

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ARISTOTLE UNIVERSITY OF THESSALONIKI

Οι Εννοιολογικές Αλλαγές ως Συνιστώσα της
Σύγχρονης Ιστοριογραφίας των Μαθηματικών

ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΚΑΣΤΑΝΗΣ

Technical Report No 26



ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Οι Εννοιολογικές Αλλαγές ως Συνιστώσα της Σύγχρονης Ιστοριογραφίας των Μαθηματικών

N. Καστάνη

I. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην εισαγωγική παράγραφο των *Μαθημάτων Θεωρίας Πιθανοτήτων*, του Θ.Ν. Κάκουλλου, με τίτλο “σύνοψη της ιστορικής εξέλιξης της θεωρίας των πιθανοτήτων”, επισημαίνονται τα εξής:

“Τα μέγιστα συνέβαλεν εις την ανάπτυξιν του Λογισμού των Πιθανοτήτων ο Laplace (1749-1827) δια των έργων του *Theorie Analytique de Probabilites*, δημοσιευθέντος το 1812, και το πλέον εκλαϊκευμένου *Essai Philosophique sur les Probabilites*.

Η νεωτέρα ανάπτυξις της θεωρίας των Πιθανοτήτων χαρακτηρίζεται τόσον από ενδιαφέρον προς αυτήν ταύτην την θεωρίαν όσον και προς την κατεύθυνσιν διευρύνσεως των εφαρμογών αυτής. Σημαντική είναι η συμβολή των Ρώσων Μαθηματικών Chebyshev, Markov, Liapounov κατά το 19^ο αιώνα...Επίσης σημαντικάί είναι αι συμβολαί του 20^{ου} αιώνος υπό των Lindeberg, S. Bernstein, A. Kolmogorov, Khintchin και των εκπροσώπων της Γαλλικής Σχολής Emile Borel και Paul Levy. Η μετροθεωρητική θεμελίωσις των πιθανοτήτων οφείλεται κυρίως εις τον Kolmogorov. Η εμπειρική ή Στατιστική ερμηνεία της πιθανότητος οφείλεται εις τον R. Von Mises, εις τον οποίον οφείλεται και η έννοια του δειγματοχώρου (Merkalraum) καθώς και εις τον πατέρα της Στατιστικής επιστήμης R.A Fisher. Η φιλοσοφική θεώρησις της πιθανότητος και η ερμηνεία ταύτης ως «βαθμού πίστεως» ανεπτύχθη κυρίως υπό του Sir Harold Jeffreys εις το σύγγραμμά του *Scientific Inference*, Oxford, 1939.” (Αθήναι, 1969, σελ. xv-xvi)

Ανάλογες προσεγγίσεις στην Ιστορία των Μαθηματικών, όπου δίνεται επιγραμματική έμφαση στους πρωτοπόρους μαθηματικούς με τα επιτεύγματά τους, παρατηρούνται και σε άλλες χρονογραφικές περιγραφές, κυρίως σε εισαγωγικά σημειώματα πανεπιστημιακών εγχειριδίων (π.χ. βλ. Apostol, T. M.: *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*, τόμος II, εκδόσεις Μ. Πεχλιβανίδης, σελ. 20).

Το 1985, δύο δεκαετίες αργότερα, από την πρωτο-εμφάνιση των *Μαθημάτων Θεωρίας Πιθανοτήτων* του Θ. Κάκουλλου, δημοσιεύτηκε ένα αντίστοιχο ιστορικό σημείωμα, με διαφορετική όμως θεώρηση, όπου θίγονται τα εξής:

“Για να μπορέσει να καταλάβει κανείς σε βάθος, έναν κλάδο της επιστήμης, είναι απαραίτητο να μάθει την ιστορία του. Εννοούμε την ιστορία των ιδεών και όχι βιογραφικές «λεπτομέρειες» των επιστημόνων που το ανέπτυξαν. Τα σύγχρονα βιβλία δίνουν «ωραιοποιημένα» παραμορφωμένη εικόνα. Όλα είναι γραμμένα με τάξη, έχουν

