ΔΙΕΙΣΔΥΣΗ ΤΗΣ ΙΣΛΑΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΣΤΗ ΧΡΙΣΤΙΑΝΙΚΗ ΠΑΙΔΕΙΑ ΤΟΥ 12ου ΑΙΩΝΑ

Ν. Καστάνη

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το *σωτήριο έτος* 1145 ο Ρόμπερτ από την Τσέστερ της Αγγλίας[1] (12ος αιώνας μ.Χ.), αρχιδιάκονος της πόλης Παμπελούνα[2] της βόρειας Ισπανίας, μετάφρασε στα λατινικά, στην πόλη Σεγκόβια[3] της κεντρικής Ισπανίας[4], το πρώτο μέρος του βιβλίου: *Κιτάμπ αλ-μουχτασάρ φι' λ-χισάμπ αλ-τζαμπρ ουάλ-μουκαμπάλα*[5] (*Συνοπτικό βιβλίο για υπολογισμό με την αναγωγή και την ισοστάθμιση*)[6] του διαπρεπή μουσουλμάνου μαθηματικού αλ-Χουαρίζμι[7] (9ος αιώνας μ.Χ.). Ο λατινικός τίτλος που δόθηκε σ' αυτή τη μετάφραση ήταν: *Liber Algebrae et Almucabola, de quaestionibus arithmeticis et geometricis*[8] και περιείχε την τεχνική των αγνώστων στη λύση πρβλημάτων. Λίγα χρόνια αργότερα ο ιταλός λόγιος Τζεράρντο από την Κρεμόνα[9] της Βόρειας Ιταλίας (περ. 1114-1187 μ.Χ.) έκανε, στο Τολέδο[10] της κεντρικής Ισπανίας, μια δεύτερη, πολύ πιο πιστή[11], λατινική μετάφραση του ίδιου ακριβώς κειμένου, με φερόμενο τίτλο: *Liber alchoarismi de iehbra et almucabula tractatus I*[12].

Στον κύκλο των λατινικών μεταφράσεων του συγκεκριμένου αραβικού κειμένου περιλαμβάνεται κι άλλη μια. Αυτή που έκανε, στα τέλη του 13ου αιώνα, κάποιος William de Lunis.[13] Οι μεταφράσεις αυτές, στη συνέχεια, αντιγράφηκαν και αποτέλεσαν μια δέσμη από 15 τουλάχιστον χειρόγραφα, που διασπάρθηκαν σ' όλη τη δυτικο-ευρωπαϊκή παιδεία μέχρι τα τέλη του 16ου αιώνα.[14] Παράλληλα αξιοποιήθηκαν ευρύτατα από άλλους συγγραφείς, προσαρμόζοντας αρκετά στοιχεία τους στο περιεχόμενο των δικών τους έργων.

Οι συγκεκριμένες μεταφράσεις δεν πρόβαλαν ως μεμονωμένες εκφάνσεις μιας νέας μαθηματικής τεχνικής και γνώσης, αλλά διαπλέχτηκαν στενά με μεταφράσεις δύο συναφών θεμάτων. Το πρώτο έχει να κάνει με την εφαρμογή της τεχνικής των αγνώστων στη Γεωμετρία. Μια θεματική ενότητα που δεν διέφυγε από την προσοχή των μεταφραστών και των

[1] Σε αγγλική απόδοση: Robert of Chester.
[2] Στα αγγλικά: Pampeluna.
[3] Στα αγγλικά: Segovia.
[4] Βλ. Karpnski, L.C. : *Robert of Chester's Latin Translation of the Algebra of Al-Khowarizmi*, University of Michigan, 1930, σελ. 13, 26.
[5] Σε λατινόμορφη μεταγραφή: *Kitab al-mukhtasar fi' l-hisab al-jabr wa 'l-muqabala*.
[6] Βλ. Mahoney, M.S.: Mathematics, στο Lindberg, D.C.(ed.): *Science in the Middle Ages*, The University of Chicago Press, 1978, σελ. 145-178, ειδ. σελ. 157.
[7] Σε αγγλική απόδοση: Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi.
[8] Βλ. Karpinski, L.C., πρ. παρ. 4, σελ. 67.
[9] Στα αγγλικά: Gerardo of Cremona.
[10] Στα αγγλικά: Toledo
[11] Βλ. Høyrup, J. : A New Art in Ancient Clothes. Itineraries chosen between Scholasticism and Baroque in order to make *algebra* appear legitimate, and their impact on the substance of the discipline, *Preprints og reprints, Nr. 1, 1996,*Roskilde University Centre, Section for Philosophy and Science Studies, σελ. 6.
[12] Βλ. Kaprinski, L.C., πρ. παρ. 4, σελ. 42.
[13] Βλ. Hughes, B. : The Medieval Latin Translations of Al-Khwarismi's Al-Jabr, *Manuscripta*, 26, 1982, σελ. 31-37, ειδ. σελ. 34-36.
[14] Στο ίδιο.

αντίστοιχων “επιτελικών” παραγόντων του 12ου αιώνα. Πολύ νωρίς, πιθανότατα πριν τη μετάφραση του έργου του αλ-Χουαρίζμι από τον Ρόμπερτ του Τσέστερ, μεταφράστηκε από τον Τζόν (Ιωάννη) της Σεβίλλης[15] (12ος αιώνας μ.Χ.) μια πρακτική Αριθμητική του Αλ-Χουαρίζμι, με τίτλο *Liber Alghoerismi de pratica arismetrise*, όπου επιλύονται προβλήματα με τη τεχνική των αγνώστων.[16] Επίσης, λίγο αργότερα, ο Τζεράρντο της Κρεμόνας μετάφρασε μια πρακτική Γεωμετρία κάποιου Αμπού Μπακρ[17], όπου χρησιμοποιείται η τεχνική των αγνώστων, με τίτλο *Liber mensurationum*.[18] Το δεύτερο θέμα, που δεν σχετίζεται άμεσα με την τεχνική των αγνώστων στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, αλλά έμμεσα, ήταν η νέα πρακτική Αριθμητική με τη θεσιακή αναπαράσταση των αριθμών και τη γραπτή αλγοριθμική τεχνική των αριθμητικών υπολογισμών, γνωστή ως *Ινδο-Αραβική Αριθμητική*. Μια σειρά από λατινικά χειρόγραφα, του 12ου αιώνα, της νέας αυτής Αριθμητικής έχουν τη ρίζα τους στο έργο *Κιτάμπ αλ-χισάμπ αλ-χιντί*[19] *(Βιβλίο Ινδικής Λογαριαστικής)* και στο *Κιτάμπ αλ-τζαμ ουα αλ-ταφρίκ*[20] *(Βιβλίο για την πρόσθεση και την αφαίρεση)* του αλ-Χουαρίζμι.[21]

Η *Ινδο-Αραβική Αριθμητική* ήταν ένας από τους κυριότερους φορείς της νέας μαθηματικής σκέψης, που αναπτύχθηκε στα πλαίσια της ισλαμικής παιδείας και μεταλαμπαδεύτηκε στη ρωμαιοκαθολική κουλτούρα το 12ο αιώνα, διαμέσου της τεράστιας μεταφραστικής επιχείρησης στη χριστιανική, τότε, Ισπανία. Οι μεταφράσεις αυτές μελετήθηκαν, αντιγράφηκαν και επηρέασαν σημαντικότατα το μαθηματικό πνεύμα του ρωμαιοκαθολικού πολιτισμού στον ύστερο Μεσαίωνα και την Αναγέννηση. Και το έργο αυτό το ανέλαβε, το συντόνισε και το χρηματοδότησε ένας κύκλος ανώτερων κληρικών της Καθολικής Εκκλησίας. Γεγονός που υποκρύπτει μια βαθιά αντίφαση. Αυτή της συνύπαρξης μιας μεγάλης ιδεολογικής εχθρότητας και μιας ένθερμης πνευματικής αποδοχής. Από τη μια, δηλαδή, οι αναθεματισμοί και οι πολεμικές προτροπές (όπως π.χ. οι Σταυροφορίες) ενάντια στους *Άπιστους* και από την άλλη η γιγάντια κινητοποίηση της παποσύνης για την πρόσληψη όλου του διανοητικού υπόβαθρου των *Αντίχριστων Αγαρηνών*. Είναι λοιπόν φανερό ότι η αποσαφήνιση αυτής της αντίφασης θα αποτελέσει το κλειδί για την υπέρβαση των ιστοριογραφικών επιφαινόμενων και την καλύτερη κατανόηση της μαθηματικής έκρηξης και γενικότερα της πνευματικής και πολιτισμικής αναβάθμισης του ρωμαιοκαθολικισμού. Έτσι θα ανοίξει και η δυνατότητα μιας πλαισιοκρατικής [contextual][22] αναπαράστασης της αλγεβρικής σκέψης και παιδείας, από το 12ο αιώνα και μετά.

[15] Σε αγγλική απόδοση: John (Ioannis) of Seville.
[16] Βλ. Høyrup, J., πρ. παρ. 11, σελ. 5.
[17] Στα αγγλικά: Abu Bakr.
[18] Στο ίδιο, σελ. 7
[19] Σε λατινόμορφη μεταγραφή: *Kitab al-hisab al-hindi.*
[20] Σε λατινόμορφη μεταγραφή: *Kitab al-jam wa al-tafriq*.
[21] Βλ. Allard, A.: The Arabic Origins and Development of Latin Algorisms in the Twelfth Century, *Arabic Sciences and Philosophy,* 1, 1991, σελ. 233-283 και Folkerts, M.: Early Texts on Hindu-Arabic Calculation, *Preprint 79,1997*, Max Planck Institute for the History of Science.
[22] Δηλαδή μιας προσέγγισης που θα εμπλουτίζει την ιστορική κατανόηση των επιμέρους πρωτοβουλιών, καινοτομιών και επιτευγμάτων με το πολιτισμικό και πνευματικό πλαίσιο αναφοράς τους, βλ. π.χ. Calinger, R.: *A Contextual History of Mathematics*, Prentice Hall, 1999, σελ. ix-x.

ΜΕΤΑΚΑΡΟΛΙΔΕΙΟΣ ΑΝΑΝΕΩΤΙΣΜΟΣ ΣΤΗ ΡΩΜΑΙΟΚΑΘΟΛΙΚΗ ΠΑΙΔΕΙΑ

Στην ιστορία του ευρωπαϊκού πολιτισμού η “καρολίδεια εποχή”, δηλαδή η περίοδος της δυναστείας των *Καρολίδων* του 8ου και 9ου αιώνα μ.Χ. και ιδιαίτερα του Καρλομάγνου (768-814 μ.Χ.), αποτελεί την πρώτη αναλαμπή μιας ενωμένης πολιτικής κυριαρχίας στην Ευρώπη, μετά τη διάλυση της Ρωμαϊκής Αυτοκρατορίας και ταυτόχρονα την πρώτη ανέλιξη της παπικής δύναμης.[23] Αρκετά ενδεικτική είναι η ηγεμονική ανέλιξη του Καρλομάγνου, ο οποίος, εκμεταλλευόμενος την παπική εξαχρείωση, επιβλήθηκε στην Αγία Έδρα και εκμαίευσε την αναγνώρισή του ως ο αναμφισβήτητος ηγεμόνας της Ευρώπης, ως ο νέος ρωμαίος αυτοκράτορας.[24] Από την άλλη μεριά η Αγία Έδρα προικοδοτήθηκε από τους *Καρολίδες*, που της δώρισαν μεγάλες περιοχές της κεντρικής Ιταλίας, οι οποίες συγκρότησαν το Παπικό Κράτος.[25] Παράλληλα προσέδωσαν στον Πάπα έναν σημαντικότατο ρόλο στα πολιτικά δρώμενα της Ευρώπης, ως ιδεολογικό εγγυητή και θεματοφύλακα της ηγεμονικής νομιμότητας. Έγινε έτσι η παποσύνη ένας ρυθμιστικός παράγοντας στις εξελίξεις των ηγεμονικών επιδιώξεων, που τον αξιοποίησε στο έπακρο για την πολιτική και οικονομική της ισχυροποίηση. Και είναι αλήθεια ότι με τον τρόπο αυτό κατάφερε να γίνει μια καθοριστική συνιστώσα στα πολιτικά τεκταινόμενα της εποχής εκείνης και να αποκτήσει μια σημαντικότατη οικονομική ευρωστία.

Αυτός όμως ο προσανατολισμός της στις πολιτικο-οικομικές συναλλαγές, χαρακτηρίζονταν από μια κοσμική συμπεριφορά και νοοτροπία παρά από μια πνευματική, θεογνωστική, αποστολή. Αξίζει να επισημανθεί ότι η οργάνωση της παιδείας την εποχή του Καρλομάγνου, απ’ όπου προήλθε η *Καρολίδεια Αναγέννηση*, είχε παλατινό χαρακτήρα και θεσμικό πλαίσιο. Με τη σχολή του παλατιού, ο Καρλομάγνος επεδίωκε την κατάρτιση στελεχών στον διοικητικό και εκκλησιαστικό τομέα και είχε ως απώτερο σκοπό την διοικητική και πολιτιστική συγκρότηση και ανάπτυξη της φραγκικής αυτοκρατορίας.[26] Μια εκπαιδευτική και πολιτιστική πολιτική που παραγκώνιζε τον οποιοδήποτε ρωμαιοκαθολικό έλεγχο και την οποιαδήποτε ρωμαιοκαθολική επίβλεψη της πνευματικής ζωής. Και είναι αλήθεια ότι η συγκεκριμένη υποβάθμιση της Καθολικής Εκκλησίας από τον πνευματικό και ιεραποστολικό της προορισμό δεν έμεινε απαρατήρητη στις κοινότητες των ιερωμένων της. Συγκεκριμένα από τον 10ο αιώνα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της Καθολικής Εκκλησίας ένα μεταρρυθμιστικό κίνημα, που υποστηρίζονταν από τους Βενεδικτίνους μοναχούς στο ευρύτατο δίκτυο μοναστηριών της Ευρώπης, με επικεφαλής την επιβλητική μοναχική κοινότητα του Κλυνύ [Cluny (ιδρύθηκε το 910 μ.Χ.)] της κεντρικής Γαλλίας. Το σκεπτικό του κινήματος επικεντρωνόταν γύρω από την ιδέα ό,τι για να είναι η Εκκλησία σε θέση να εκπληρώνει τον πνευματικό της προορισμό θα έπρεπε να πορεύεται έξω από την τροχιά της κοσμικής εξουσίας.[27] Οι μοναχοί, λοιπόν, του Κλυνύ είχαν τις πρωτοβουλίες και πρωτοστάτησαν στην πνευματική ανασυγκρότηση του ρωμαιοκαθολικισμού.

Μέσα απ’ αυτή την οπτική γωνία δεν είναι καθόλου ασύμβατη η προσπάθεια των πρωτοπόρων και οπαδών του μεταρρυθμιστικού κινήματος να κυριαρχήσουν στον χώρο της παιδείας και να έχουν την πλήρη επίβλεψη του.[28] Ούτε ήταν παράξενη η αποστολή του Ζερμπέρ ντε Ωρυγιάκ [Gerbert d’ Aurillac (περ.945-1003 μ.Χ.)] στην Καταλονία της βόρειας

---

[23] Βλ. Τσιρπανλή, Ζ.Ν.: *Εισαγωγή στη Μεσαιωνική Ιστορία της Δυτικής Ευρώπης*, εκδ. Ζήτη, 1996, σελ. 105.
[24] Στο ίδιο, σελ. 113-115.
[25] Στο ίδιο, σελ. 108.
[26] Στο ίδιο, σελ. 123.
[27] Βλ. McNeill, W.H.: *Ιστορία της Ανθρώπινης Κοινωνίας,* εκδ. Παρασκήνιο, 1992, σελ. 607.
[28] “Ως το 1100 μ.Χ. περίπου, η μόρφωση στην βόρεια Ευρώπη βρισκόταν, στο μεγαλύτερό της μέρος, στα χέρια των μοναχών”, βλ. Ρόουλιν, Μ.: *Η Καθημερινή Ζωή στο Μεσαίωνα*, εκδ. Δ.Μ. Παπαδήμα, 1988, σελ. 160.

Ισπανίας για να μελετήσει τις μαθηματικές γνώσεις των μουσουλμάνων της Ιβηρικής χερσονήσου. Ο Ζερμπέρ, που ήταν Βενεδικτίνος μοναχός του Κλυνύ και το 999 μ.Χ. έγινε Πάπας με το όνομα Σύλβεστρος Β' [Sylvester II], παρουσίασε πρώτος στην ρωμαιοκαθολική παιδεία ένα είδος ινδο-αραβικής παράστασης των αριθμών.[29] Αγωνίστηκε "να πείσει τους εχθρούς της μόρφωσης πως η μελέτη, ιδιαίτερα της Φιλοσοφίας και της Λογικής, είναι προς όφελος και όχι προς ζημία του Χριστιανισμού. [Υπήρξε] για δέκα χρόνια επιθεωρητής των επισκοπικών σχολείων της Γαλλίας [και τότε άρχισε] να πνέει ένας ανανεωτικός άνεμος".[30] Από το 972 μέχρι το 989 δίδαξε στην επισκοπική σχολή της πόλης Ρενς [Reims[31]], όπου έδωσε έμφαση στα Μαθηματικά (αν και στοιχειώδη) και την Αστρονομία. Απέκτησε μάλιστα τη φήμη μεγάλου δασκάλου, μια φήμη που μεταφέρθηκε και στους διακεκριμένους μαθητές του οι οποίοι συνέχισαν με μεγάλο ενθουσιασμό και επέκτειναν τη διδασκαλία του. Οι σημαντικότεροι από τους μαθητές του συνδέονται με την ακτινοβολία των καθεδρικών σχολών της Δυτικής Ευρώπης, που αναδύθηκαν τον 11ο αιώνα και αποτέλεσαν τα σπουδαιότερα κέντρα μόρφωσης μέχρι τα τέλη του 12ου αιώνα, δηλαδή μέχρι την εμφάνιση των πανεπιστημίων.[32]

Επισημάνθηκαν, μέχρι τώρα, δύο σημαντικές ανανεωτικές συνιστώσες της ρωμαιοκαθολικής παιδείας του 10ου και 11ου αιώνα: το μεταρρυθμιστικό κίνημα, που πρωτοστατούσαν οι Βενεδικτίνοι μοναχοί του Κλυνύ και τη σταδιακή μετάβαση της εκπαίδευσης "από τη δικαιοδοσία των μονών στη δικαιοδοσία των κοσμικού κλήρου που επάνδρωνε τα σχολεία των καθεδρικών ναών των πόλεων"[33]. Είναι αλήθεια ότι οι συνιστώσες αυτές έβγαζαν την ρωμαιοκαθολική παιδεία από τον κλοιό της υποτονικότητας και της απομόνωσης, την έκαναν έτσι ανοικτή, ευπρόσδεκτη και αναμορφωτική. Ωστόσο δεν φαίνεται να ήταν αρκετά ισχυρές για να υπερβούν τους θρησκευτικούς φανατισμούς και να γεφυρώσουν αντιδιαμετρικά είδη γνώσεων και νοοτροπιών. Χρειαζόταν κάτι ισχυρότερο. Και για να φανεί αυτό απαιτείται μια βαθύτερη ανίχνευση στις νέες συμπεριφορές, τα νέα μέσα και τις νέες ανάγκες της συγκεκριμένης ιστορικής περιόδου.

