλγεβρα. Ασχολήθηκε όμως με διάφορα αλγεβρικά θέματα, όπου μπορεί να διακρίνει κανείς την επίδραση της συνδυαστικής του επιστημολογίας στον τρόπο πραγμάτευσης τους [39]. Ένα πολύ χαρακτηριστικό παράδειγμα του αλγεβρικού στυλ του Leibniz είναι η περίπτωση της αντιμετώπισης ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων με τη βοήθεια της ορίζουσας [40]. Να παρατηρήσουμε εδώ ότι στη γενική βιβλιογραφία για την ιστορία της Άλγεβρας, σπάνια γίνεται αναφορά στον Leibniz. Κι αυτό οφείλεται, μάλλον, στην επιλεκτική αντίληψη της κατεστημένης ιστοριογραφίας των Μαθηματικών, η οποία επικεντρώνεται μόνο στην περιγραφή τιον πρωτοποριακών ιδεών και των δημιουργών τους, αγνοώντας παντελώς τα μεθοδολογικά κι επιστημολογικά πλαίσια μέσα στα οποία αναπτύσσεται η μαθηματική γνώση [41]. Έτσι σχετικά με τη συμβολή του Leibniz στην Άλγεβρα δύσκολα μπορεί κανείς να υποστηρίξει ότι περιέχει κορυφαία επιτεύγματα που σημάδεψαν την εξέλιξη της. Η συνδυαστική όμως επιστημολογία που εισήγαγε, άνοιξε ένα νέο κανάλι στην αλγεβρική και γενικότερα στη μαθηματική σκέψη, το οποίο επηρέασε το στυλ της Άλγεβρας και συνετέλεσε στη μεταστροφή της στις πρώτες δεκαετίες του 19ου αιώνα. Το στυλ αυτό καλλιεργήθηκε κι αναπτύχθηκε σ' ένα ευρύ κύκλο γερμανόφωνων διανοούμενων μ' αποτέλεσμα να διαμορφωθεί μια υποκείμενη επιστημονική παιδεία κατά τον 18ο και 19ο αιώνα [42]. Για την περίπτωση των Μαθηματικών και της Άλγεβρας ειδικότερα, οι Bernoulli και ο Ch. Wolff (1679-1754) ακολούθησαν και προώθησαν τον συνδυαστικό αυτόν προσανατολισμό, στο πρώτο μισό του 18ου αιώνα. Η πραγματεία ***Parallelismus rasiocini logici et algebraici*** (Παραλληλισμός μεταξύ λογικών και αλγεβρικών συλλογισμών, 1685) του Jacob Bernoulli (1654-1705) και το έργο ***Elements Matheseos*** (Στοιχεία Μαθήσεως) (1713-15) του Christian Wolff αποτελούν αντιπροσωπευτικά δείγματα διείσδυσης του συνδυαστικού πνεύματος του Leibniz. Ο L. Euler (1707-1783), που δεσπόζει στα Μαθηματικά του δεύτερου μισού του 18ου αιώνα και ανήκει στον επιστημολογικό φορέα των Leibniz - Bernoulli, παρουσιάζει κάποιες ενδείξεις του συνδυαστικού στυλ στη μαθηματική του δραστηριότητα [43]. Από την άλλη μεριά, την ίδια περίοδο, ο Johann H. Lambert (1728-1777) και ο Immanuel Kant (1724-1804) επεξεργάστηκαν την συνδυαστική επιστημολογία μέσα σ' ένα φιλοσοφικό-μαθηματικό πλαίσιο και έβαλαν σαφώς τη σφραγίδα τους στη μαθηματική σκέψη της επόμενης γενιάς [44].

Τέλος η συνδυαστική σχολή του Karl F. Hindenburg (1739-1808), όπως και οι Martin Ohm (1792-1872), Hermann Grassmann (1809-1877), Christoph Gudermann (1798-1851) σημάδεψαν βαθειά τη γερμανική κουλτούρα του 19ου αιώνα με τη συνδυαστική επιστημολογία.