εξομαλυνθεί όλες οι δυσκολίες. Σήμερα, θεμελιώνουμε την θεωρία των Πιθανοτήτων, με τα αξιώματα του A.N. Kolmogorov (1933)... Τα αξιώματα και οι πρώτες συνέπειές τους φαίνονται πολύ στρωτά, σχεδόν προφανή. Η εξωτερική αυτή ηρεμία κρύβει τον αγώνα πολλών γενεών Μαθηματικών για να φθάσουν μέχρι αυτό το σημείο, και το κυριότερο, κρύβει το βαθύτερο νόημα αυτών των αξιωμάτων, την σύνδεση τους με τον κόσμο που μας περιβάλλει, και την οργανική τους θέση μέσα στον κορμό της Μαθηματικής Επιστήμης αλλά και ως ανθρώπινης γνώσης γενικότερα.”¹

Και την ίδια περίοδο, στο αξιοσημείωτο συλλογικό έργο με τίτλο *Probabilistic Revolution*, διατυπώνεται η εξής, σχετική, ιστοριογραφική έμφαση:

“[Μια ολομορφική (gestalt) στροφή] εκδηλώθηκε με την αλλαγή από το παράδειγμα του Laplace στα σύγχρονα θεμέλια της εφαρμοσμένης πιθανότητας με βάση τη συχνότητα.”²

Παρατηρώντας αυτά τα δύο είδη ιστορικής προσέγγισης, γίνεται φανερό πως, το μεν προγενέστερο περιορίζεται σε μια καταγραφή κάποιων επιφανών μαθηματικών και συγγραμμάτων, τα οποία αποτέλεσαν σημεία αναφοράς στην ανάπτυξη της Θεωρίας Πιθανοτήτων, στο δε μεταγενέστερο εμφανίζεται η σύγχρονη αντίληψη της Ιστορίας των Επιστημών (αλλά και ο σύγχρονος τρόπος κατανόησης της ίδιας της επιστημονικής γνώσης), σύμφωνα με την οποία η ιστορική ανέλιξη των επιστημών, των Πιθανοτήτων εν προκειμένω, προϋποθέτει κάποιους αγώνες, δηλ. κάποιες “έντονες προσπάθειες για την αντιμετώπιση δυσχερειών, την επικράτηση επί αντιπάλων ή την επιτυχία κάποιου σκοπού”³. Διαφαίνεται ότι, για την ιστορική επίγνωση ενός επιστημονικού κλάδου, δεν αρκεί η επίκληση μιας γραμμικής ακολουθίας των διάσημων πρωταγωνιστών του, μαζί με τα “τρόπαιά” τους. Χρειάζεται να συνειδητοποιηθούν οι επιδιώξεις, οι δυσχέρειες, οι υπερβάσεις, οι συμπαραστάσεις, οι αποδοχές και οι αντιπαλότητες τους.

Ο αναπροσανατολισμός αυτός, απηχεί τις ανανεωτικές τάσεις στην επιστημολογία και την ιστοριογραφία των Μαθηματικών (και της επιστήμης γενικότερα). Πρόκειται για τις τάσεις που αναπτύχθηκαν, από τη δεκαετία του 1960 και μετά, με πρωτοπόρους τον Thomas Kuhn (1922-1996) και τον Imre Lakatos (1922 -1974).⁴ Για τη φύση της ώθησης, που δόθηκε, από τότε, στα Μαθηματικά, πολύ χαρακτηριστικά επισημαίνονται τα εξής:

¹ Παπασταυρίδης Σ.: Πιθανότητα: Ιστορία, Θεωρία και Πράξη, *Ευκλείδης Γ'*, Τεύχος 10, 1985-86, σελ. 9-19, ειδ. σελίδα 9.

² Kamlah, A.: The Decline of the Laplacian Theory of Probability: A Study of Stumpf, von Kries, and Meinong στο [Krüger, L. et al \(eds.\): The Probabilistic Revolution](#), The MIT Press, 1987, vol.1, σελ.92.

³ Μείζον Ελληνικό Λεξικό Τεγόπουλου-Φυτράκη, σελ. 18.

⁴ Βλ. Shapiro, S.: *Σκέψεις για τα Μαθηματικά. Η Φιλοσοφία των Μαθηματικών*, εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, 2006, σελ. 51 και 56, Καστάνης, Ν.: Ένα γεγονός που δεν πρέπει να περάσει απαρατήρητο, *Διάσταση*, 3-4, 1995, σελ. 65-68, Νικολαντωνάκης, Κ.: Η Μεθοδολογία της Ιστορίας των Μαθηματικών υπο το Πρίσμα της Επιστημολογίας του T.S. Kuhn, *Διάσταση*, 3-4, 1995, σελ. 69-96, Glas, E.: Kuhn, Lakatos, and the Image of Mathematics, *Philosophia Mathematica*, 3, 1995, pp. 225-247 και Orton, R.E.: Two theories of “theory” in mathematics education: using Kuhn and Lakatos, *For the Learning Mathematics*, 8(2), 1988, pp. 36-43.