Για το σκοπό αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι μια από τις σημαντικότερες εξελίξεις του 11ου αιώνα ήταν ο ισχυρότατος παρεμβατισμός της παποσύνης σε καθοριστικά ζητήματα της τότε στρατιωτικής και πολιτικής πραγματικότητας, εκτός από τη μονοπώληση της πνευματικής ζωής την οποία είχε ήδη εδραιώσει. Η πιο χαρακτηριστική περίπτωση ήταν η παρακίνηση και η μεθόδευση της πρώτης σταυροφορίας από τον πάπα Ουρβανό Β' [Urbain II], το 1095 μ.Χ. Το πρωτοφανές αυτό γεγονός της παπικής καθοδήγησης ενός θρησκευτικού πολέμου σηματοδοτεί σε μεγάλο βαθμό τις διαθέσεις και τις συμπεριφορές της Καθολικής Εκκλησίας τη συγκεκριμένη περίοδο. Είναι μάλιστα ενδιαφέρον να αναφερθεί ότι η επιθετική αυτή στάση φορτίστηκε από τα μέσα του 11ου αιώνα, όταν οι γάλλοι μοναχοί του Κλυνύ υποθάλπανε και καλλιεργούσαν την πρόφαση των προσκυνημάτων στη μουσουλμανική Ισπανία[34] και με τον

---

[29] Βλ. Boyer, C.B. / Merzbach, U.C.: *Ιστορία των Μαθηματικών*, εκδ. Γ.Α. Πνευματικού, 1997, σελ. 280-281. Επίσης βλ. Pekonen, O.: Gerbert of Aurillac: Mathematician and Pope, *The Mathematical Inteligencer*, 22(4), 2000, σελ. 67-70 και Ρόουλιν, Μ. πρ. παρ. 17, σελ.162 κ.ε.

[30] Βλ. Καρζή, Θ.: *Η Παδεία στο Μεσαίωνα*, εκδ. Φιλιππότη, 1998, σελ. 102.

[31] Βρίσκεται βορειο-ανατολικά και κοντά στο Παρίσι. Ήταν μητροπολιτική έδρα και είχε μεγάλη θρησκευτική και πολιτική ακτινοβολία, που αυξήθηκε ακόμη περισσότερο από τον 11ο αιώνα όταν η εκκλησία της έγινε ο τόπος στέψης των βασιλέων της Γαλλίας, βλ. Le Goff, J.: *Ο Πολιτισμός της Μεσαιωνικής Δύσης*, εκδ. Βάνιας, 1993, σελ. 586.

[32] Βλ. Grant, E.: *Οι Φυσικές Επιστήμες τον Μεσαίωνα*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 1994, σελ. 22-23. Επίσης βλ. του ιδίου: *The Foundations of Modern Science in the Middle Ages. Their Religious, Institutional, and Intellectual Contexts*, Cambridge Univ. Press, 1996, σελ. 19-20.

[33] Βλ. Reynolds, L.D. / Wilson, N.G.: *Αντιγραφείς και Φιλόλογοι. Το Ιστορικό της Παράδοσης των Κλασικών Κειμένων*, εκδ. Μορφωτικού Ιδρύματος της Εθνικής Τράπεζας, 1981, σελ. 134.

[34] Βλ. Le Goff, J. πρ. παρ. 31, σελ. 97.

τρόπο αυτό υποδαύλιζαν και στήριζαν τις πολεμικές ενέργειες των χριστιανικών δυνάμεων για την επανάκτηση της Ισπανίας από τους μουσουλμάνους, που επιτεύχθηκε, ως ένα βαθμό, το 1085 μ.Χ. Και κάτι ακόμη. Το πνεύμα αυτό της θρησκευτικής αντιπαλότητας δεν συνέβαλε μόνο στην εν λόγω στρατολόγηση και τη στρατιωτική αποφασιστικότητα, αλλά υπεισέρχονταν και στην *πολεμική λεία*. Στην προκειμένη περίπτωση, μια πολύ καλή μαρτυρία αποτελεί η δήλωση: *"Για να αρνηθούμε το δόγμα τους [δηλ. των μουσουλμάνων] πρέπει πρώτα να το γνωρίζουμε"*[35], του Πιέρ λε Βενεράμπλ [Pierre le Vénérable (1094-1156 μ.Χ.)], του τελευταίου σημαντικού αββά του Κλυνύ που προέτρεψε, χρηματοδότησε και επιθεώρησε ένα μέρος των πρώτων λατινικών μεταφράσεων από τα αραβικά στην κεντρική Ισπανία[36]. Μια δήλωση η οποία δεν αποκαλύπτεται μόνο το θρησκευτικο-πολεμικό κίνητρο του αββά Πιέρ, αλλά και μια σημαντικότατη διάσταση της νομιμοποίησης και αποδοχής του μεταφραστικού κύματος αραβικών έργων στα λατινικά, που αναπτύχθηκε στην Ισπανία το 12ο αιώνα.

Είναι γεγονός ότι η Καθολική Εκκλησία όχι μόνο δεν ήταν αντίθετη για την πρόσληψη της ισλαμικής κουλτούρας, αλλά ενθάρρυνε και στήριξε όλη τη μεταφραστική δραστηριότητα. Όπως μάλιστα φαίνεται, το ενδιαφέρον της δεν περιορίστηκε σε μια απολογητική κατεύθυνση, αλλά απλώθηκε σ' ένα ευρύ φάσμα θεμάτων, από τα Μαθηματικά και την Ιατρική μέχρι τη Φιλοσοφία και τη Λογική. Και αυτό αποτυπώνεται στους φορείς που οργάνωσαν, στήριξαν και ώθησαν τις μεταφραστικές ομάδες από τη μια, όπως ο αρχιεπίσκοπος του Τολέδο Ρεϊμόν [Raymond (12ος αιώνας μ.Χ.)], ο διάδοχός του Ιωάννης [Iohannes], ο επίσκοπος της Ταραζόνα [Tarazona] Μισέλ [Michael][37], αλλά και ο αββάς Πιέρ, ενώ από την άλλη στα προϊόντα όλης αυτής της μεταφραστικής δραστηριότητας[38]. Πρόκειται για μια πολύ μεγάλη επιχείρηση διαπολιτισμικής μεταφοράς ισλαμικής γνώσης στη ρωμαιοκαθολική παιδεία, η οποία δεν έγινε λαθραία, αλλά με την πλήρη συγκατάθεση της Καθολικής Εκκλησίας. Μια συγκατάθεση η οποία σηματοδοτεί, κύρια, την προσοικείωση νέων νοητικών περιεχομένων και εργαλείων για τις ανανεωτικές απαιτήσεις της χριστιανικής παιδείας και για την προσαρμογή των γνωστικών εφοδίων στις νέες πολιτισμικές συνθήκες. Απηχεί, δηλαδή, έναν πνευματικό εκσυγχρονισμό, όπου η απολογητική σκοπιμότητα δεν μπορεί παρά να ήταν μια πρόφαση ή μια αφορμή ή μια ελάσσονα παράμετρος. Γι' αυτό, πολύ σωστά, ο 12ος αιώνας θεωρείται ως η περίοδος της πρώτης Αναγέννησης στην Ευρώπη.

Μέσα στις νέες πολιτισμικές συνθήκες, δύο καινοτομίες διαπλέκονταν στενά με τη δυναμική της πνευματικής Αναγέννησης του 12ου αιώνα. Πρόκειται για δύο αξιοσημείωτες αλλαγές. Η πρώτη είχε να κάνει με τη χρησιμοποίηση του χαρτιού ως μέσον επικοινωνίας και η δεύτερη με το γραπτό τρόπο συναλλαγών και πιστωτικών λογαριασμών. Σχετικά με την πρώτη καινοτομία αξίζει να σημειωθεί ότι το χαρτί ήταν ένα νέο υλικό, που γνώριζαν την κατασκευή του οι Κινέζοι και έμαθαν την αναπαραγωγή του οι Άραβες το 751 μ.Χ. από κινέζους αιχμαλώτους, οι οποίοι διέδωσαν την τέχνη τους στον κόσμο του Ισλάμ. Γρήγορα διαδόθηκε η χρήση του χαρτιού σ' όλο τον Ισλαμικό Πολιτισμό. Αναφέρεται, μάλιστα, ότι ο Χαλίφης Χαρούν αλ-Ρασίντ [Harrun al-Rashid (ακμ. 786-809 μ.Χ.)] έδωσε διαταγή να χρησιμοποιείται το χαρτί σ' όλες τις κυβερνητικές υπηρεσίες ως αντικειμενικός τρόπος συστηματοποίησης και διεκπεραίωσης της διοικητικής λειτουργίας. Γύρω στο 800 μ.Χ. άρχισε να χρησιμοποιείται στην Αίγυπτο και στο 900 μ.Χ. στη μουσουλμανική Ισπανία. Ωστόσο μόνο από το 10ο αιώνα

---

[35] Βλ. Λε Γκοφ, Ζ.: *Οι Διανοούμενοι στο Μεσαίωνα*, εκδ. Κέδρος, 2002, σελ. 46.

[36] Βλ. Le Goff, J. πρ. παρ. 20, σελ. 583 και Haskins, Ch.H.: *Studies in the History of Mediaeval Science*, Harvard Univ. Press, 1924, σελ. 54-56.

[37] Βλ. Alverny, M.-T. d': Translations and Translators, στο Benson, R.L. / Constable, G.(eds.): *Renaissance and Renewal in the Twelfth Century*, Clarendon Press, 1982, σελ. 421-462, ειδ. σελ. 444-448.

[38] Βλ. Crompie, A.C.: *Από τον Αυγουστίνο στον Γαλιλαίο*, εκδ. Μορφωτικού Ιδρύματος της Εθνικής Τράπεζας, 1989, σελ. 58 κ.ε.

και μετά υπάρχουν σαφείς ενδείξεις ότι η παραγωγή χαρτιού γινόταν και εκτός της ευρείας περιοχής της Βαγδάτης, που σημαίνει ότι άρχισαν να υπάρχουν σχετικές βιοτεχνίες στη βόρεια Αφρική και στην Ισπανία. Σε συνάρτηση με το γεγονός αυτό, είναι αρκετά διεισδυτική η παρατήρηση ότι η χρήση του χαρτιού επηρέασε βαθύτατα την πολιτισμική και πνευματική άνθηση του Ισλαμικού Κόσμου.[39] Είναι επίσης αρκετά ενδιαφέρον το γεγονός ότι η βιοτεχνία χαρτιού αναπτύχθηκε στο Τολέδο τον 11ο αιώνα[40], δηλαδή λίγο πριν την επανάκτησή του από τους ρωμαιοκαθολικούς. Οπότε την περίοδο του μεταφραστικού οργασμού ήταν διαθέσιμο το υλικό για τις μεταφράσεις. Ένα υλικό πολύ πιο φθηνό, πολύ πιο άφθονο και αρκετά πιο εύκολο στην αναπαραγωγή του από ότι η περγαμηνή, που ήταν σε χρήση μέχρι τότε. Κατά συνέπεια η μεταφραστική άνθηση και η σχετιζόμενη μ' αυτή "Αναγέννηση του 12ου αιώνα" όφειλε πολλά στο υλικό που στηρίχθηκε, δηλαδή στο χαρτί. Με άλλα λόγια, το χαρτί ήταν το νέο μέσο επικοινωνίας που επαναστατικοποίησε τη ρωμαιοκαθολική παιδεία την εποχή αυτή[41], όπως είχε επαναστατικοποιήσει την ισλαμική κουλτούρα πριν τρεις αιώνες.

Η χρήση του χαρτιού δεν αποτέλεσε μόνο τη βάση για να αναπτυχθεί η νέα δυναμική της χριστιανικής σκέψης και μόρφωσης, αλλά έπαιξε καταλυτικό ρόλο και στην ανάπτυξη των νέων εμπορικών δραστηριοτήτων.[42] Αυτή η νέα διάσταση της εμπορικής συμπεριφοράς συνδέεται άμεσα και με τη δεύτερη καινοτομία της εποχής, που ήταν: η χρησιμοποίηση γραπτών πιστοποιητικών και λογαριασμών στις εμπορικές και πιστωτικές συναλλαγές. Στην προκειμένη περίπτωση η ραγδαία ανάπτυξη των εμπορικών δραστηριοτήτων του 11ου αιώνα δημιούργησαν νέες επιχειρηματικές μορφές και μεθόδους, όπως π.χ. τα διάφορα είδη συνεταιρισμών ή οι περιπτώσεις δανεισμών. Όλες αυτές οι δραστηριότητες και οι συναλλαγές στηρίζονταν σε γραπτές συμφωνίες, δηλ. σε συμβολαιογραφικές πράξεις, όπου ο έλεγχος και η επαλήθευση των συμφωνηθέντων έπρεπε να μπορούσε να γίνει άμεσα, αντικειμενικά και απρόσκοπτα, για να εξασφαλίζεται η φερεγγυότητα[43]. Για το σκοπό αυτό οι υπολογιστικές τεχνικές με τον άβακα ή με τη βοήθεια των δακτύλων ήταν τελείως ακατάλληλες, γιατί δεν κατέγραφαν τις ενδιάμεσες πράξεις (άρα δεν ήταν δυνατή η επαλήθευση τους), παρά μόνο το αποτέλεσμα. Αντίθετα οι ινδο-αραβικές διαδικασίες υπολογισμών ήταν πλήρως συμβατές με τις απαιτήσεις ελέγχου. Οι νέες αυτές συνθήκες της εμπορικής δραστηριότητας οδήγησαν στην ανάπτυξη της Λογιστικής και της Τήρησης Λογιστικών Εγγράφων και Βιβλίων[44] σε στενή σχέση μ' ένα νέο είδος Αριθμητικής, της <u>Εμπορικής Αριθμητικής</u>. Πρόκειται για έναν τομέα τον Μαθηματικών με μεγάλη ζήτηση στη Δυτική Ευρώπη σ' όλη την περίοδο του Ύστερου Μεσαίωνα[45] (χωρίς αυτό να σημαίνει ότι οι καθιερωμένες υπολογιστικές συνήθειες, με άβακα

[39] Βλ. Lewis, B. : *Οι Άραβες στην Ιστορία*, εκδ. Γκοβόστη, 1993, σελ. 96. Επίσης βλ. Stock, B.: Science, Technology, and Economic Progress in the Early Middle Ages, στο Lindberg, D.C.(ed.), πρ. παρ. 6, σελ. 1-51, ειδ. σελ. 13.

[40] Βλ. Hodgett, G.A.J. : *A Social and Economic History of Medieval Europe*, Methuen, 1972, σελ. 125.

[41] Βλ. McLuhan, M. : *Understanding Media: The Extension of Man*, The New American Library, 1964, σελ. 100. Επίσης βλ. Reynolds, L.D. / Wilson, N.G, πρ. παρ. 22, σελ. 78, Turner, E.G.: *Ελληνικοί Πάπυροι. Εισαγωγή στη Μελέτη και τη Χρήση των Παπυρικών Κειμένων*, εκδ. Μορφωτικού Ιδρύματος της Εθνικής Τράπεζας, 1989, σελ. 37, Mioni, E.: *Εισαγωγή στην Ελληνική Παλαιογραφία*, εκδ. Μορφωτικού Ιδρύματος της Εθνικής Τράπεζας, 1985, σελ. 38-39 και Barbier, F.: *Ιστορία του Βιβλίου*, εκδ. Μεταίχμιο, 2001, σελ. 110.

[42] Βλ. McLuhan, M., πρ. παρ. 41, σελ. 100.

[43] Βλ. Oschinsky, D.: Medieval Treatises on Estate Accounting, στο Littleton,A.C. / Yamey, B.S.(eds.): *Studies in the History of Accounting*, Sweet & Maxwell, 1956, σελ. 91-98, ειδ. σελ. 95.

[44] Βλ. Roover, F.E. de: Partnership Accounts in the Twelfth Century Genoa, στο Littleton,A.C. / Yamey, B.S.(eds.), πρ. παρ. 42, σελ. 86-90· και Roover, R. de: The Development of Accounting Prior to Luca Pacioli According to the Account-books of Medieval Merchants, στο ίδιο, σελ. 114-174.

[45] Βλ. Murray, D.: *Chapters in the History of Bookkeeping Accountancy & Commercial Arithmetic*, Jackson, Wylie & Co, 1930, σελ. 138 κ.ε.