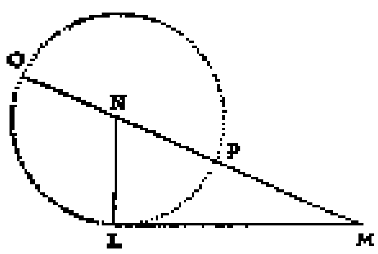
## Παράρτημα

Δύο αντιπροσωπευτικά παραδείγματα των αντίστοιχων επιστημολογικών παραδόσεων της Άλγεβρας στην αρχή του 18 ου αιώνα.

1ο Η λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης όπως παρουσιάζεται στη ***La geometrie*** του R. Descartes στις σελίδες 302 - 303 του έργου του ***Discours de la Methode*** (1637), όπου η ***Geometrie*** είναι παράρτημα του.

Et lors cete racine, ou ligne inconnue se trouue aysement. Car si i'ay par exemple

$$z^2 \infty az + bb$$




ie fais le triangle rectangle N L M, dont le costé L M est esgal à b racine quarrée de la quantité connue bb, & l'autre L N est $\frac{1}{2}a$, la moitié de l'autre quantité connue, qui estoit multipliée par z que ie suppose estre la ligne inconnue. puis prolongeant M N la baze de ce triangle, iusques a O, en sorte qu'N O soit esgale a N L, la toute O M est z la ligne cherchée. Et elle s'exprime en cete sorte

$$z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}.$$

**Μετάφραση:**

" *Τότε αυτή η ρίζα ή άγνωστη γραμμή μπορεί εύκολα να βρεθεί. Για παράδειγμα, αν έχω*

$$z^2=az+bb$$

*κατασκευάζω ένα ορθογώνιο τρίγωνο* NLM *με μια πλευρά την LM, ίση με b, η τετραγωνική ρίζα της γνωστής ποσότητας bb, και η άλλη πλευρά* LN, *ίση με* $\frac{1}{2}\alpha$, *που είναι το μισό της άλλης γνωστής ποσότητας, η οποία πολλαπλασιάζεται με z, το οποίο έχω υποθέσει ότι είναι η άγνωστη γραμμή. Τότε προεκτείνοντας την MN, την υποτείνουσα του τριγώνου, στο O, έτσι ώστε η NO να είναι ίση με* NL., *η όλη γραμμή OM είναι η ζητούμενη γραμμή z. Αυτό εκφράζεται με τον ακόλουθο τρόπο:*

$$z = \frac{1}{2}\alpha + \sqrt{\frac{1}{4}\alpha\alpha + bb} \quad \text{" [45]}$$

2ο Η λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης σύμφωνα με τα μαθήματα Άλγεβρας που έκανε ο I. Newton στο Cambridge την περίοδο 1673 -1683 κι αργότερα εκδόθηκαν ως ***Arithmetica Universalis***.

Reg: 7. *Aliquando etiam reductio per extractionem radicis ex utraq; aequationis parte instituitur.* Quemadmodum si habeatur $xx = \frac{1}{4}aa - bb$, extracta utrobiq; radice prodit $x = \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. Quod si habeatur $xx + aa = 2ax + bb$, transfer $2ax$ et exurget $xx - 2ax + aa = bb$, extractisq; partium radicibus $x - a = +$ vel $-b$, seu $x = a \pm b$. Sic etiam habito $xx = ax - bb$, adde utrinq; $-ax + \frac{1}{4}aa$ et prodit $xx - ax + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa - bb$, et extracta utrobiq; radice $x - \frac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ seu $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$.

**Μετάφραση:**

" *Κανόνας 7: Στην περίπτωση, επίσης, αναγωγής, επιτυγχάνεται με εξαγωγή της ρίζας κι απ' τις δύο μεριές της εξίσωσης. Για παράδειγμα, αν είναι* $xx = \frac{1}{4}\alpha\alpha - bb$, *όταν εξαχθεί η ρίζα έχει ως αποτέλεσμα* $x = \sqrt{\frac{1}{4}\alpha\alpha - bb}$ . *Κι αν είναι* $xx + \alpha\alpha = 2\alpha x + bb$. *μεταφέρεται το*

*2αx* και *προκύπτει* $xx - 2\alpha x + \alpha\alpha = bb$ *και όταν εξαχθούν οι ρίζες και απ' τις δύο μεριές, είναι* $x - \alpha = +$*ή*$-b$,*το οποίο είναι,* $x = \alpha \pm b$. *Έτσι επίσης, όταν είναι* $xx = \alpha x - bb$, *προστίθεται και στις δύο μεριές το* $-\alpha x + \frac{1}{4}\alpha\alpha$ *και έχει ως αποτέλεσμα*

$$xx - \alpha x + \frac{1}{4}\alpha\alpha = \frac{1}{4}\alpha\alpha - \text{bb}$$

*τότε. όταν εξαχθούν οι ρίζες κι απ' τις δύο μεριές,*

$$x - \frac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{4}\alpha\alpha - bb} \quad ή \quad x = \frac{1}{2}\alpha \pm \sqrt{\frac{1}{4}\alpha\alpha - bb} \text{ " [46]}$$

## Επιμύθιο

Βασική επιδίωξη αυτού του άρθρου δεν ήταν να εκθέσει μ' ένα γραμμικό τρόπο κάποια επιτεύγματα της αλγεβρικής δραστηριότητας το 17ο και στις αρχές του 18ου αιώνα, αλλά να δείξει την ύπαρξη παράλληλων και ανταγωνιστικών προσεγγίσεων και θεωρητικών βάσεων μέσα στον ίδιο επιστημονικό τομέα, την Άλγεβρα, την ίδια εποχή. Κι αυτό αποτελεί μία προσπάθεια να κατανοήσουμε την Ιστορία των Μαθηματικών και τα ίδια τα Μαθηματικά μέσα από το πρίσμα της επιστημολογίας του Kuhn, σύμφωνα με την οποία η επιστημονική γνώση δεν ανατύσσεται συσσωρευτικά, γραμμικά και ατομοκεντρικά, αλλά ανταγωνιστικά, ριζοσπαστικά και ομαδικά, δηλ. με "επιστημονικά παραδείγματα" "επιστημονικές επαναστάσεις" και "επιστημονικές κοινότητες" [47|.