π.χ., παραγκωνίστηκαν αυτόματα και άμεσα[46]). Έναν τομέα που οι ενδιαφερόμενοι στον ρωμαιοκαθολικό κόσμο βρήκαν πρότυπα στην ισλαμική παρακαταθήκη, όπως βρήκαν και το ευρύτερο εννοιολογικό πλαίσιο της εμπορικής οργάνωσης, π.χ. το τελωνείο, το φόρο, το τσεκ κ.τ.λ.[47] Αξίζει να αναφερθεί ότι στην ισλαμική παιδεία είχε αναπτυχθεί η Λογιστική[48] και σε μεγάλο βαθμό η Εμπορική Αριθμητική[49].

Σ' αυτή τη δυτικο-ευρωπαϊκή συγκυρία έγιναν οι λατινικές μεταφράσεις έργων της ισλαμικής κληρονομιάς γενικά και του αλ-Χουαρίζμι ειδικότερα. Μια συγκυρία που προσέδιδε στη ρωμαιοκαθολική παιδεία έναν ανοικτό ορίζοντα και μια δυναμική προοπτική. Και είναι αλήθεια ότι μέσα σ' αυτό το γόνιμο περιβάλλον ευνοήθηκε η υπέρβαση της θρησκευτικής αντιπαλότητας. Δικαιολογείται έτσι, ιστοριογραφικά, η πρόσκτηση των έργων του αλ-Χουαρίζμι στον δυτικο-ευρωπαϊκό πολιτισμό. Εξακολουθεί όμως να μένει στη σκιά το κριτήριο επιλογής των συγκεκριμένων συγγραμμάτων, δηλαδή ο λόγος της επιλογής των εν λόγω μαθηματικών έργων και όχι κάποιων άλλων του ίδιου είδους, ίσως πιο επεξεργασμένα και αναπτυγμένα, από τη μέχρι τότε ισλαμική βιβλιογραφία. Ένας τρόπος για να φωτιστεί το κριτήριο αυτό είναι να απεικονισθεί η κατάσταση του συγκεκριμένου μαθηματικού τομέα στη μουσουλμανική Ισπανία, την εποχή πριν τη χριστιανική επανάκτηση του 11ου και των αρχών του 12ου αιώνα. Στην προκειμένη, λοιπόν, περίπτωση γίνεται φανερό ότι "οι μαθηματικοί [της Ισλαμικής Ισπανίας] του 11ου αιώνα εργάζονταν με Ανατολικά [μουσουλμανικά] κείμενα, τα οποία είχαν καταστεί απαρχαιωμένα στην [Ισλαμική] Ανατολή, όπως η αριθμητική και η άλγεβρα του αλ-Χουαρίζμι. Οι νεώτερες πρόοδοι στην Ανατολή ήταν άγνωστες στην Ισλαμική Ισπανία"[50].

Μετά τη διαλεύκανση αυτή του ιστορικού πλαισίου αναφοράς των λατινικών μεταφράσεων του "*Κιτάμπ αλ-μουχτασάρ φι' λ-χισάμπ αλ-τζαμπρ ουάλ-μουκαμπάλα"* του αλ-Χουαρίζμι, το ενδιαφέρον επικεντρώνεται, τώρα, στο μαθηματικό περιεχόμενό του.

---

[46] Βλ. Menninger, K.: *Number Words and Number Symbols. A Cultural History of Numbers*, The M.I.T. Press, 1969, σελ. 426-427.

[47] Βλ. Λε Γκοφ, Ζ., πρ. παρ. 35, σελ. 50.

[48] Βλ. Γούτα, Δ.: *Η Αρχαία Ελληνική Σκέψη στον Αραβικό Πολιτισμό*, εκδ. Περίπλους, 2001, σελ. 156.

[49] Βλ. Sarton, G.: Arabic "commercial" arithmetic, *Isis*, 20, 1933, σελ. 260-262· και Saidan, A.S.: The Arithmetic of Abu'l-Wafa', *Isis*, 65, 1974, σελ. 367-375, ειδ. σελ. 373-374, του ιδίου: *The Arithmetic of Al-Uqlidisi*, D. Reidel, 1978, σελ. 473-479.

[50] Βλ. Hogendijk, J.P.: Mathematics in Medieval Islamic Spain, *Proceeding of the International Congress of Mathematicians*, Birkhäuser Verlag, 1995, Vol. 2, σελ. 1568-1580, ειδ. σελ. 1569.

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΗΣ *ΤΕΧΝΙΚΗΣ ΤΩΝ ΑΓΝΩΣΤΩΝ* ΠΟΥ ΜΕΤΑΒΙΒΑΣΤΗΚΑΝ ΣΤΗ ΧΡΙΣΤΙΑΝΙΚΗ ΠΑΙΔΕΙΑ ΤΟΥ 12ΟΥ ΑΙΩΝΑ

Το *Liber Algebrae…*(Βιβλίο Άλγεβρας…) του Ρόμπερτ από την Τσέστερ και το αντίστοιχο του Τζεράρντο από την Κρεμόνα είναι θεματικά ισοδύναμα και μικρά σε έκταση. Περιέχουν μια κατηγοριοποίηση των εξισώσεων σε έξι περιπτώσεις συγκεκριμένων παραδειγμάτων που επιλύονται με διαδικαστικές τεχνικές. Στη συνέχεια παρουσιάζονται γεωμετρικές αποδείξεις για τις τρεις τελευταίες περιπτώσεις. Επίσης εξετάζονται δυο περιπτώσεις διωνυμικών πολλαπλασιασμών και συνδυάζονται με τις έξι προηγούμενες τεχνικές στην επίλυση μιας σειράς παραδειγμάτων. Τέλος γίνεται μια αναφορά στον κανόνα των τριών, ο οποίος εφαρμόζεται σε προβλήματα με εμπορικό περιεχόμενο.[51] Αξίζει να σημειωθεί ότι το υλικό αυτό αντιστοιχεί στην πρώτη μόνο ενότητα από τις τρεις του σχετικού αραβικού βιβλίου. Οι δύο ενότητες που παραλείπονται στις λατινικές μεταφράσεις είναι:

- Οι γεωμετρικές μετρήσεις με τη βοήθεια της τεχνικής των αγνώστων.
- Τα προβλήματα καταμερισμού κληρονομιάς.[52]

Η εισαγωγή στο θέμα γίνεται, μετά από ένα μικρό σχόλιο για τους αριθμούς, με τη διατύπωση των βασικών όρων: *ρίζες*[53], για τους αγνώστους, *"πλούτος"* ή *"περιουσία"*[54], για τα τετράγωνα των αγνώστων και *αριθμοί*[55], για τους αριθμούς των σταθερών όρων.[56] Αυτοί, τώρα, οι όροι μπορούν να συσχετισθούν ανά δύο με ισότητα, π.χ. *περιουσία* είναι ίση με *ρίζες*, *περιουσία* είναι ίση με *αριθμούς* και *ρίζες* είναι ίσες με *αριθμούς*. Στη συνέχεια συγκεκριμενοποιούνται οι ισότητες αυτές σε ειδικές περιπτώσεις και επιλύονται, έξι τον αριθμό. Όλες παρουσιάζονται και επιλύονται με συγκεκριμένα παραδείγματα.

Η πρώτη περίπτωση αντιπροσωπεύει την κατηγορία: *περιουσία* ίση με *ρίζες* και εμφανίζεται με το υπόδειγμα: μια *περιουσία* είναι ίση με πέντε *ρίζες*[57]. Η λύση δίνεται αμέσως με τη δήλωση ότι η *ρίζα* της *περιουσίας* είναι 5 και 25 αποτελεί την *περιουσία* της η οποία, ασφαλώς, ισούται με πέντε *ρίζες* της. Ακολουθούν δύο ακόμη παραδείγματα του ίδιου τύπου και της ίδιας αντιμετώπισης. Η δεύτερη περίπτωση είναι του είδους: *περιουσίες* είναι ίσες με *αριθμούς* και δίνεται το παράδειγμα: μια *περιουσία* είναι ίση με εννέα. Το αποτέλεσμα διατυπώνεται αμέσως με τη φράση: το τρία παριστάνει μια *ρίζα*. Δύο ακόμη παραδείγματα που δίνονται σ' αυτή την περίπτωση είναι τα εξής: 1) πέντε *περιουσίες* είναι ίσες με ογδόντα[58], 2) μισή *περιουσία* είναι ίση με δέκα οκτώ[59]. Η τρίτη περίπτωση είναι του τύπου: *ρίζες* ίσες με *αριθμούς*, π.χ. μια τέσσερις *ρίζες* είναι ίσες με είκοσι[60].

Η τέταρτη περίπτωση εκφράζει την κατηγορία: *περιουσίες* και *ρίζες* είναι ίσες με *αριθμούς*, π.χ. μια *περιουσία* και 10 *ρίζες* είναι ίσες με τριάντα εννέα[61]. Για τη λύση αυτού του

---

[51] Βλ. Folkerts, M., πρ. παρ. 21, σελ. 5 και Mahoney, M.S., πρ. παρ. 6, σελ. 157-158.

[52] Στα ίδια.

[53] Λατινικά: *radicibus*.

[54] Λατινικά: *substantiis*, στη μετάφραση του Ρόμπερτ από την Τσέστερ και *census*, στη μετάφραση του Τζεράρντο από την Κρεμόνα.

[55] Λατινικά: *numeris*.

[56] Βλ. Karpinski, L.C., πρ. παρ. 4, σελ. 68-69 και Hughes, B.: Gerard of Cremona's Translation of al- Khwarizmi's *al-Jabr*: A Critical Edition, *Mediaeval Studies*, 48, 1986, σελ. 211-263, ειδ. σελ. 233.

[57] Με σημερινό συμβολισμό πρόκειται για την εξής περίπτωση: $x^2 = 5x$.

[58] Δηλ. $5x^2 = 80$.

[59] Δηλ. $\frac{1}{2}x^2 = 18$.

[60] Δηλ. $4x=20$.

[61] Δηλ. $x^2+10x=39$.

παραδείγματος δίνεται η εξής “συνταγή”: λαμβάνεται το μισό του αριθμού των *ρίζών*, δηλ. $\frac{10}{2}=5$, πολλαπλασιάζεται το 5 με τον εαυτό του και κάνει 25, στο οποίο προστίθεται στο 39 και γίνεται 64, η τετραγωνική ρίζα του οποίου είναι 8 από τον οποίο αφαιρείται το μισό του αριθμού των *ριζών*, δηλ. το 5, με αποτέλεσμα το 3 που είναι η τιμή της *ρίζας*[62]. Ενδιαφέρον παρουσιάζουν και τα δύο επιπλέον παραδείγματα, που παρουσιάζονται σ’ αυτή την περίπτωση και είναι παραλλαγές του προηγούμενο. Το πρώτο[63] είναι το εξής: δύο *περιουσίες* και δέκα *ρίζες* είναι ίσες με σαράντα οκτώ[64], η οποία ανάγεται αμέσως στην εξίσωση: *περιουσία* και πέντε *ρίζες* είναι ίσες με είκοσι τεσσερα[65] που λύνεται με την ίδια διαδικασία με το αρχικό παράδειγμα. Το δεύτερο είναι: μισή *περιουσία* και πέντε *ρίζες* είναι ίσες με 28, που μετασχηματίζεται στην εξίσωση: *περιουσία* και δέκα *ρίζες* είναι ίσες με πενήντα έξι[66] η οποία επιλύεται με την αρχική “συνταγή”.

Το πέμπτο είδος είναι του τύπου: *περιουσίες* και *αριθμοί* είναι ίσα με *ρίζες*, π.χ. μια *περιουσία* και είκοσι ένα *αριθμοί* είναι ίσα με δέκα *ρίζες*[67], που επιλύεται με την εξής διαδικασία: λαμβάνεται το μισό του αριθμού των *ριζών*, δηλ. $\frac{10}{2}=5$, πολλαπλασιάζεται το 5 με τον εαυτό του και κάνει 25, από το οποίο αφαιρείται το 21 και γίνεται 4, η τετραγωνική ρίζα του οποίου είναι 2, το οποίο αν αφαιρεθεί ή προστεθεί στο μισό του αριθμού των *ριζών*, 5, δίνει 3 ή 7 που είναι δύο λύσεις της εξίσωσης[68]. Παρατηρείται εδώ η δυνατότητα ύπαρξης δύο λύσεων, αλλά και καμίας, όταν ο πολλαπλασιασμός του μισού του αριθμού των *ριζών* με τον εαυτό του είναι μικρότερος από τις μονάδες του *αριθμού*[69]. Σημειώνεται επίσης ότι όταν αυτός ο πολλαπλασιασμός είναι ίσος με τις μονάδες του *αριθμού*, τότε η λύση είναι το μισό του αριθμού των *ριζών*, χωρίς να χρειάζεται να προστεθεί ή να αφαιρεθεί κάτι.

Το έκτο και τελευταίο είδος εξίσωσης είναι του τύπου: *ρίζες* και *αριθμοί* είναι ίσα με *περιουσίες*, π.χ. τρεις *ρίζες* και ο *αριθμός* τέσσερα είναι ίσα με μια *περιουσία*[70], που επιλύεται ως εξής: λαμβάνεται το μισό του αριθμού των *ριζών*, δηλ. $\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$, πολλαπλασιάζεται αυτό με τον εαυτό του και κάνει $2\frac{1}{4}$, στο οποίο προστίθεται το τέσσερα και γίνεται $6\frac{1}{4}$, η τετραγωνική ρίζα του οποίου είναι $2\frac{1}{2}$ στο οποίο αν προστεθεί και το μισό του αριθμού των *ριζών*, $1\frac{1}{2}$, γίνεται 4, που είναι η λύση της εξίσωσης[71]. Και σ’ αυτή την περίπτωση, όπως σ’ εκείνη του προηγούμενου είδους, σημειώνεται ότι οι εξισώσεις στις οποίες ο αριθμός των *περιουσιών*

---

[62] Με σημερινό συμβολισμό η “συνταγή” αυτή μπορεί να γραφή ως εξής: x=$\sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2+39}-\frac{10}{2}$.

[63] Βλ. Karpinski, L. C., πρ. παρ. 4, σελ. 72-73 και Hughes, B., πρ. παρ. 56, σελ. 234-235.

[64] Δηλ. $2x^2+10x=48$.

[65] Δηλ. $x^2+5x=24$.

[66] Δηλ. $\frac{1}{2}x^2+5x=28$, που γίνεται $x^2+10x=56$.

[67] Δηλ. $x^2+21=10x$.

[68] Διαδικασία που αντιστοιχεί στον τύπο x=$\frac{10}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2-21}$.

[69] Δηλ. όταν το υπόριζο είναι μικρότερο του μηδενός.

[70] Δηλ. $3x+4=x^2$.

[71] Διαδικασία που αντιστοιχεί στον τύπο x=$\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+4}+\frac{3}{2}$.

είναι μεγαλύτερος ή μικρότερος της μονάδος ανάγονται σε εξισώσεις με μια *περιουσία*, με τρόπο ανάλογο με τα αντίστοιχα παραδείγματα που παρουσιάστηκαν στην τέταρτη κατηγορία.[72]

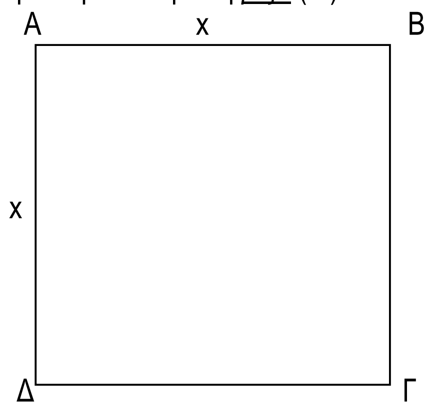
Από την παρουσίαση των εξισώσεων και τις διαδικασίες χειρισμών τους, στις πρώτες λατινικές μεταφράσεις του "*Κιτάμπ αλ-τζαμπρ*" του αλ-Χουαρίζμι, διαπιστώνονται κάποιες ιδιαιτερότητες, κάποιες ιστορικές ιδιαιτερότητες. Η πιο χαρακτηριστική είναι η αντιμετώπιση μόνο συγκεκριμένων αριθμητικών περιπτώσεων και όχι γενικευμένων μορφών, με τη βοήθεια γενικών συντελεστών[73]. Οι κανόνες επίλυσης τους, επίσης, στερούνται γενικότητας. Είναι προσκολλημένες σε συγκεκριμένες διαδικασίες, που εφαρμόζονται σε συγκεκριμένα αριθμητικά παραδείγματα. Ωστόσο υπονοείται μια εμπειρική καθολίκευσή τους, που στηρίζεται στην υποσυνείδητη αναγνώριση και ταυτοποίηση του τρόπου συνδυασμού των επιμέρους στοιχείων του εκάστοτε τύπου εξίσωσης. Στην έλλειψη γενικευμένων αναπαραστάσεων και συλλογισμών οφείλεται και η πολυμορφία των τύπων εξισώσεων που εκφράζονται, πάντοτε, με δύο, μη μηδενικά, σκέλη ισοτήτων και όχι με τη μορφή εξισώσεων με όλους τους όρους στο ένα μέλος και το άλλο ίσο με μηδέν[74]. Μεταξύ των ιδιαιτεροτήτων τους είναι επίσης: ο καθαρά λεκτικός (δηλ. ρητορικός) τρόπος παρουσίασης και χειρισμός των εξισώσεων, όπως και η παράξενη ορολογία που χρησιμοποιείται για τον άγνωστο και το τετράγωνό του. Στην πρώτη περίπτωση φαίνεται να υπάρχει μια υστέρηση ως προς τον πρωτο-συμβολισμό, δηλαδή τη συμβατική και στατική (μη λειτουργική[75]) συντομογραφία κάποιων μαθηματικών όρων, των *Αριθμητικών* του Διόφαντου. Γεγονός που υποδηλώνει μια μάλλον ασυμπτωτική σχέση των "*Liber Algebrae*" με το, κατά τα άλλα, μαθηματικά συναφές προς αυτά έργο του Διόφαντου. Σχετικά με τη δεύτερη ιδιοτυπία, θα πρέπει να γίνουν κάποιες μεταφραστικές προεκτάσεις για να μην αιωρείται αυτή η παράξενη ορολογία απλά ως μια αδόκιμη μεταφορά των αντίστοιχων όρων από τα αραβικά στα λατινικά. Σύμφωνα με μια ανάλυση της καταγωγής των συγκεκριμένων λατινικών όρων: *radix* (*ρίζα*) και *substantia* ή *census* (*πλούτος*, *περιουσία*), ο πρώτος προέρχεται από την αραβική λέξη *jadhr* που σημαίνει *ρίζα* αλλά και *βάση*, *θεμέλιο*, *κατώτατο μέρος* και υποδηλώνει, κατά τον αλ-Χουαρίζμι[76], "την πλευρά που πολλαπλασιάστηκε με τετραγωνική μονάδα". Ένδειξη που παραπέμπει στο ζήτημα της ομοιογένειας όλων των όρων της κάθε εξίσωσης ως προς τις μετρικές τους διαστάσεις. Αξίζει να σημειωθεί ότι στη μετάφραση *Liber Alghoerismi de pratica arismetrise* του Ιωάννη της Σεβίλλης (12^{ος} αιώνας μ.Χ.), που περιλαμβάνει ένα απόσπασμα της τεχνικής των αγνώστων, χρησιμοποιήθηκε για τον άγνωστο ο όρος *res*, ο οποίος προέρχεται από την αραβική λέξη *say* και σημαίνει *πράγμα*[77]. Ο δεύτερος όρος, *substantia* ή *census*, προέρχεται από την αραβική λέξη *mal* που σημαίνει *περιουσία*, *πλούτος*[78]. Η αντίστοιχη ορολογία στον Διόφαντο είναι *αριθμός* για τον άγνωστο και *δύναμις* για το τετράγωνό του.

Μετά την αστήρικτη, αυθαίρετη, διατύπωση των διαδικασιών επίλυσης των εξισώσεων, αναπτύσσεται μια γεωμετρική τεκμηρίωση των εν λόγω "συνταγών" για τις τρεις τελευταίες κατηγορίες εξισώσεων, τις σύνθετες εξισώσεις. Φαίνεται ότι οι διαδικασίες επίλυσης των

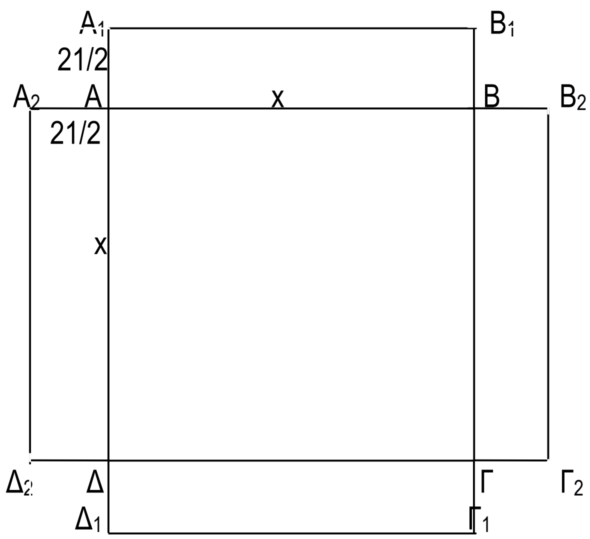
[72] Βλ. Karpinski, L. C., πρ. παρ. 4, σελ. 76-77 και Hughes, B., πρ. παρ. 56, σελ. 236.
[73] Κι αυτό δεν πραγματοποιήθηκε μέχρι τα τέλη του 16^{ου} αιώνα, μέχρι δηλαδή τον Viète.
[74] Αυτή η μορφή αναπαράστασης των εξισώσεων καθυστέρησε αρκετούς αιώνες για να καθιερωθεί. Πρωτοπαρουσιάστηκε από τον Thomas Harriot (1560-1621), βλ. Hughes, B., πρ. παρ. 56, σελ. 213.
[75] Με το νόημα ότι τα σημάδια των συμβόλων που παριστάνουν κάποιους όρους, π.χ. τον άγνωστος, και κάποιες πράξεις, π.χ. την αφαίρεση, δεν έχουν λειτουργικές σχέσεις, δηλ. δεν υπόκεινται σε λειτουργικούς, πραξιακούς, συνδυασμούς.
[76] Βλ. Gandz, S.: On the Origin of the Term "Root", *American Mathematical Monthly*, 33, 1926, σελ. 261-265, ειδ. σελ. 263.
[77] Βλ. Høyrup, J., πρ. παρ. 11, σελ. 5 και 7 υπ. 8.
[78] Βλ. Mahoney, M.S., πρ. παρ. 6, σελ. 157.

απλών εξισώσεων, των τριών πρώτων κατηγοριών, αντιμετωπίζονται ως άμεση συνέπεια της διαίρεσης ή του πολλαπλασιασμού των μελών τους με τον κατάλληλο, κατά περίπτωση, συντελεστή, π.χ. στην $\frac{1}{2}x=10$, ο πολλαπλασιασμός των μελών της επί 2 δίνει ως αποτέλεσμα $x=20$. Για τις σύνθετες όμως εξισώσεις, οι διαδικασίες επίλυσης τους δεν είναι καθόλου άμεσες και αυτονόητες. Αποτελούν μια σειρά βημάτων που η σκοπιμότητα τους κάθε άλλο παρά ευλογοφανής είναι. Για την αξιοπιστία τους λοιπόν επιστρατεύονται γεωμετρικές αναπαραστάσεις και κατάλληλες γεωμετρικές προσαρμογές.

Αρχικά εξετάζεται[79] το πρώτο παράδειγμα σύνθετης εξίσωσης που παρουσιάστηκε, δηλ. η εξίσωση: <u>*περιουσία*</u> και δέκα <u>*ρίζες*</u> είναι ίσα με 39 ($x^2+10x=39$). Αφετηρία αποτελεί η γεωμετρική αναπαράσταση του πρώτου μέλους της εξίσωσης. Έτσι κατασκευάζεται η <u>*περιουσία*</u> ως ένα υποθετικό τετράγωνο με πλευρά τη <u>*ρίζα*</u> (x^2).



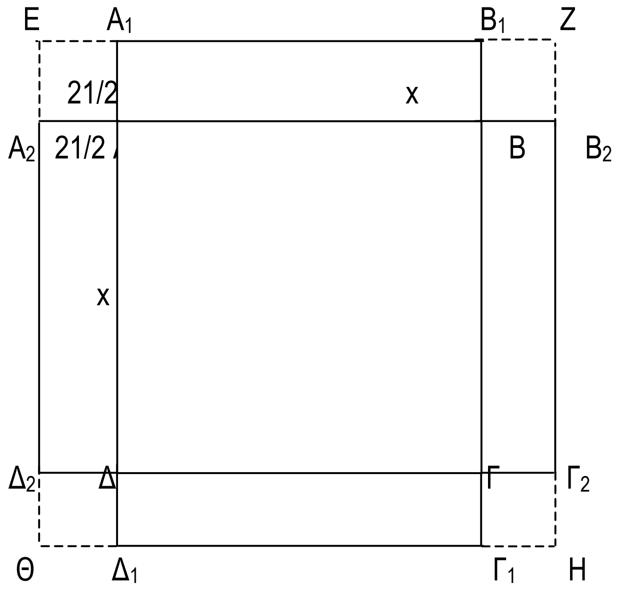
Στη συνέχεια συμπληρώνεται το τετράγωνο αυτό έτσι ώστε να συμπεριληφθούν και οι 10 <u>*ρίζες*</u> ($10x$). Για το σκοπό αυτό επικολλούνται, σε κάθε πλευρά του τετραγώνου, ορθογώνια παραλληλόγραμμα με μια πλευρά την πλευρά του τετραγώνου και την άλλη να είναι ίση με $2\frac{1}{2}$, οπότε διαμορφώνεται το εξής σχήμα:



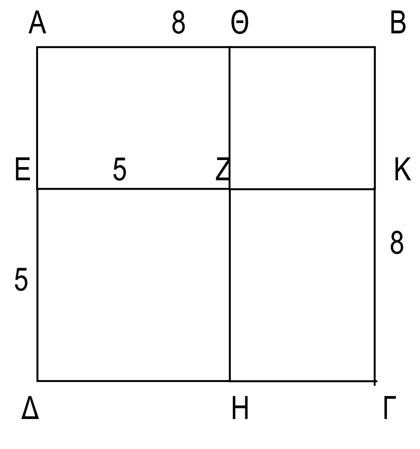
Γίνεται φανερό ότι το τετράγωνο ΑΒΓΔ ($=x^2$) και το 4 ορθογώνια παραλληλόγραμμα $ΑΑ_1Β_1Β$ ($=2\frac{1}{2}x$), $ΒΒ_2Γ_2Γ$ ($=2\frac{1}{2}x$), $ΓΓ_1Δ_1Δ$ ($=2\frac{1}{2}x$), $ΔΔ_2Α_2Α$ ($=2\frac{1}{2}x$) εκφράζουν το πρώτο μέλος της

[79] Βλ. Karpinski, L.C., πρ. παρ. 4, σελ. 76-83 και Hughes, B., πρ. παρ. 56, σελ. 236-238.

εξίσωσης ($x^2+2\frac{1}{2}x+2\frac{1}{2}x+2\frac{1}{2}x+2\frac{1}{2}x=x^2+10x$). Συνολικά είναι μια επίπεδη επιφάνεια με εμβαδόν ίσο με τον αριθμό των μονάδων του δεύτερου μέλους της εξίσωσης, δηλ. 39. Παρατηρείται τώρα ότι αν η επίπεδη αυτή επιφάνεια συμπληρωθεί με τα τέσσερα τετράγωνα $2\frac{1}{2}\times 2\frac{1}{2}=6\frac{1}{4}$, τότε ολοκληρώνεται ένα μεγαλύτερο τετράγωνο με εμβαδόν ίσο με $39+4\times 6\frac{1}{4}=$ $39+4\left(2\frac{1}{2}\right)^2=39+4\left(\frac{10}{4}\right)^2=39+\left(\frac{10}{2}\right)^2=39+25=64$.



Μετά την διερευνητική αυτή κατασκευή μορφοποιείται η "επιλυτική" κατασκευή. Στην αρχή κατασκευάζεται ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ με εμβαδόν 64, δηλ. με πλευρά 8. Μετά σχηματίζεται το τετράγωνο ΕΖΗΔ, εμβαδού 25 και πλευράς 5,μέσα στο ΑΒΓΔ, με αποτέλεσμα να δημιουργηθεί το σχήμα:



Είναι φανερό ότι το τετράπλευρο ΘΒΚΖ είναι τετράγωνο και ικανοποιεί τη σχέση:

$$ΘΒΚΖ+ΑΘΖΕ+ΖΚΓΗ=64-25=39,$$

ή

$$ΘΒΚΖ+2\times ΑΘΖΕ=39,$$

ή

$$ΘΒ\times ΘΖ+2\times (5\times ΘΖ)=39,$$

ή

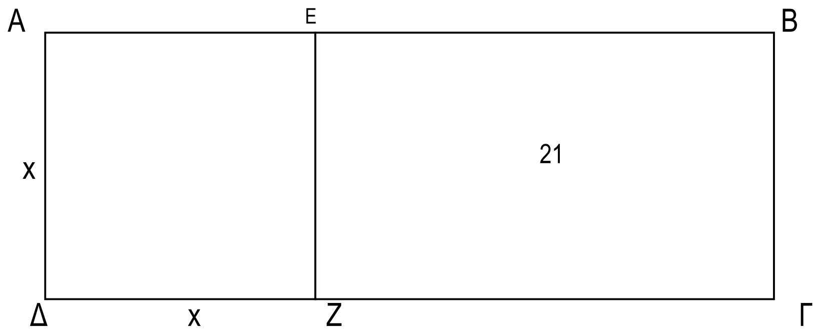
$$ΘΒ\times ΘΒ+10\times ΘΒ=39$$

και

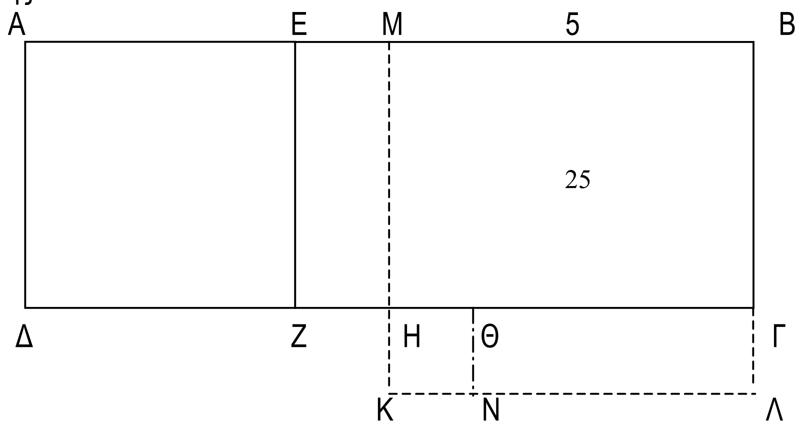
ΘΒ=ΑΒ – ΑΘ=8-5=3, η *ρίζα*.

Εύκολα, τώρα, μπορεί να γίνει η αντιστοιχία των γεωμετρικών αυτών διαδικασιών με τα σχετικά βήματα της “συνταγής” επίλυσης της συγκεκριμένης εξίσωσης.

Στο δεύτερο παράδειγμα εξετάζεται[80] η εξίσωση: μια *περιουσία* και 21 είναι ίσα με δέκα *ρίζες*. Ο προβληματισμός για τη γεωμετρική αναπαράσταση έχει ως αφετηρία την κατασκευή ενός ορθογώνιου παραλληλόγραμμου αποτελούμενο από τη συνένωση ενός τετραγώνου που να αντιστοιχεί στην *περιουσία* και ενός ορθογώνιου παραλληλόγραμμου με εμβαδόν 21.



Παρατηρείται ότι για να εκφράζει το σχήμα αυτό τη συγκεκριμένη εξίσωση πρέπει η πλευρά ΑΒ να είναι ίση με 10, γιατί ΑΕΖΔ+ΕΒΓΖ=ΑΒΓΔ (που αντιστοιχεί σε σημερινό συμβολισμό με $x^2+21=10x$). Το ζητούμενο, τώρα, είναι να βρεθεί τρόπος να προσδιοριστεί το Ε. Για το σκοπό αυτό στο προηγούμενο υποθετικό σχήμα κατασκευάζεται το τετράγωνο ΜΒΛΚ με πλευρά ΜΒ, όπου Μ το μέσον της ΑΒ.

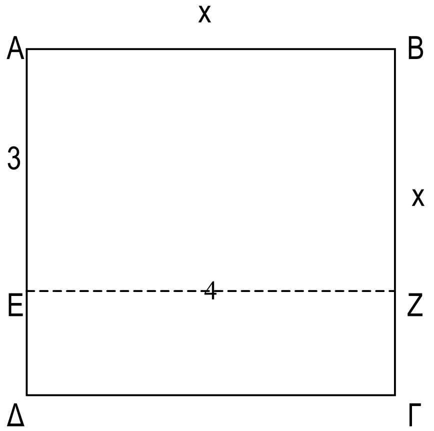


Διαπιστώνεται ότι ΖΗ=ΗΚ (γιατί ΖΗ=ΔΗ – ΔΖ= $\frac{ΔΓ}{2}$ – ΔΖ= $\frac{ΑΒ}{2}$ – x=ΜΒ – ΜΗ=ΜΚ – ΜΗ=ΗΚ). Αν, στη συνέχεια, σχηματισθεί το τετράγωνο ΗΘΝΚ, τότε προκύπτει ότι ΘΓ=ΔΖ=ΕΖ και ΘΓΛΝ=ΕΜΗΖ. Κατά συνέπεια ΗΘΝΚ=ΜΒΛΚ – ΜΒΓΗ – ΘΓΛΝ=25 – ΜΒΓΗ – ΕΜΗΖ=25 – 21=4 και ΗΘ=ΗΖ=2. Οπότε ΔΖ=ΔΗ – ΖΗ=ΑΜ – 2= $\frac{ΑΒ}{2}$ – 2=5 – 2=3, η *ρίζα*.

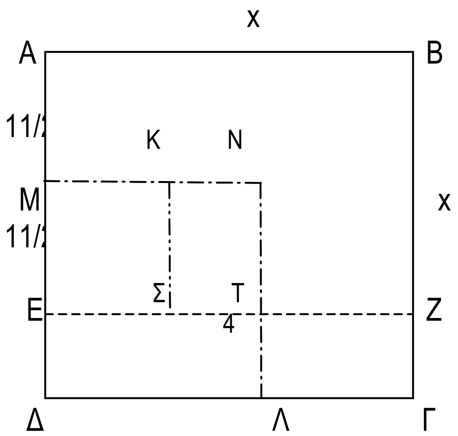
Τελευταίο παράδειγμα είναι η εξίσωση: τρεις *ρίζες* και τέσσερα είναι ίσα με μια *περιουσία*. Σ’ αυτή την περίπτωση ως υποθετικό γεωμετρικό πρότυπο λαμβάνεται[81] ένα τετράγωνο με πλευρά τη *ρίζα* που εκφράζει την *περιουσία* (δηλαδή το δεύτερο μέλος της εξίσωσης) το οποίο

[80] Βλ. Karpinski, L.C., πρ. παρ. 4, σελ. 82-87 και Hughes, B., πρ. παρ. 56, σελ. 238-239.
[81] Βλ. Karpinski, L.C., πρ. παρ. 4, σελ. 86-87 και Hughes, B., πρ. παρ. 56, σελ. 239-240.