## Παραπομπές


1. Βλ Bos, H.J. M..: Arguments on motivation in the rise and decline of a mathematical theory: The "construction of equations", 1637-ca 1750, *Archive for History of Exact Sciences* 30, 1984. σελ. 331 - 380. Επίσης βλ. Kline, M.:*Mathematical thougth from Ancient to Modern Times*, Oxford Univ. Press, 1972, σελ. 392.
2. Βλ. για παράδειγμα Καστανή, Ν. : Ο Αρχιμήδης και η τριτοβάθμια εξίσωση, περ. *Διάσταση*, 1989. Νο 1. σελ. 5 - 16.
3. Βλ. Gray, J.: *Descartes: Algebra and Geometry*, Open Univ.. Press, 1987, σελ. 11.
4. Βλ. Bos, H. J. M: On the Representation of Curves in Descartes Geometrie, *Archive for History of Exact Science* 24, 1981, σελ. 323.
5. Βλ. Boyer, C. B.: Early Graphical Solutions of Polynomial Equations, *Scripta Mathematica*, 11, 1945, σελ. 7.
6. Να σημειώσουμε ότι η μεθοδολογική αυτή ανακίνηση είχε τα πρώτα της ίχνη στο έργο *Effectionum geometricarium canonica recencio* (Tours, 1593) του Viete, (βλ Busard, H. L. L..: Viete, Francois, *Dictionary of Scientific Biography*, ed. by *C.C.* Gillispie, Vol. 14, σελ. 21).
7. Βλ. Lenoir, T.: Descartes and Geometrization of Thougth: the Methodological Background of Descartes' Geometrie, *Historia Mathematica*, 6, 1979, σελ. 377.
8. Βλ. Bos, H. J. M. πρ. παρ. [1] σελ. 334.
9. Βλ. στο ίδιο, σελ. 378.
10. Βλ. στο ίδιο, σελ. 378.
11. Βλ. στο ίδιο, σελ. 379.
12. Βλ. Mahoney, M.S.: *The Mathematical Career of Pierre de Fermat (1601-1665),* Princeton Univ. Press 1973, σελ. 36, 39.
13. Αμπακιστές ήταν εκείνοι που δίδασκαν εμπορική αριθμητική και έγραφαν σχετικά εγχειρίδια, τα abbaci, στην Ιταλία της ύστερο-μεσαιωνικής περιόδου της Αναγέννησης, βλ. EGMOND, W. von: *The Comercial Revolution and the Beginnings of Western Mathematics in Renaissance Florence 1300 - 1500*, Ph. D. Thesis, Indiana Univ. 1976. κεφ. III.
14. Η λέξη κοσσιστής είναι τεχνητή και διαμορφώθηκε από τη λέξη coss , που σημαίνει άγνωστη ποσότητα (στην κυριολεξία σημαίνει πράγμα), για να εκφράσει τους ασχολούμενους με την τέχνη επίλυσης προβλημάτων με τη βοήθεια αγνώστων και χρησιμοποιούσαν τον όρο coss. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το βιβλίο του Ch. Rudolff: *Behend und Hubsch Rechnung Durch die kunstreichen regrln Algebre so gemeinicklich die Coss genennt werden* (1525). Τους κοσσιστές θα μπορούσαμε να τους θεωρήσουμε ότι αποτελούν μια προέκταση των αμπακιστών, λόγω της συμβολής και δραστηριότητας τους σ' ένα υψηλότερο επίπεδο συστηματοποίησης της αναφερόμενης τέχνης. Για περισσότερα βλ. Mahoney, M. πρ. παρ. [12], σελ. 4-8.
15. Βλ. Mahoney, M. πρ. παρ. [12] σελ. 5.
16. Βλ. στο ίδιο.
17. Βλ. Flegg, G.: *From the Greeks to the Renaissance*, The Open Univ. Press, 1987, σελ. 34-5.
18. Βλ. Otte, M.: Ways of knowing and modes of presantations, στο *Moyens et medias dans l' enseignement des Mathematiques, XXXIVe Rencontre, Orleans*, 1982, σελ. 41 - 69, ειδ. παραγ. 8.
19. Βλ. Mahoney, M. πρ. παρ. [12], σελ. 39.
20. Βλ. στο ίδιο σελ. 34.