διαμερίζεται σε δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα, το ένα με πλευρές τη <u>*ρίζα*</u> και το 3, ενώ το άλλο έχει εμβαδόν 4 (που συνθέτουν το πρώτο μέλος της εξίσωσης).



Για να προσδιοριστεί, τώρα, η <u>*ρίζα*</u> πραγματοποιείται η εξής συμπληρωματική κατασκευή: σχηματίζεται το τετράγωνο ΜΝΛΔ, με Μ το μέσον του ΑΕ, επίσης σχηματίζεται και το τετράγωνο ΜΚΣΕ.



Παρατηρείται ότι

ΣΤ=ΕΤ – ΕΣ=ΜΝ – ΜΚ=ΝΛ – ΝΤ=ΤΛ

και

ΤΖ=ΕΖ – ΕΣ – ΣΤ=ΑΔ – ΜΕ – ΤΛ=ΑΔ – ΑΜ – ΕΔ=ΜΕ.

Κατά συνέπεια

ΤΖΓΛ=ΚΝΤΣ

και

$$\text{ΜΝΛΔ=ΜΚΣΕ+ΕΤΛΔ+ΚΝΤΣ=ΜΚΣΕ+ΕΤΛΔ+ΤΖΓΛ=ΜΚΣΕ+ΕΖΓΔ=}\left(1\frac{1}{2}\right)^2+4=6\frac{1}{4}.$$

Έτσι ΜΔ=$2\frac{1}{2}$ και ΑΔ=$2\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}=4$, η <u>*ρίζα*</u>.

Οι γεωμετρικές αυτές τεχνικές είναι ανάλογες με τις μεθόδους που περιέχονται στο Β΄ Βιβλίο των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, όπως και στα *Δεδομένα* του. Η αξιοποίησή τους, εδώ, παίζουν το ρόλο της δικαιολόγησης των αρχικών “εντολών” επίλυσης των εξισώσεων με γεωμετρικά αντικείμενα και συσχετίσεις που η ύπαρξη τους είναι πέρα κάθε αμφιβολίας. Πρόκειται δηλαδή για μια δικαιολόγηση με αναγωγή των επιλυτικών διαδικασιών σε οντολογικά δεδομένα και σε αντίστοιχους συλλογισμούς. Αυτός όμως ο συλλογισμός έχει δύο παρασκηνιακά συστατικά: την ομοιογένεια των εμπλεκόμενων γεωμετρικών αντικειμένων, δηλαδή τη συσχέτιση γεωμετρικών αντικειμένων του ίδιου γένους (π.χ. μόνο επίπεδα σχήματα, ή μόνο ευθύγραμμα τμήματα) και τις ιδιότητες της γεωμετρικής ισότητας (π.χ. τη μεταβατική ιδιότητα). Αυτά τα παρασκηνιακά στοιχεία αποτελούν τον μεταγνωστικό πυρήνα των προηγούμενων γεωμετρικών συλλογισμών. Ένας πυρήνας που απηχεί την ιδιαιτερότητα της μαθηματικής σκέψης των Αρχαίων Ελλήνων και μόνο υπερβατικά μπορεί να συσχετιστεί με προγενέστερη μαθηματική παράδοση, όπως π.χ. αυτή των Βαβυλωνίων[82].

Μετά τη γεωμετρική κατοχύρωση των διαδικασιών επίλυσης των δευτεροβάθμιων εξισώσεων, εισάγεται, προσεχτικά, ο λογισμός των υποκείμενων πράξεων τους, π.χ. του γινομένου ενός αθροίσματος επί μια διαφορά, όπως και των πράξεων με ριζικά. Πρώτα εξετάζεται[83] ο πολλαπλασιασμός του αθροίσματος δύο συγκεκριμένων αριθμών επί το άθροισμα δύο άλλων συγκεκριμένων αριθμών, δηλ. του 10 και 2 επί του 10 και 1. Η διαδικασία περιγράφεται βήμα-βήμα ως εξής: ο πολλαπλασιασμός του 10 επί 10 δίνει 100, μετά του 2 επί 10 που δίνει 20 και προστίθεται (στο προηγούμενο αποτέλεσμα), όμοια του 10 επί 1 που δίνει 10 και προστίθεται και τέλος του 2 επί 1 που δίνει 2 το οποίο προστίθεται και αυτό, με συνολικό αποτέλεσμα 132. Με δεδομένο, εκ των προτέρων, το γινόμενο του 12 επί 11, πιστοποιείται η ορθότητα του αποτελέσματος της προηγούμενης διαδικασίας και έμμεσα της ίδιας της διαδικασίας. Με αυτό τον διδακτικό τρόπο γίνεται η μετάβαση στην όχι και τόσο αυτονόητη διαδικασία του πολλαπλασιασμού του 10 μείον 2 επί 10 μείον 1. Οι ενέργειες για την πραγματοποίηση αυτής της πράξης παρουσιάζονται[84] ως εξής: 10 επί 10 δίνει 100, 2 επί 10 κάνει 20 και αφαιρείται, επίσης αφαιρείται το 10 επί 1 που κάνει 10, το αποτέλεσμα όλων αυτών είναι 70. Παρατηρείται όμως ότι πρέπει να προστεθεί και το αποτέλεσμα του 2 επί 1, δηλ. το 2, για μα διαμορφωθεί έτσι το τελικό αποτέλεσμα που είναι 72 ($=8\times 9$). Με αρκετά πειστικό τρόπο διατυπώνεται λοιπόν η πράξη: μείον επί μείον κάνει συν.

Με την ίδια τακτική που αντιμετωπίστηκαν οι περιπτώσεις: $(10+2)\times(10+1)$, $(10-2)\times(10-1)$ [με σημερινό συμβολισμό], εκτελούνται[85] και οι πράξεις: $(10+2)\times(10-1)$, $(1+\frac{1}{6})\times(1+\frac{1}{6})$, $(1-\frac{1}{6})\times(1-\frac{1}{6})$ [με σημερινό συμβολισμό]. Στη συνέχεια επεκτείνονται οι αριθμητικές αυτές διαδικασίες και σε ανάλογα δυώνυμα που περιέχουν και αγνώστους[86] του τύπου[87]: $(x+10)\times(x+10)$, $(x-10)\times(x-10)$, $(10-x)\times(10+x)$, $(10-x)\times x$, $(10+x)\times(10-x)$, $(10+\frac{x}{2})\times(\frac{1}{2}-5x)$ [με σημερινό συμβολισμό].

Ακολουθούν οι πράξεις με ριζικά. Πρώτα αναφέρονται οι πολλαπλασιασμοί ενός αριθμού με τη ρίζα κάποιου αριθμού, όπως π.χ. ο διπλασιασμός της ρίζας του 9 ο οποίος, σύμφωνα με ένα γενικό κανόνα που διατυπώθηκε προκαταβολικά, πολλαπλασιάζεται το 2 με τον εαυτό του και γίνεται τέσσερα και στη συνέχεια το αποτέλεσμα αυτό πολλαπλασιάζεται με το 9 και δίνει 36, η ρίζα του οποίου είναι 6, που είναι το ζητούμενο[88]. Με σημερινό συμβολισμό η διαδικασία αυτή αναπαριστάνεται ως εξής: $2\sqrt{9}=\sqrt{(2\times 2)\times 9}=\sqrt{4\times 9}=\sqrt{36}=6$. Με όμοιο

---

[82] Βλ. Θωμαΐδη, Γ.: Γνώριζαν οι Βαβυλώνιοι και οι Αρχαίοι Έλληνες τις Εξισώσεις 2ου Βαθμού; (Μερικά νεώτερα αποτελέσματα της ιστορικής έρευνας), *Διάσταση*, 1992, (36-37), 1-2, σελ. 56-64.
[83] Βλ. Karpinski, L.C., πρ. παρ. 4, σελ. 90-91 και Hughes, B., πρ. παρ. 56, σελ. 241-242.
[84] Στο ίδιο.
[85] Βλ. Karpinski, L.C., πρ. παρ. 4, σελ. 90-93 και Hughes, B., πρ. παρ. 56, σελ. 242.
[86] Στο κείμενο ο άγνωστος αποδίδεται με τον όρο res, βλ. Karpinski, L.C., πρ. παρ. 4, σελ. 94-95 και Hughes, B., πρ. παρ. 56, σελ. 242-243.
[87] Βλ. Karpinski, L.C., πρ. παρ. 4, σελ. 94-97 και Hughes, B., πρ. παρ. 56, σελ. 242-243.
[88] Βλ. Karpinski, L.C., πρ. παρ. 4, σελ. 98-99 και Hughes, B., πρ. παρ. 56, σελ. 244.

τρόπο παρουσιάζονται[89] και οι περιπτώσεις: $3\sqrt{9} = \sqrt{(3\times3)\times9} = \sqrt{9\times9} = \sqrt{81} = 9$, $\frac{1}{2}\sqrt{9} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\times9} = \sqrt{\frac{1}{4}\times9} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$ [με σημερινό συμβολισμό].

Ο λογισμός αυτός συνεχίζεται με την εξής περίπτωση διαίρεσης ριζικών[90]: $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ [με σημερινό συμβολισμό]. Επίσης περιλαμβάνονται και τρία παραδείγματα πολλαπλασιασμού[91], τα εξής: $\sqrt{4}\times\sqrt{9} = \sqrt{4\times9} = \sqrt{36} = 6$, $\sqrt{5}\times\sqrt{10} = \sqrt{5\times10} = \sqrt{50}$, $\sqrt{\frac{1}{3}}\times\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{6}}$ [με σημερινό συμβολισμό].

Εφαρμογή του εν λόγω λογισμού των πράξεων και των ριζικών αποτελούν τα έξι προβλήματα που συμπληρώνουν τη συγκεκριμένη ενότητα. Το πρώτο είναι το εξής[92]: να χωριστεί το 10 σε δύο μέρη έτσι ώστε το τετραπλάσιο του γινομένου των δύο μερών να είναι ίσο με το γινόμενο του ενός απ' αυτά επί τον εαυτό του. Το αρχικό βήμα για τη λύση του είναι η μορφοποίηση της εξίσωσης. Έτσι θεωρείται ότι το ένα μέρος του 10 είναι το _πράγμα_ (res), ο άγνωστος με τη σημερινή ορολογία, οπότε το άλλο μέρος θα είναι 10 μείον το _πράγμα_. Υπονοούμενα, λοιπόν, σχηματίζεται η εξίσωση: 4 φορές το γινόμενο ενός _πράγματος_ επί τη διαφορά του 10 μείον το _πράγμα_ ισούται με το γινόμενο του _πράγματος_ επί τον εαυτό του[93]. Για την επίλυσή της εκτελούνται πρώτα οι πράξεις στο πρώτο μέλος της εξίσωσης, δηλ. του γινομένου του _πράγματος_ επί 10 μείον το _πράγμα_ που είναι 10 _πράγματα_ μείον μια _περιουσία_, [$10x - x^2$], και μετά επί 4, δηλ. 40 _πράγματα_ μείον 4 _περιουσίες_, [$40x - x^2$]. Το _πράγμα_ επί τον εαυτό του κάνει μια _περιουσία_ η οποία, σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, ισούται με 40 _πράγματα_ μείον 4 _περιουσία_. Μεταφέρονται οι 4 _περιουσίες_ στην άλλη πλευρά και γίνεται αναγωγή ομοίων όρων, δηλ. εφαρμόζεται η διαδικασία αλ-τζαμπρ (al-jabr), με αποτέλεσμα να γίνουν συνολικά 5 _περιουσίες_ ίσες με 40 _πράγματα_, [$5x^2=40x$]. Οπότε η ρίζα είναι 8 και αντιστοιχεί στο ένα μέρος του 10. Κατά συνέπεια 2 είναι το άλλο μέρος του 10. Επισημαίνεται συμπερασματικά ότι το πρόβλημα αυτό εντάσσεται στην πρώτη κατηγορία των εξισώσεων, δηλ. του τύπου _περιουσίες_ είναι ίσες με _ρίζες_.

Τα υπόλοιπα[94] προβλήματα κωδικοποιούνται με σημερινό συμβολισμό στις εξής εξισώσεις:

- $2x^2+\frac{7}{9}x^2=100$, $\frac{25}{9}x^2=100$, $x^2=36$, $x=6$
- $\frac{10-x}{x}=4$, $10-x=4x$, $10=5x$, $x=2$
- $\left(\frac{1}{3}x+1\right)\left(\frac{1}{4}x+1\right)=20$, $\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x+1=20$, $x^2+7x+12=240$, $x^2+7x=228$, $x=12$
- $x^2+(10-x)^2=58$, $2x^2-20x+100=58$, $2x^2+42=20x$, $x^2+21=10x$, $x=3$
- $\frac{x}{3}\times\frac{x}{4}=x+24$, $x^2=12x+288$, $x=24$.

[89] Βλ. Karpinski, L.C., πρ. παρ. 4, σελ. 98-101 και Hughes, B., πρ. παρ. 56, σελ. 244.
[90] Βλ. Karpinski, L.C., πρ. παρ. 4, σελ. 100-101 και Hughes, B., πρ. παρ. 56, σελ. 244.
[91] Βλ. Karpinski, L.C., πρ. παρ. 4, σελ. 100-103 και Hughes, B., πρ. παρ. 56, σελ. 244-245.
[92] Βλ. Karpinski, L.C., πρ. παρ. 4, σελ. 102-105 και Hughes, B., πρ. παρ. 56, σελ. 247-248.
[93] Με σημερινό συμβολισμό: $4x(10-x)=x^2$.
[94] Βλ. Karpinski, L.C., πρ. παρ. 4, σελ. 104-109 και Hughes, B., πρ. παρ. 56, σελ. 248-250.

Ακολουθούν άλλα 16 προβλήματα[95] αφηγηματικού τύπου[96], μερικά από τα οποία είναι πιο σύνθετα από τα προηγούμενα. Συνοπτικά και με τη βοήθεια του σημερινού συμβολισμού αυτά αναπαριστάνονται[97] ως εξής:

- □ $x(10-x)=21$, $10x-x^2=21$, $x^2+21=10x$, $x=3$
- □ $(10-x)^2-x^2=40$, $100+x^2-20x-x^2=40$, $100-20x=40$, $20x=60$, $x=3$
- □ $x^2+(10-x)^2+10-2x=54$, $2x^2-22x+100=54$, $x^2+28=11x$, $x=4$
- □ $(10-x)^2=81x$, $100-20x+x^2=81$, $x^2+100=101x$, $x=49\frac{1}{2}$ και $x=1$
- □ $\frac{x}{x+2}=\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{2}(x+2)$, $x=\frac{1}{2}x+1$, $\frac{1}{2}x=1$, $x=2$
- □ $x^2\times x=3x^2$, $x=3$
- □ $3x\times 4x=x^2+44$, $12x^2=x^2+44$, $11x^2=44$, $x=2$
- □ $4x\times 5x=2x^2+36$, $20x^2=2x^2+36$, $18x^2=36$, $x^2=2$
- □ $x\times 4x=3x^2+50$, $4x^2=3x^2+50$, $x^2=50$
- □ $(x-\frac{1}{3}x-3)^2=x$, $(\frac{2}{3}x-3)^2=x$, $\frac{4}{9}x^2+9-4x=x$, $\frac{4}{9}x^2+9=5x$
- □ $\frac{1}{3}x\times\frac{1}{4}x=x$, $\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}x=x$, $x=12$
- □ $\frac{1\frac{1}{2}}{1+x}=2x$, $2x(1+x)=1\frac{1}{2}$, $x^2+2x=1\frac{1}{2}$
- □ $x\times\frac{2}{3}x=5$, $\frac{2}{3}x^2=5$, $x^2=\frac{15}{2}$
- □ $\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}=\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}x=1$, $x^2+x=6$, $x=2$
- □ $\frac{1}{3}(x^2-4x)=4x$, $x^2=16x$, $x=16$, $x^2=256$
- □ $(x^2-3x)^2=x^2$, $x^2-3x=x$, $x^2=4x$, $x=4$

Στη μετάφραση του Τζεράρντο από την Κρεμόνα η αντίστοιχη ενότητα περιλαμβάνει 12 προβλήματα[98]. Επίσης υπάρχουν και άλλα 21 προβλήματα στο συμπλήρωμα που είχε επισυναφθεί στο τέλος αυτής της μετάφρασης[99]. Όλα αυτά τα προβλήματα είναι παρόμοια, σε περιεχόμενο και τρόπο επίλυσης, με τα προηγούμενα 16 της μετάφρασης του Ρόμπερτ από την Τσέστερ. Διαφέρουν λίγο ως προς τη διατύπωση και ως προς τη σειρά εμφάνισής τους. Και στις δύο περιπτώσεις η πηγή τους είναι τα 32 προβλήματα του αυθεντικού κειμένου του "*Κιτάμπ αλ-τζαμπρ*" του αλ-Χουαρίζμι[100], που φαίνεται ότι οι αντίστοιχοι μεσαιωνικοί μεταφραστές έκαναν επιλογές από αυτά και τα απέδωσαν ελεύθερα, ή τα δυτικά αραβικά αντίγραφά του, που χρησιμοποιήθηκαν στις σχετικές λατινικές μεταφράσεις, είχαν τις δικές τους προεπιλογές.

[95] Στη μετάφραση του Ρόμπερτ από την Τσέστερ.
[96] Δηλ. μη τυποποιημένα σε έτοιμα σχήματα εξισώσεων, αλλά προβλημάτων που από την εκφώνηση τους διαμορφώνονται οι αντίστοιχες εξισώσεις τους.
[97] Βλ. Karpinski, L.C., πρ. παρ. 4, σελ. 108-121. Τα αντίστοιχα προβλήματα στη μετάφραση του Τζεράρντου δεν είναι ακριβώς ίδια, βλ. πρ. παρ. 95.
[98] Βλ. Hughes, B., πρ. παρ. 56, σελ. 218-219.
[99] Στο ίδιο, σελ. 219-221, 257-261.
[100] Βλ. Karpinski, L.C., πρ. παρ. 4, σελ. 111, υπ. 1.