21. Να σημειώσουμε εδώ ότι η διαφορά της "ρητικής" από την "εξηγητική" προέρχεται από τη διάκριση που έκανε ο Viete στην αριθμητική από τη γεωμετρική αναφορά της διαδικασίας επίλυσης.
22. Στα χειρόγραφα του κυρίως κι όχι στο βιβλίο του όπου, δεν σημειώνεται καμία νύξη στο Viete.
23. Θα λέγαμε ότι οι μαθηματικοί practitioners στην Αγγλία ήταν κάτι ανάλογο με τους αρχαίους Έλληνες σοφιστές στη ρητορική.
24. Βλ. Fauvel, *J.·. The Renaissance of Mathematical Science in Britain*, The Open Univ. Press, 1987, σελ. 24.
25. Βλ. Lohne, *J.* A.:Harriot, Thomas, στο *Dictionary of Scientific Biography*, ed. by C.C. Gillispie, Vol. 6. σελ. 125.
26. Βλ. Le Noir, T.: *The social and intellectual ROOTS of discovery in seventeenth century mathematics*, Ph. D. Indiana University, 1974, σελ. 416. 27. Βλ. Scott, J. F.: *The mathematical work of John Wallis*, Chelsea Publ. Comp. 1981, σελ. 133-7.
28. Βλ. Hall, R.A.:*From Gallileo to Newton 1630 - 1720*, Harper and Row Publ, 1963, σελ. 338 - 9. Επίσης βλ. Κονδύλης, Π.*: Ο Ευρωπαϊκός Διαφωτισμός*, εκδ. Θεμέλιο, 1987. τομ. I, σελ. 235 - 257 και 295 - 7.
29. Βλ. Le Noir, T. πρ. παραπ. [26], 561.461.
30. Βλ. Boyer, C. B.: Analysis: notes on the evolution of a subject and a name.*The Mathematical Teacher*, 47, 1954, σελ. 456. Επίσης, βλ. Cohen, I. B.: Newton, *Dictionary of Scientific Biography*, *ed. by* C. C. Gillispie, Vol. 10, σελ. 51.
31. Να επισημάνουμε την ίδια στάση είχαν ο Peter Pamus, ο Francois Viete, ο Pene Descartes, βλ. Mahoney, M.S., πρ. παρ. [12], σελ. 32.
32. Βλ. Whiteside, D. T. (ed.): *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Cambridge Univ. Press, 1972, Vol. 5, σελ. 4.
33. Βλ. στο ίδιο.
34. Υπήρξαν το λιγότερο 5 λατινικές εκδόσεις (1707, 1722, 1732, 1732,1752,1761) τρεις αγγλικές (1720, 1728,1769) και μια γαλλική (1802).
35. Βλ. Aiton, E. J.: *Leibniz. A Biography*, Adam Hilger Ltd, 1985, σελ. 125.
36. Την πρωτοεπεξεογάστηκε ως θέμα διατριβής του στη φιλοσοφική σχολή του πανεπιστημίου της Λειψίας με τίτλο*: Disputatio arithetica de complexionibus* και ως δημοσιευμένη πραγματεία το 1666, με τίτλο*: Dissertatio de arte combinatoria*, βλ. Aiton, E. J., πρ. παρ. [35]. σελ. 17.
37. Βλ. Otte, M.: The ideas of Hermann Grassmann in the context of the mathematical and philosophical tradition since Leibniz*, Historia Mathematica,* 16, 1989,σελ. 16.
38. Βλ. Styazhkin, N. I.*: Histosy of mathematical logic from Leibniz to Peano*, The M.I.T. Press, 1969, σελ. 70.
39. Βλ. Knobloch, E. (hrg.): Leibniz, G. W*. Ein Dialog zur Einfuhrung in die Arithmetik und Algebra*, Fromman - Holzeboog, 1976.
40. Βλ. Knobloch, E.: Studien von Leibniz Determination Kalkul, *Studia Leibnitiana Supplementa*, 13, 1974, σελ. 37-45.
41. Αντιπροσωπευτικό παράδειγμα τέτοιου είδους ιστοριογραφία είναι το βιβλίο του B. L. van der Waerden: *A History of Algebra,* Springer - Verlag 1985.
42. Βλ. Martin, G.: *Arithmetic and Combinatorics*, Southern Illinois Univ. Press 1985. Επίσης βλ. Thiel, Ch.: From Leibniz to Frege. Mathematical logic between 1679 and 1879, στο *Cohen, L. J. et al. (eds.): Logic, Methodology and Philosophy of Science VI*, North - Holland Publ. 1982. σελ. 755 - 770 και Manning, K.R.: "The emergence of weierstrassian approach to complex analysis, *Arch. for Hist. of Ex. Sci*, 14, 1974. σελ. 297 - 383, ειδικά σελ. 329 - 340.
43. Σχετικούς υπαινιγμούς βρίσκουμε στο βιβλίο του G. Martin, βλ. πρ. παρ. [42]. Το

θέμα δεν έχει μελετηθεί μέχρι σήμερα συστηματικά και σε βάθος.

44. Βλ. Martin, G. πρ. παρ. [42].
45. Βλ. Smith, *D.* E./ M.L. Latham (trans.):*The geometry of Rene Descartes*, Dover Publ., 1954, σελ. 12 -15.
46. Βλ. Whiteside, D; I; (ed.): *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Vol. 5, Cambridge Univ. Press, 1972, σελ. 116-7.
47. Βλ. Kuhn, T.*: Η δομή των επιστημονικών επαναστάσεων*, εκδ. Σύγχρονα θέματα. 1981.