Αξίζει να αναφερθεί, ενδεικτικά, ένα απ' αυτά τα προβλήματα, π.χ. το 5ο από τη μετάφραση του Ρόμπερτ από την Τσέστερ που αντιστοιχεί στο 15ο του συμπληρώματος στη μετάφραση του Τζεράρντο από την Κρεμόνα. Η διατύπωσή του, σύμφωνα με την πρώτη μετάφραση, είναι η εξής: δίνονται δύο _περιουσίες_ που διαφέρουν κατά 2 μονάδες, διαιρείται η μικρότερη με τη μεγαλύτερη έτσι ώστε το κλάσμα που προκύπτει να είναι ίσο με ένα δεύτερο[101]. Ακολουθεί η διαδικασία επίλυσης[102]: πολλαπλασιάζεται το _πράγμα_ [*res*, δηλ. ο άγνωστος, που εδώ αντιπροσωπεύει την _περιουσία_ (substantia)] συν 2 με ένα δεύτερο και γίνεται μισό _πράγμα_ συν ένα που ισούται με ένα _πράγμα_. Αφαιρείται μισό _πράγμα_ και από τις δύο πλευρές της ισότητας με αποτέλεσμα η μονάδα να είναι ίση με το μισό _πράγμα_. Διπλασιάζοντας τώρα τα δύο μέλη της ισότητας προκύπτει το _πράγμα_ να είναι ίσο με δύο.

Η τελευταία ενότητα και των δύο μεταφράσεων είναι ένα μικρό κείμενο σχετικό με εμπορικούς υπολογισμούς. Εδώ αξιοποιείται η ιδέα των αναλογιών, από όπου αναδεικνύεται ο γνωστός σήμερα "κανόνας των τριών". Τρία μόνο παραδείγματα χρησιμοποιούνται για την παρουσία αυτού του θέματος, δύο γενικού χαρακτήρα και ένα πρακτικού περιεχομένου. Το πρώτο απ' αυτά έχει να κάνει με την εύρεση της "τετάρτης αναλόγου". Συγκεκριμένα: όταν είναι δέκα προς έξι ποιος αριθμός προς τέσσερα σχηματίζει αναλογία; Η ακριβής διατύπωση είναι: δέκα προς έξι, πόσα προς τέσσερα; Από την αρχή δίνεται το εμπορικό νόημα αυτού του παραδείγματος διευκρινίζοντας ότι ο όρος "δέκα" σημαίνει το δοσμένο μέτρο, ο όρος "έξι" δηλώνει την τιμή, το "πόσα" εκφράζει τον άγνωστο και το "προς τέσσερα" αναφέρεται στο κόστος. Γίνεται έτσι φανερός ο πρακτικός προσανατολισμός της υπολογιστικής τεχνικής που ανάπτυξε ο αλ-Χουαρίζμι. Επίσης είναι αξιοσημείωτη η χρησιμοποίηση για πρώτη φορά του όρου άγνωστος, τον οποίο οι μεταφραστές του 12ου αιώνα απέδωσαν με την έκφραση *numero ingoto*[103] ή *numerus ignotus*[104] (*άγνωστος αριθμός*). Για την εύρεση, τώρα, του αγνώστου εφαρμόζεται ο γενικός κανόνας, που δόθηκε προκαταβολικά πριν το παράδειγμα. Σύμφωνα λοιπόν με τον κανόνα αυτό πολλαπλασιάζεται ο πρώτος από τους αριθμούς με τον τέταρτο, δηλ. 10 επί 4, που είναι αντιστρόφως ανάλογοι, και διαιρείται με τον δεύτερο αριθμό, δηλ. με τον 6, που είναι αντιστρόφως ανάλογος του αγνώστου[105]. Έτσι ο άγνωστος αριθμός είναι 40 δια 6, δηλ. $6\frac{2}{3}$.

Το δεύτερο παράδειγμα αντιπροσωπεύει το δεύτερο είδος εύρεσης "τετάρτης αναλόγου". Στην περίπτωση αυτή το ερώτημα είναι: δέκα προς οκτώ, ποιο είναι το κόστος του τέσσερα; Για την εύρεση του ζητούμενου πολλαπλασιάζεται το 4 επί 8, που δίνει 32. Το *κόστος*, τότε, είναι το αποτέλεσμα της διαίρεσης του 32 δια του 10, δηλ. $3\frac{1}{5}$[106].

Το τρίτο και τελευταίο παράδειγμα είναι το εξής: ένας άνθρωπος προσλήφθηκε για μια εργασία 30 ημερών σε ένα αμπέλι για 10 πένες. Εργάστηκε 6 μέρες. Πόση από τη συμφωνηθείσα αμοιβή θα πρέπει να πάρει; Για τη λύση του προβλήματος σημειώνεται ότι οι 6 μέρες αντιστοιχούν στο ένα πέμπτο του συνολικού χρόνου της προγραμματισμένης εργασίας,

---

[101] Η συγκεκριμένη λατινική απόδοση είναι η εξής: Duas substantias duabus drachmis differentes, diuido, maiorem scilicet in minorem, sic, vt vna diuisionis particular, quae est exiens, medietatem substantiae maioris compleat, βλ. Karpinski, L.C., πρ. παρ. 4, σελ. 112, 114. Η αντίστοιχη απόδοση του Τζεράρντου είναι η εξής: Duo census sunt inter quos sunt due dragme. Quorum minorem per maiorem divisi, et evenit ex divisione medietas, βλ. Hughes, B., πρ. παρ. 56, σελ. 260.
[102] Βλ. Karpinski, L.C., πρ. παρ. 4, σελ. 114-115.
[103] Βλ. Karpinski, L.C., πρ. παρ. 4, σελ. 122.
[104] Βλ. Hughes, B., πρ. παρ. 56, σελ. 219, 256.
[105] Βλ. Karpinski, L.C., πρ. παρ. 4, σελ. 122-123 και Hughes, B., πρ. παρ. 56, σελ. 256.
[106] Βλ. Karpinski, L.C., πρ. παρ. 4, σελ. 122-125 και Hughes, B., πρ. παρ. 56, σελ. 256.

κατά συνέπεια ο εργάτης το ποσό που θα πάρει θα έχει ως προς τη συμφωνηθείσα αμοιβή την ίδια αναλογία. Αυτό λοιπόν βρίσκεται πολλαπλασιάζοντας το 10 επί 6, που δίνει 60, και στη συνέχεια διαιρώντας το δια 30 προκύπτει 2, που είναι η ζητούμενη αμοιβή[107].

Από την προηγούμενη αναπαράσταση των θεμάτων και των τρόπων αντιμετώπισής τους διαφαίνονται κάποια ιδιαίτερα στοιχεία του θεωρητικού υπόβαθρου της μαθηματικής γνώσης του συγκεκριμένου έργου. Το πιο εμφανές είναι το υπολογιστικό πλαίσιο του. Με άλλα λόγια υποδηλώνεται, συνολικά, η ύπαρξη μιας επαρκούς γνώσης των αριθμητικών πράξεων με "φυσικούς" αριθμούς και κλάσματα. Είναι μάλιστα έκδηλη μια ευχέρεια στην εκτέλεση των υπολογιστικών διαδικασιών. Αυτή η δυνατότητα απηχούσε την καλά θεμελιωμένη υπολογιστική Αριθμητική, που είχε ήδη αναπτύξει ο αλ-Χουαρίζμι και ο Ισλαμικός Πολιτισμός με τη συστηματοποίηση της ινδο-αραβικής αρίθμησης και τεχνικής των αριθμητικών υπολογισμών. Χωρίς αυτό το υπόβαθρο θα ήταν, μάλλον, αδύνατο να οικοδομηθεί η "τεχνική της αλ-τζαμπρ και αλ- μουκαμπάλα".

Ένα δεύτερο χαρακτηριστικό, που σηματοδοτεί τη θεωρητική ιδιαιτερότητα του περιεχομένου των *Liber Algebrae* του 12ου αιώνα, είναι ο διαποτισμός του με έναν αλγοριθμικό τρόπο σκέψης. Διαπνέεται δηλ. από μια μαθηματική σκέψη η οποία αναπτύσσεται με τη μορφή μιας διαρθρωμένης ακολουθίας νοητικών ενεργειών. Μια γνωστική συμπεριφορά που προσιδιάζεται, επίσης, με τη νοοτροπία του ινδο-αραβικού τρόπου οργάνωσης και λειτουργίας της υπολογιστικής Αριθμητικής. Το αλγοριθμικό αυτό υπόβαθρο σε συνδυασμό με την εισαγωγή των εννοιών της *ρίζας* [ή του *πράγματος* (δηλ. του αγνώστου)] και της *περιουσίας* (δηλ. του τετραγώνου του αγνώστου) ως αυθύπαρκτοι και αυτονόητοι όροι, συνθέτουν ένα είδος σκέψης που καθορίζεται και εμφορείται από τη λειτουργικότητα και την αποτελεσματικότητα των διαδικασιών επίλυσης προβλημάτων. Ήταν επομένως μια σκέψη οργανωμένη και προσανατολισμένη στην επίλυση προβλημάτων με τη βοήθεια αγνώστου, μια *τεχνική των αγνώστων*. Ένας τρόπος σκέψης και μεθόδευσης που δεν συνάδει με τον αναλυτικό στοχασμό και την αναλυτική μέθοδο της αρχαίας ελληνικής παράδοσης.

Για μια ολοκληρωμένη απεικόνιση του περιεχομένου των *Liber Algebrae* του 12ου αιώνα δεν πρέπει να μείνουν αδιευκρίνιστοι οι δύο πολύ χαρακτηριστικοί και πρωτόγνωροι όροι, ο αλ-τζαμπρ και ο αλ-μουκαμπάλα. Η παράλειψη να διασαφηνιστούν κατά την περιγραφή των ενοτήτων δεν είναι αφύσικη, γιατί πουθενά στα σχετικά κείμενα δεν προσδιορίζονται αυτοί οι όροι. Μένουν μετέωροι σ' όλη την παρουσίαση της *τεχνικής των αγνώστων* του αλ-Χουαρίζμι, όπως αυτή αποτυπώθηκε στις πρώτες λατινικές μεταφράσεις. Και αυτό είναι κάπως αντιφατικό, γιατί οι συγκεκριμένοι όροι προτάσσονται στον τίτλο του έργου, είναι νεοφανή στοιχεία του τότε μαθηματικού λόγου, ωστόσο δεν ορίζονται ούτε καν θίγεται το νόημά τους και ο μαθηματικός τους ρόλος. Για να ξεπεραστεί αυτή η αδυναμία θα πρέπει να διαλευκανθεί η σημασία τους με ένα έμμεσο τρόπο, είτε αξιοποιώντας τις σχετικές νύξεις και τη γενικότερη λογική των διαδικασιών που περιέχονται στις εν λόγω μεταφράσεις, είτε αντλώντας τις απαραίτητες πληροφορίες από τις ιστορικές αναλύσεις του συγκεκριμένου μαθηματικού πεδίου της τότε ισλαμικής παιδείας. Στην κατεύθυνση αυτή οι ιστορικοί των μαθηματικών ανέδειξαν ότι το μαθηματικό νόημα των δύο αυτών όρων είναι το εξής:

1. Η σημασία του αλ-τζαμπρ είναι η πρόσθεση των ίδιων όρων και στις δύο πλευρές μιας εξίσωσης με σκοπό την εξάλειψη των αρνητικών όρων. Πιο σπάνια είχε το νόημα του πολλαπλασιασμού και των δύο πλευρών μιας εξίσωσης με σκοπό την εξάλειψη των κλασμάτων.
2. Ο όρος αλ-μουκαμπάλα σήμαινε την αναγωγή των θετικών όρων μιας εξίσωσης με αφαίρεση των ίδιων ποσοτήτων και από τις δύο πλευρές της.[108]

[107] Βλ. Karpinski, L.C., πρ. παρ. 4, σελ. 124-125 και Hughes, B., πρ. παρ. 56, σελ. 256-257.

Η ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΛΑΤΙΝΙΚΩΝ ΜΕΤΑΦΡΑΣΕΩΝ ΤΟΥ "*ΚΙΤΑΜΠ ΑΛ-ΤΖΑΜΠΡ*" ΜΕ ΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΚΟΥΛΤΟΥΡΑ ΤΗΣ ΕΠΟΧΗΣ

Οι λατινικές μεταφράσεις του *Κιτάμπ αλ-τζαμπρ* εμπλούτισαν, χωρίς αμφιβολία, τις διαθέσιμες μαθηματικές γνώσεις και τεχνικές της, τότε, ρωμαιοκαθολικής μαθηματικής παιδείας. Δεν είναι όμως καθόλου αυτονόητο ότι αυτή η νεόφερτη μαθηματική σκέψη και πρακτική προσλήφθηκε και ενσωματώθηκε αμέσως στη δυτικο-ευρωπαϊκή μαθηματική κουλτούρα του 12ου αιώνα. Η *τεχνική των αγνώστων* συνυφασμένη, όπως ήταν, με το νέο είδος αρίθμησης και αριθμητικών υπολογισμών αποτελούσε μια πρωτόγνωρη μαθηματική νοοτροπία και έναν πρωτοφανή τρόπο μαθηματικών χειρισμών στη μέχρι τότε χριστιανική παιδεία. Ήταν δηλαδή μια μαθηματική νεοτερικότητα που δύσκολα και απροσδόκητα μπορεί να θεωρηθεί ότι συναρμόζονταν με τον ρωμαιοκαθολικό υπερσυντηρητισμό του πρώιμου Μεσαίωνα. Αλήθεια, τι έγινε; Τι τύχη είχαν οι εν λόγω μεταφράσεις; Μελετήθηκαν; Διδάχτηκαν; Χρησιμοποιήθηκαν; Αναπροσαρμόστηκαν; Αναπτύχθηκαν;

Από τις αναπαραστάσεις της κατάστασης των Μαθηματικών στη Δυτική Ευρώπη το 12ο αιώνα, που παρουσιάζονται στα γενικά εγχειρίδια Ιστορίας των Μαθηματικών[109], διαφαίνεται ότι υπήρχε μια υποτονικότητα στην αξιοποίηση και καλλιέργεια της εισαγόμενης ισλαμικής μαθηματικής γνώσης και τεχνικής στο συγκεκριμένο πολιτισμικό χώρο. Δεν σημειώνεται κανένα ίχνος διδασκαλίας ή συγγραφικής δραστηριότητας σχετικά με την ισλαμική *τεχνική των αγνώστων*. Ούτε καν αντιγραφές των αρχικών μεταφράσεων, που αποτελούν δείκτη μελέτης και διάδοσης της εν λόγω *τεχνικής*, δεν έχουν επισημανθεί.[110] Είναι ωστόσο δύσκολο να θεωρηθεί ότι οι συγκεκριμένες μεταφράσεις αγνοήθηκαν τελείως, γιατί ο απόηχός τους ήταν *"ηχηρός"* στη δυτικο-ευρωπαϊκή μαθηματική παιδεία από το 13ο αιώνα και μετά. Δημιουργείται λοιπόν μια θολότητα γύρω από την ακτινοβολία, την ενεργητική δηλ. επιρροή, των *Liber Algebrae* το 12ου αιώνα.

Για το φωτισμό του θέματος αυτού θα πρέπει από τη μια να επισημανθεί το γενικότερο, τότε, κλίμα της πρόσληψης του ισλαμικού τρόπου επίλυσης προβλημάτων υπολογισμών και από την άλλη να συσχετιστεί ο τρόπος αυτός με την επικρατούσα μαθηματική νοοτροπία της ρωμαιοκαθολικής παιδείας της εποχής. Στην πρώτη περίπτωση μπορεί να παρατηρηθεί ένα αυξημένο ενδιαφέρον για την ισλαμική μεθοδολογία υπολογισμών και επίλυσης αντίστοιχων προβλημάτων. Και αυτό γιατί εκτός από τις μεταφράσεις των σχετικών αραβικών έργων που αναφέρθηκαν στην αρχή, δηλ. τα δύο *Liber Algebrae*, το *Liber Alghoerismi de pratica arismetrise*, το *Liber mensurationum* και οι τρεις *"Λογαριαστικές"*[111] που προέρχονταν από κείμενα του αλ-Χουαρίζμι, είχαν επίσης μεταφραστεί[112] οι *Αστρονομικοί Πίνακες* του αλ-Χουαρίζμι, από τον Αδελάρδο του Μπαθ[113] (12ος αιώνας) και οι *Τολεδιανοί Πίνακες* του αλ-Ζαρκάλι[114] και αλ-Μπαττάνι[115], πιθανόν από τον Γεράρδο της Κρεμόνα, οι οποίοι προϋπόθεταν υπολογιστικές γνώσεις. Επιπρόσθετα μια ακόμη συμβολή ενίσχυσε τα

---

108 Βλ. van der Waerden, B.L.: *A History of Algebra. From al-Khwarismi to Emmy Noether*, Springer-Verlag, 1985, σελ. 4.

109 Βλ. Loria, G. : *Ιστορία των Μαθηματικών*, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία (εκδ. Παπαζήση), τομ. Α', 1971, σελ. 194-198, Boyer, C.B. / Merzbach, U.C.: *Η Ιστορία των Μαθηματικών*, εκδ. Γ.Α. Πνευματικού, 1997, σελ. 281-284.

110 Βλ. Hughes, B., πρ. παρ. 13, σελ. 31-32.

111 Πρόκειται για το *Dixit Algorizmi*, το *Ysagogarum Alchorismi*, το *Liber Alchorismi* και το *Liber pulveris*, όλα του 12ου αιώνα, βλ. Allard, A. και Folkerts, M., πρ. παρ. 21.

112 Βλ. Toomer,GJ.: Al-Khwarizmi, Abu Jafar Muhammad Ibn Musa, *Dictionary of Scientific Biography,* ed. by C.C. Gillispie, vol. 7, 1975, σελ. 358-365, ειδ. σελ. 363.

113 Adelard of Bath.

114 Al-Zarqali (11ος αιώνας), αστρονόμος στην Κόρντομπα της Ισπανίας.

115 Al-Battani (9ος αιώνας), άραβας μαθηματικός και αστρονόμος.

υπολογιστικά ενδιαφέροντα της ρωμαιοκαθολικής κουλτούρας. Πρόκειται για τη λατινική μετάφραση του Πλάτωνα του Τίβολι (Platone Tivolino, 12ος αιώνας), το 1145, *Liber embadorum* (*Βιβλίο των Εμβαδών*)[116] του έργου *Σύνθεση περί Γεωμετρικών Μέτρων*[117] του ισπανο-εβραίου Αβραάμ μπαρ Χίγια[118] (2ο μισό του 11ου αιώνα-1ο μισό του 12ου αιώνα), γνωστός στα λατινικά ως Σαβασόρντα (Savasorda). Η μετάφραση αυτή αποτελεί μια εκτεταμένη εκδοχή του γεωμετρικού τμήματος του *Κιτάμπ αλ-τζαμπρ*, το οποίο είχε παραλειφθεί στα *Liber Algebrae*, και γίνεται εφαρμογή της *τεχνικής των αγνώστων* σε γεωμετρικά προβλήματα. Με αυτές οι μαρτυρίες δεν είναι εύκολο να θεωρηθεί ότι η διείσδυση της ισλαμικής τεχνικής επίλυσης υπολογιστικών προβλημάτων στη χριστιανική παιδεία της Δυτικής Ευρώπης ήταν περιστασιακή και μεμονωμένη. Όλα δείχνουν ότι ήταν ένα νέο είδος μαθηματικής σκέψης και πρακτικής που κέντρισε την προσοχή των χριστιανών λογίων της εποχής οι οποίοι εμπλέκονταν, στον ένα ή τον άλλο βαθμό, με τα Μαθηματικά. Αυτό σημαίνει ότι ο συγκεκριμένος μαθηματικός κλάδος στη δυτικο-ευρωπαϊκή κουλτούρα του 12ου αιώνα ήταν, μάλλον, σε κατάσταση επώασης, παρά σε προϋποθέσεις απόρριψης ή αδιαφορίας.

Αναμφίβολα, η παρουσία της νέας αυτής διάστασης των Μαθηματικών στη πνευματική παράδοση του πρώιμου δυτικο-ευρωπαϊκού Μεσαίωνα ήταν μια ανανεωτική παρεμβολή στις καθιερωμένες γνωστικές δομές της. Και όπως ήταν φυσικό, οι νέες μαθηματικές ιδέες και τεχνικές δεν μπορούσαν να "συγκολληθούν" στη παραδοσιακή μαθηματική γνώση και να αποτελέσουν ένα ευρύτερο μαθηματικό περιεχόμενο, γιατί ήταν ασύμβατες μεταξύ τους, τόσο ως προς το είδος της γνώσης και της μεθοδολογίας όσο και ως προς την υποκείμενη νοοτροπία. Η μαθηματική παιδεία του πρώιμου Μεσαίωνα ήταν στην ουσία μια συνοπτική θεωρητικολογία στο πνεύμα της νεοπλατωνικής και νεοπυθαγόρειας αντίληψης. Αντλούσε το περιεχόμενό της, κύρια, από το αντίστοιχο έργο του ρωμαίου φιλόσοφου Βοήθιου (480-524 μ.Χ.). Μέσα από αυτή τη σκοπιά

> "τα Μαθηματικά χρησιμοποιήθηκαν στο πρώτο ήμισι του 12ου αιώνα όχι για την ποσοτική διατύπωση φυσικών νόμων ή τη δημιουργία γεωμετρικών αναπαραστάσεων των φυσικών φαινομένων, αλλά για την απάντηση ερωτημάτων τα οποία εμείς θα θεωρούσαμε μεταφυσικά ή θεολογικά.... "Για" παράδειγμα...οι λόγιοι του 12ου αιώνα, ακολουθώντας τον Βοήθιο, χρησιμοποίησαν τη θεωρία των αριθμών (και ειδικά τη σχέση της μονάδας με τους υπόλοιπους αριθμούς) ως όχημα για να κατανοήσουν τη σχέση της θείας ενότητας και της πολλαπλότητας των δημιουργημάτων....Τα Μαθηματικά χρησίμευσαν επίσης το 12ο αιώνα ως υπόδειγμα του αξιωματικού τρόπου απόδειξης."[119]

Αξίζει να σημειωθεί ότι στις αρχές του 12ου αιώνα άρχισε να χρησιμοποιείται η αποδεικτική μέθοδος στη Ρωμαιοκαθολική Θεολογία. Πολύ χαρακτηριστικό ήταν το «επιχείρημα του Ανσέλμου[120]» σύμφωνα με το οποίο αποδείκνυε

> "την ύπαρξη του Θεού μέσω ενός διαλεκτικά οικοδομημένου «οντολογικού» επιχειρήματος"[121].

Πρόκειται λοιπόν, για μια επιστημολογική ροπή προς τον "λογικισμό" (ρασιοναλισμό[122]), δηλ. τον έλλογο τρόπο κατανόησης, των θεωρητικών και κοινωνικών ζητημάτων. "Για παράδειγμα

---

[116] Βλ. Mahoney, M.S., πρ. παρ. 6, σελ. 158.

[117] *Hibbur ha-Meshiha we ha-Tishboret*, βλ. Lévy, T.: Hebrew Mathematics in the Middle Ages: An Assessment, στο Rajep, E.J. et al (eds.): *Tradition, Transmission, Transformation*, E.J. Brill, 1996, σελ. 71-88, ειδ. σελ. 74.

[118] Abraham bar Hiyya, βλ. Lévy, T., πρ. παρ. σελ. 73-74.

[119] Βλ. Lindberg, D.C.: *Οι Απαρχές της Δυτικής Επιστήμης*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., 1997, σελ. 284-285.

[120] Πρόκειται για τον Άνσελμο, αρχιεπίσκοπο του Καντέρμπουρυ (Anselm of Canterbury, 1033-1109).

[121] Βλ. Nicholas, D.: *Η Εξέλιξη του Μεσαιωνικού Κόσμου*, εκδ. Μορφωτικού Ιδρύματος Εθνικής Τράπεζας, 1999, σελ. 494-495. Επίσης βλ. Μουτσόπουλου, Ε.: *Η Σχολαστική Διανόησις*, εκδ. Γρηγόρη, σελ. 34-37.

υπήρξαν προσπάθειες εξορθολογισμού των εμπορικών πρακτικών και της εκκλησιαστικής και κρατικής διοίκησης μέσω της διατήρησης αρχείων και της ανάπτυξης των λογιστικών και ελεγκτικών διαδικασιών."[123] Το πνεύμα αυτό διαπότιζε τις σπουδές και τις θεωρητικές αναζητήσεις των νέων, τότε, καθεδρικών σχολών. Η λογικο-φιλοσοφική σκέψη διαπερνούσε τα προγράμματα των ανώτερων σπουδών, όπως και τις θεολογικές ή επιστημονικές προσεγγίσεις. Ήταν μια θεωρητική μετεξέλιξη, η οποία αντλούσε από το έργο του Αριστοτέλη και κατά συνέπεια είχε μια ευμενή στάση στο λογικό και αξιωματικό πρότυπο της γεωμετρικής σκέψης της αρχαίας ελληνικής κληρονομιάς. Έτσι αναπτύχθηκε, τότε, μια συνύφανση της ευκλείδειας αξιωματικής μεθόδου με τη ρωμαιοκαθολική Θεολογία[124], η οποία ευνόησε την εκρηκτική διάδοση των *Στοιχείων* του Ευκλείδη τους επόμενους αιώνες. Θα πρέπει, όμως, να διευκρινιστεί ότι στο πρώτο μισό του 12[ου] αιώνα οι δυτικο-ευρωπαίοι λόγιοι και καθηγητές πορίζονταν την αξιωματική μέθοδο της Γεωμετρίας από το έργο του Βοήθιου και αργότερα, κατά τη διάρκεια του αιώνα, γνώρισαν τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη από τις αραβικές μεταφράσεις και εμβάθυναν στο συγκεκριμένο τρόπο σκέψης.

Η τάση αυτή, σίγουρα, διαμόρφωνε έναν καινούργιο θεωρητικό λόγο με αρκετά στοιχεία της μαθηματικής παράδοσης που πρόβαλε στον αρχαίο ελληνικό πολιτισμό και διατηρήθηκε, αρκετά περιορισμένα και περιστασιακά, στις πρωτο-μεσαιωνικές ανθολογίες ή συμπιλήματα, ιδιαίτερα σ' αυτές του Βοήθιου. Ένα λόγο που εξέφραζε στη συγκεκριμένη συγκυρία και μια μαθηματική νοοτροπία, μια μαθηματική στάση με θεωρητικόλογη προαίρεση, ως κακέκτυπη εκδοχή της νεοπλατωνικής και νεοπυθαγόρειας αντίληψης. Και, όπως ήταν φυσικό, αυτή η νοοτροπία καταστάλαζε στο μορφωτικό ιδεώδες της εποχής και κατά συνέπεια στη γνωστική συμπεριφορά των διανοουμένων της. Οπότε, δεν μπορούσαν να αφομοιώσουν και να καλλιεργήσουν τις νεοεισαγόμενες ισλαμικές μαθηματικές γνώσεις και τεχνικές οι οποίες απέπνεαν έναν πρακτικισμό, έναν πραγματισμό. Το μόνο που μπορούσαν να κάνουν ήταν να τις καταγράψουν μηχανιστικά και τίποτα άλλο. Είναι αρκετά χαρακτηριστικό το γεγονός ότι οι τότε μεταφραστές των ισλαμικών μαθηματικών προσλαμβάνονταν, σε κάποιες περιπτώσεις, με το πνεύμα και την ορολογία του Βοήθιου.[125]

Η υπέρβαση των εν λόγω γνωστικών εμποδίων και η αξιοποίηση των μεταφρασμένων ισλαμικών Μαθηματικών θα ήταν δυνατή όταν θα άλλαζαν οι εκπαιδευτικές συνθήκες και τα πλαίσια νομιμοποίησης των περιεχομένων της μαθηματικής παιδείας. Και οι αλλαγές αυτές ανέκυψαν το 13[ο] αιώνα με την ίδρυση των Πανεπιστήμιων και με την ανάπτυξη των εμπορικών σπουδών. Τότε και τα μεταφρασμένα ισλαμικά Μαθηματικά άρχισαν να καρποφορούν.

Όλα δείχνουν ότι η ρωμαιοκαθολική μαθηματική παιδεία του 12[ου] αιώνα, όπως και η παιδεία συνολικά, ήταν σε ρευστή κατάσταση. Κατά συνέπεια η συνοχή των περιεχομένων μόρφωσης ήταν χαλαρή. Και αυτό επέτρεπε την παρουσία νέων ενδιαφερόντων και τάσεων προσεταιρισμού νέων γνώσεων. Σ' αυτό ακριβώς το πλαίσιο δόθηκε η ευκαιρία να γίνει ένας συγκερασμός των μεταφρασμένων ισλαμικών Μαθηματικών μέσα σε ανανεωτικές φιλοσοφίζουσες μαθηματικές νοοτροπίες και σε κάποια παράπλευρα ίχνη μαθηματικού πραγματισμού. Η συνεκτικότητα, επομένως, των νεόφερτων ισλαμικών Μαθηματικών με τις

---

[122] Στην ελληνική βιβλιογραφία ο όρος: rationalism, ρασιοναλισμός, αποδίδεται με τον όχι και τόσο πετυχημένο όρο: ορθολογισμός.

[123] Βλ. Lindberg, D.C., πρ. παρ. 119, σελ. 272-273.

[124] Βλ. Evans, G.R.: *More Geometrico:* The Place of Axiomatic Method in the Twelfth Century Commentaries on Boethius' Opuscula Sacra, *Archives Internationales d' Histoire des Sciences*, 27, 1977, σελ. 207-221, και του ιδίου: Boethian and Euclidean Axiomatic Method in the Theology of the Later Twelfth Ceentury, *Archives Internationales d' Histoire des Sciences*, 30, 1980, σελ. 36-52.

[125] Βλ. Høyrup, J., πρ. παρ. 13, σελ. 6.

μαθηματικές συμπεριφορές του, τότε, δυτικο-ευρωπαϊκού πολιτισμού ήταν, μάλλον, ασυμπτωτικού είδους. Αυτό μπορεί να φανεί ακόμη καλύτερα, επισημαίνοντας τους τρόπους αντιμετώπισης της μαθηματικής μόρφωσης σε κάποιες από τις σημαντικότερες σχολές της Δυτικής Ευρώπης εκείνη την εποχή.

Δύο από τις πιο αξιοσημείωτες εστίες μόρφωσης, που αναπτύχθηκαν το 12ο αιώνα στη Δυτική Ευρώπη, ήταν η Σαρτρ (Chartes) και το Παρίσι. Η Σαρτρ ήταν μια μικρή πόλη κοντά στο Παρίσι, νοτιο-δυτικά του. Η φήμη της καθεδρικής σχολής της πηγάζει από την παιδεία που είχε καθιερώσει, στις αρχές του 11ου αιώνα, ο Φουλπέρ (Fulbert, θαν.1028), μαθητής του Ζερμπέρ ντε Ωρυγιάκ και επίσκοπος της Σαρτρ. Ήταν ο ιδρυτής της σχολής και ο εισηγητής μιας παράδοσης που διατηρήθηκε μέχρι τα μέσα, περίπου, του 12ου αιώνα. Μια παράδοση που διακρίνονταν από έναν φυσιοκρατικό προσανατολισμό και έναν ανθρωπιστικό χαρακτήρα. Πρόκειται για μια διανοητική στάση με βαθιά πεποίθηση ότι η Φύση είναι παντοδύναμη, είναι η δύναμη που δημιουργεί, που γονιμοποιεί. Είναι επίσης μια οργανωμένη και έλλογη ολότητα, το σύμπαν. Σύμφωνα με αυτή την πεποίθηση ο Θεός, ως παντοδύναμος, δημιούργησε τη Φύση, σέβεται όμως την τάξη, την κανονικότητα, την αρμονία της. *"Αυτό που έχει σημασία*", επισήμανε ο Γκιγιόμ της Κονς[126], *"δεν είναι ότι ο Θεός μπόρεσε να κάνει κάτι τέτοιο, σημασία έχει να το εξετάσουμε, να το εξηγήσουμε με έλλογο τρόπο, να καταδείξουμε το στόχο και τη χρησιμότητα.. Σίγουρα ο Θεός μπορεί να κάνει τα πάντα, σημασία έχει ότι έκανε το συγκεκριμένο ή το άλλο"*.[127] Ο σκοπός του Γκιγιόμ δεν ήταν να αρνηθεί τη δράση του Θεού, αλλά να διακηρύξει ότι ο Θεός ενεργεί συνήθως μέσω φυσικών δυνάμεων και ότι καθήκον του φιλοσόφου είναι να εξηγήσει όσο το δυνατόν περισσότερα πράγματα με τη βοήθεια αυτών των δυνάμεων[128]. Όπως φαίνεται, η επέμβαση του Θεού περιορίζεται στην αρχική στιγμή της Δημιουργίας και η Φύση θεωρείται ότι εξελίσσεται ως αποτέλεσμα φυσικής αιτιότητας. Αυτή η αποϊεροποίηση της Φύσης θεμελίωνε τη φυσιοκρατική αντίληψη της εποχής και διαμόρφωνε μια κριτική στάση απέναντι στο μεταφυσικό συμβολισμό της ρωμαιοκαθολικής παράδοσης. Μια στάση που χαρακτήριζε την παιδεία της Σαρτρ και συνέβαλε έτσι στην ενθάρρυνση και ώθηση της φυσιοκρατικής νοοτροπίας του 12ου αιώνα.

Μέσα απ' αυτή την οπτική γωνία η Σάρτρ δίδασκε, επίσης, ότι ο άνθρωπος, που έχει το χάρισμα της λογικής σκέψης και έτσι μπορεί να μελετήσει και να κατανοήσει τη Φύση, ως μια λογικά δομημένη δημιουργία του Θεού, είναι και αυτός ένα στοιχείο της ίδιας δημιουργίας και εντάσσεται έτσι αρμονικά στην τάξη του κόσμου, στη Φύση. Θεωρούσαν, μάλιστα, οι διανοούμενοι της Σαρτρ ότι ο άνθρωπος είχε εξαρχής προβλεφθεί στο σχέδιο του Δημιουργού και ότι για χάρη του δημιουργήθηκε ο κόσμος. Μ' αυτή την έννοια παρουσίαζαν τον άνθρωπο ως επίκεντρο και αντικείμενο της δημιουργίας. Έθεταν έτσι τον άνθρωπο στο κέντρο της θεολογικής, φιλοσοφικής και επιστημονικής παιδείας. Και αυτή η μορφωτική επιλογή προσέδιδε, παράλληλα με την εκτίμηση της λογοτεχνίας ως αυτοτελής μορφωτική αξία, τον ανθρωπιστικό χαρακτήρα των σπουδών της Σαρτρ.[129]

Μια βασική πηγή για την πραγματοποίηση του μορφωτικού αυτού ιδεώδους ήταν το έργο του Πλάτωνα και ιδιαίτερα ο *Τίμαιος*. Ίσως το καταλληλότερο, από τη διαθέσιμη τότε λατινική βιβλιογραφία, για τις κοσμολογικές και φυσικές διαθέσεις και αναζητήσεις της εποχής. Ένα έργο που αποτέλεσε τον κεντρικό άξονα του προγράμματος σπουδών της φυσικής φιλοσοφίας. Οι λόγιοι της Σαρτρ ακολούθησαν τον άξονα αυτό και έδωσαν μια πλατωνική χροιά στη δυτικο-ευρωπαϊκή παιδεία του 12ου αιώνα. Όλες οι επιστημονικές γνώσεις αυτής

[126] Guillaume de Conches (12ος αιώνας), καθηγητής της Σαρτρ.
[127] Βλ. Λε Γκοφ, Ζ., πρ. παρ. 35, σελ. 90.
[128] Βλ. Lindberg, D.C., πρ. παρ. 119, σελ. 281.
[129] Βλ. Λε Γκοφ, Ζ., πρ. παρ. 35, σελ. 91-95.

της περιόδου συνδέονται με το όνομα του Πλάτωνα. Ο Μπερνάρ της Σαρτρ[130], που στις μέρες του έλαμψε η σχολή της Σαρτρ, συνέθεσε, για παράδειγμα, μια έμμετρη "κοσμογονία" αντλώντας από τον πλατωνικό *Τίμαιο* και συνδυάζοντάς τον με τη ρωμαιοκαθολική θρησκευτικότητα[131]. Αλλά και ο Τιερί της Σαρτρ[132] στο συγγραφικό του έργο, λίγο αργότερα, υποστήριξε, έχοντας το ίδιο πλατωνικό πρότυπο, ότι η ιστορία της *Γενέσεως* δεν είναι δυνατό να γίνει κατανοητή χωρίς τη διανοητική εξάσκηση που εξασφάλιζε η τετρακτίδα (quadrivium), χωρίς δηλαδή καλή γνώση των Μαθηματικών, γιατί κάθε λογική ερμηνεία του σύμπαντος εξαρτάται από τα Μαθηματικά.[133] Μέσα από αυτή την οπτική γωνία προσπάθησε να διατυπώσει έναν αριθμητικό συμβολισμό της ισότητας και της ανισότητας, για να αποδώσει βασικές θεολογικές και μεταφυσικές έννοιες.[134] Ωστόσο δεν θεωρούσε τη μαθηματική μόρφωση ως μια εισαγωγή στις θεολογικές σπουδές, αλλά ως ένα προχωρημένο υπόβαθρο για την ανάπτυξη της φυσικής φιλοσοφίας. Μια στάση που συμμερίζονταν και ο Γκιγιόμ της Κονς.[135]

Μέσα από τον πλατωνικό αυτό διαποτισμό του πνευματικού ορίζοντα της Σαρτρ καλλιεργήθηκε μια φιλελεύθερη σκέψη και μια ανοικτή μορφωτική συμπεριφορά, η οποία συνέχισε να ασκεί την επιρροή της και μετά την ακμή της αντίστοιχης σχολής, Για παράδειγμα, ο Ρότζερ Μπέϊκον[136] όταν ήταν νέος, γύρω στο 1245, δίδασκε φυσική φιλοσοφία σύμφωνα με την σχετική παράδοση της Σαρτρ. Η σχολή αυτή βρισκόταν ήδη σε επαφή με τα κέντρα μεταφραστών του Τολέδο της Ισπανίας και της Νότιας Ιταλίας. Κατά συνέπεια δεν είναι παράδοξο ότι στη Σαρτρ πρωτοέγιναν δεκτές με ενθουσιασμό η αστρονομία και η φυσική φιλοσοφία του Αριστοτέλη.[137] Όλα δείχνουν, λοιπόν, ότι δημιουργήθηκε στη Σαρτρ ένα επιστημονικό ενδιαφέρον, ένα πνεύμα αναζήτησης και μια τάση ανανέωσης του θεωρητικού λόγου, με μεγάλη απήχηση. Ήταν ωστόσο η παιδεία της δέσμια ενός είδους λογιοτατισμού, ενός δηλαδή αφ' υψηλού στοχασμού. Οπότε, στην καθεδρική σχολή της Σαρτρ αναπτύχθηκε μια λόγια παιδεία, η οποία ευνοούσε, όπως ήταν φυσικό, μόνο μια λόγια μαθηματική μόρφωση. Και όπως φαίνεται, η πραγματιστική διάσταση των Μαθηματικών, οι πρακτικές πλευρές της μαθηματικής κουλτούρας, παραμερίστηκαν και στην καλύτερη περίπτωση περιθωριοποιήθηκαν. Μέσα σε μια τέτοια μορφωτική συγκυρία η γνώση της *τεχνικής των αγνώστων* ήταν ασύμβατη με τη μαθηματική νοοτροπία που επικρατούσε στο συγκεκριμένο πλαίσιο μόρφωσης. Το πνευματικό πεδίο της Σαρτρ ήταν, με άλλα λόγια, άγονο για την καλλιέργεια της "πρακτικίστικης" μαθηματικής γνώσης των *Liber Algebrae*.

Στο Παρίσι το παλιρροιακό κύμα της μορφωτικής ανανέωσης ήταν εντονότερο και πιο απελευθερωτικό. Και αυτό γιατί αναπτύχθηκαν διάφορες "αποθεσμοποιημένες" μορφές μόρφωσης, δηλαδή κάποιες εκπαιδευτικές δυνατότητες ανεξάρτητες από το καθιερωμένο σχολικό σύστημα των καθεδρικών και μοναστηριακών ιδρυμάτων. Συγκεκριμένα υπήρχε μια ευρύτατη ελευθερία σε ανεξάρτητους καθηγητές να οργανώσουν τα δικά τους σχολεία. Μια ελευθερία η οποία ανταγωνίζονταν σθεναρά στους μονοπωλιακούς όρους για τη διδασκαλία,

---

[130] Bernard de Chartes (12ος αιώνας), καθηγητής της Σαρτρ.

[131] Βλ. Windelband, W.& Heimsoeth, H.: *Εγχειρίδιο Ιστορίας της Φιλοσοφίας*, τομ. Β΄, Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τραπέζης, 1982, σελ. 47.

[132] Thierry de Chartes (12ος αιώνας), καθηγητής της Σαρτρ, που δίδαξε λίγο αργότερα από τον αδελφό του, Μπερνάρ της Σαρτρ.

[133] Βλ. Crombie, A.C.: *Από τον Αυγουστίνο στον Γαλλιλαίο*, τομ. Α΄, Μορφωτικό Ίδρυμα εθνικής Τραπέζης, 1989, σελ. 48.

[134] Βλ. Windelband, W. & Heimsoetth, H.,πρ. παρ. 131, σελ. 47-48.

[135] Βλ. Stiefel, T.: The Hersy of Science: A Twelfth-Century Conceptual Revolution, *Isis*, 66, 1977, σελ. 347-362, ειδ. σελ. 354.

[136] Roger Bacon (13ος αιώνας), διακεκριμένος λόγιος αγγλικής καταγωγής που δίδαξε στα μέσα του 13ου αιώνα στο Παρίσι.

[137] Βλ. Crombie, A.C., πρ. παρ. 133, σελ. 51.

που ασκούσε η καθεδρική σχολή του Παρισιού, όπως η επιβολή οικονομικών υποχρεώσεων στους καθηγητές οι οποίοι ήθελαν να οργανώσουν δικά τους σχολεία. Οι νέοι καθηγητές παρέκαμπταν, κατά κανόνα, τους περιορισμούς αυτούς επιλέγοντας περιοχές των προαστίων που οι εκκλησίες τους ήταν αποδεσμευμένες από το έλεγχο του γραμματέα της καθεδρικής σχολής, όπως π.χ. τα αβαεία της Σεν Ζενεβιέβ και του Σεν Βικτόρ.[138]

Η θεσμική αντιπαλότητα και ο επαγγελματικός ανταγωνισμός προκάλεσαν ένα αντικομφορμιστικό πλαίσιο παιδείας και μια ανανεωτική δυναμική του περιεχομένου μόρφωσης. Πρόκειται για μια ιδιόρρυθμη κατάσταση αποθεσμοποιημένης παιδείας η οποία διατηρήθηκε μέχρι το 1170 περίπου.[139] Μια κατάσταση η οποία οφειλόταν στον κλονισμό του διδακτικού μονοπώλιου της εκκλησιαστικής εκπαίδευσης του Παρισιού και στις αντίστοιχες ευνοϊκές συνθήκες για μια χειραφετημένη παιδεία που επικρατούσαν, τότε, στη γαλλική πρωτεύουσα. Μια κατάσταση που ανάλογή της δεν παρατηρείται στη Σαρτρ.[140] Εκτός από αυτή τη διαφορά, το Παρίσι και η Σαρτρ είχαν πολύ διαφορετική κοινωνικο-πολιτική ανάπτυξη. Το Παρίσι είχε μια ραγδαία εξέλιξη το 12ο αιώνα, αντίθετα η Σαρτρ ενσωματώθηκε στην ευρύτερη περιοχή της Καμπανίας (Champagne) με πρωτεύουσα την Troyes και μειώθηκε σταδιακά τη σπουδαιότητά της, μετά το 1125.[141] Αυτή η απόκλιση των εξωτερικών συνθηκών της παιδείας είχε μια αντανάκλαση στα αντίστοιχα περιεχόμενα σπουδών και στους φιλοσοφικούς προσανατολισμούς.

Η παιδεία στη Σαρτρ ήταν μονοδιάστατη και περιορίζονταν μόνο στα πλαίσια της παρεχόμενης μόρφωσης της καθεδρικής της σχολής. Αντίθετα στο Παρίσι ήταν πολυδιάστατη, εκτός από την καθεδρική σχολή υπήρχαν αρκετοί ανεξάρτητοι καθηγητές που δίδασκαν σε δικές τους σχολές. Στη Σαρτρ οι σπουδές είχαν για βάση τις επτά Ελεύθερες Τέχνες, δηλαδή τη Γραμματική, τη Ρητορική, τη Λογική, την Αριθμητική, τη Μουσική, τη Γεωμετρία και την Αστρονομία, και με κύριο προσανατολισμό τη Θεολογία. Στο ίδιο πνεύμα ήταν και οι σπουδές στην καθεδρική σχολή του Παρισιού, ωστόσο υπήρχαν ανεξάρτητοι δάσκαλοι που δίδασκαν, εκτός από τις Ελεύθερες Τέχνες και τη Θεολογία, Νομικά, Κλασική Λογοτεχνία και Μαθηματικά[142]. Από φιλοσοφική άποψη η Σαρτρ[143] είχε μια πραγματοκρατική στάση[144], ενώ στο Παρίσι[145] είχε μια ριζοσπαστική παρουσία και η ονοματοκρατική τάση[146]. Επίσης, οι καθηγητές στο Παρίσι γνώριζαν τα *Αναλυτικά Ύστερα* του Αριστοτέλη από τα μέσα του 12ου αιώνα[147], αρκετά δηλ. νωρίς σε σχέση με τις μεταφράσεις του έργου, από τα αραβικά και τα ελληνικά, που έγιναν εκείνη την εποχή.

---

138 Βλ. Southern, R.W.: The Schools of Paris and the School o Chartres, στο *Benson, R.L. / Constable Giles (eds.): Renaissance and Renewal in the Twelfth Century*, Harvard University Press, 1982, σελ. 113-137, ειδ. σελ. 120-121.

139 Στο ίδιο, σελ. 114.

140 Στο ίδιο, σελ. 121.

141 Στο ίδιο, σελ. 119, 121.

142 Στο ίδιο, σελ. 130.

143 Βλ. Λε Γκοφ, Ζ., πρ. παρ. 35, σελ. 86.

144 Πραγματοκρατία ή ρεαλισμός είναι η φιλοσοφική εκείνη θεώρηση συμφωνα με την οποία οι γενικές έννοιες υπάρχουν πριν και ανεξάρτητα από τα συγκεκριμένα αντικείμενα και την ανθρώπινη νόηση. Μια θεώρηση που στηρίζεται, εν πολλοίς, στη θεωρία των ιδεών του Πλάτωνα.

145 Με πρωταγωνιστή τον Πιέρ Αμπελάρ (Pierre Abelard, 1079-1142), βλ. Μουτσόπουλου, Ε., πρ. παρ. 121, σελ. 33 και Crombie, A.C., πρ. παρ. 133, σελ.46.

146 Ονοματοκρατία ή νομιναλισμός είναι η φιλοσοφική θεώρηση που δεν υποστήριζε την αυθυπαρξία των γενικών εννοιών, αλλά ότι υπάρχουν μόνο τα μεμονωμένα αντικείμενα και οι γενικές έννοιες είναι γλωσσικά ονόματα που έχουν σχηματιστεί με αφαίρεση από τα ομοειδή αντικείμενα. Η θεώρηση αυτή είχε κάποια ερείσματα στη φιλοσοφία του Αριστοτέλη. Βλ. Νούτσου, Π.Χρ. : *Ο Νομιναλισμός. Οι κοινωνικοπολιτικές προϋποθέσεις της υστερομεσαιωνικής φιλοσοφίας*, εκδ. Κέδρος, 1980, σελ. 12 κ.ε.

147 Βλ. Weisheipl, J.A. : *The Development of Physical Theory in the Middle Ages*, The University of Mochigan Press, 1971, σελ. 23.

Το σημαντικότερο όμως γεγονός ήταν ότι πρόβαλε στο Παρίσι και μια πρακτική διάσταση των Μαθηματικών. Συγκεκριμένα ο Ιγκ του Σεν Βικτόρ[148] στο έργο του *Διδασκάλιον*[149] *(Didaskalion)*, που γράφτηκε γύρω στο 1125, διεύρυνε το περιεχόμενο μόρφωσης συναπαρτίζοντας μαζί με τις θεωρητικές επιστήμες, την πρακτική μάθηση και τις μηχανικές τέχνες. Το αξιοσημείωτο αυτής της παρέμβασης στη θεωρητικίζουσα, τότε, εκπαιδευτική αντίληψη είναι ότι υποστηρίχθηκε η σημασία της πρακτικής μόρφωσης από έναν συντηρητικό μοναχό, ο οποίος ήταν βαθιά προσηλωμένος στη νεοαυγουστίνεια ερμηνεία της *Βίβλου* και εκπρόσωπος του θρησκευτικού μυστικισμού[150]. Και μάλιστα ήταν αυτός που έγραψε, γύρω στο 1125-1130, το εγχειρίδιο: *Πρακτική Γεωμετρία (Practica Geometriae)*, στο στυλ της *Γεωμετρίας* του Ζερμπέρ ντε Ωρυγιάκ[151], το οποίο καθιερώθηκε, όπως φαίνεται, στη ρωμαιοκαθολική μαθηματική παιδεία του 12ου αιώνα[152]. Αξίζει να αναφερθεί ότι εκτός απ' αυτή την *Πρακτική Γεωμετρία* έχει διασωθεί και ένα ανάλογο γεωμετρικό κείμενο του 12ου αιώνα, το *Artis Cuiuslibet Consummatio*[153]. Και τα δύο αποτέλεσαν τους προπομπούς των αντίστοιχων εγχειριδίων του 13ου αιώνα, με προεξέχουσα την *Πρακτική Γεωμετρία* του Λεονάρντο Πιζάνο, γνωστός ως Φιμπονάτσι, που την έγραψε το 1220.

Οι *Πρακτικές Γεωμετρίες* του 12ου αιώνα σηματοδοτούν τη νομιμοποίηση του σχετικού μαθήματος στις σπουδές της περιόδου αυτής. Μια νομιμοποίηση που υποδηλώνει ένα νέο πνεύμα στη ρωμαιοκαθολική παιδεία της εποχής και εκφράζει μια γνωστική αλλαγή στην αντίστοιχη μαθηματική μόρφωση. Και είναι γεγονός ότι το είδος αυτό της μαθηματικής γνώσης ήταν πλήρως συμβατό με τα σχετικά μαθηματικά έργα που μεταφράστηκαν, τότε, στη Ισπανία. Πρόκειται δηλαδή για μια εξέλιξη της ρωμαιοκαθολικής μαθηματικής παιδείας που είχε μια επαρκή συνάφεια με το *Κιτάμπ αλ-τζαμπρ* του αλ-Χουαρίζμι. Κατά συνέπεια, η διάσταση αυτή της μαθηματικής εκπαίδευσης εξασφάλιζε μια καλή συνεκτικότητα με τα *Liber Algebrae*. Με άλλα λόγια, αποτελούσε ένα κατάλληλο πλαίσιο για την υποδοχή, την καλλιέργεια και την ανάπτυξη των υπολογιστικών μεθόδων και της *τεχνικής των αγνώστων* του Ισλαμικού Πολιτισμού.

Συνοπτικά μπορεί να απεικονιστεί η διείσδυση της ισλαμικής Άλγεβρας στη ρωμαιοκαθολική παιδεία του 12ου αιώνα ως μια εξωσωματική γονιμοποίηση με εμφανή τα σημάδια οργανικής δυστοκίας, όχι όμως απόρριψης.

20-9-2002

---

148 Hughes de Saint-Victor (1096-1141), καθηγητής της σχολής του Σεν Βικτόρ του Παρισιού.

149 Αρχαίος ελληνικός όρος, που σημαίνει θέμα διδασκαλίας, επιστήμη, τέχνη, βλ. Δορμπαράκη, Π.Χ. : *Επίτομον Λεξικόν της Αρχαίας Ελληνικής Γλώσσης*, Βιβλιοπωλείον της "Εστίας", 1984, σελ. 228.

150 Βλ. Debesse, M. / Mialaret, G. (επιμ.): *Παιδαγωγικές επιστήμες, τομ. 2 : Ιστορία της Παιδαγωγικής*, εκδ. "Δίπτυχο", 1982, σελ. 174. Επίσης βλ. Le Goff, J., πρ. παρ. 31, σελ. 463.

151 Βλ. Evans, G.R.: The "Sub-Euclidean" Geometry of the Earlier Middle Ages, up to the Mid-Twelfth Century, *Archive for History of Exact Sciences*, 16, 1976-77, σελ. 105-118, ειδ. σελ. 115.

152 Βλ. Nicholas, D., πρ. παρ. 121, σελ. 493.

153 Βλ. Victor, S.K. : *Practical Geometry in the High Middle Ages: Artis Cuiuslibet Consummatio and the Pratike Geometrie*, The American Philosophical Society, 1979, σελ. 108-471.