“ Ο νέος άνεμος που φυσά στη φιλοσοφία υπόσχεται να δώσει νέα πνοή στην ιστορία των μαθηματικών. Οπλισμένος με την αναγνώριση ότι τα μαθηματικά είναι πιο πάνω κι απ' την απόλυτη αλήθεια (που συναντούν τα μάτια των θεμελιωτών), ο ιστορικός έχει μια ολοκαίνουργια ήπειρο να εξερευνήσει . Τα μαθηματικά του παρελθόντος, ουσιαστικά, δεν θίχτηκαν από τα είδη των μελετών που η ημι-εμπειρική προσέγγιση τα έκανε κατάλληλα.. Έρευνες των εθνομαθηματικών, αξιοποιήσεις της θεωρίας πρόσληψης, μελέτες ερευνητικών σχολών και προγραμμάτων, αναλύσεις διαφόρων κοινωνικών δομών και η συσχέτισή τους με διάφορα είδη μαθηματικών έργων που έχουν παραχθεί —όλα αυτά τα ζητήματα αποτελούσαν ενοχλητικές αναταράξεις στη συνέχεια της καθιερωμένης ιστορίας. Ιστορίες, που σέβονται την ακεραιότητα των μυημένων εμπειριών σε όλη τους την ποικιλία, δεν έχουν ακόμη πραγματοποιηθεί.”⁵

Οι νέες ιδέες δεν επηρέασαν, μόνο, την επιστημονική νοοτροπία, ούτε αξιοποιήθηκαν, μόνο, στις φιλοσοφικές, ιστορικές και εκπαιδευτικές ζυμώσεις, αλλά αναπτύχτηκαν και αυτές οι ίδιες. Έτσι από τα τέλη της δεκαετίας του 1970, οι αρχικές ιδέες του Kuhn, για ριζοσπαστικές αλλαγές των επιστημονικών “παραδειγμάτων” και των σημασιών των επιστημονικών όρων, αναπροσανατολίστηκαν προς τις επιστημονικές μετεξελίξεις των εννοιολογικών δομών και τις εννοιολογικές αλλαγές.⁶ Ήταν μια επιστημολογική εξέλιξη, μια δυναμική, στην οποία καταλυτικό ρόλο έπαιξαν, αρχικά, κάποιοι φιλόσοφοι της επιστήμης, που ανέπτυξαν ιδέες παράπλευρες μ' αυτές του Kuhn, όπως ο Paul Feyerabend (1924-1994)⁷, ο Stephen Toulmin και ο Imre Lakatos⁸. Κι από τη δεκαετία του 1980, το ενδιαφέρον για το εννοιολογικό υπόβαθρο της επιστημονικής ανάπτυξης προωθήθηκε, σημαντικά, με τη δυναμική της Γνωστικής Επιστήμης (Cognitive Science).

Οι επιστημολογικές αυτές ιδέες, άρχισαν να διεισδύουν στα Μαθηματικά, τη δεκαετία του 1980. Στη διεργασία αυτή, καταλυτικό ρόλο έπαιξε η δημοσίευση των εξής, αξιοσημείωτων, βιβλίων: 1) Davis, P. & Hersh, R.: *The Mathematical Experience (Η Μαθηματική Εμπειρία)*, Birkhauser, 1980, 2) Kitcher, P.: *The Nature of Mathematical Knowledge (Η Φύση της Μαθηματικής Γνώσης)*, Oxford University Press, 1984, 3) Tymoczko, T. (ed.): *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, Birkhauser (*Νέες Κατευθύνσεις στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών*), 1986, 4) Ernest, P.: *The Philosophy of Mathematics Education (Η Φιλοσοφία της Μαθηματικής*

⁵ Βλ. Richards, J.L.: Review of Tymoczko, Thomas (editor) *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, *Isis*, 80, 1989, pp. 669-672, spec. ref. p. 672.

⁶ Αξίζει να σημειωθεί ότι η στροφή αυτή του επιστημολογικού ενδιαφέροντος προς το εννοιολογικό περιεχόμενο της επιστημονικής γνώσης δεν ήταν ανεξάρτητη από την αποτυχία του τυποκρατικού (φορμαλιστικού)δομισμού, της μεταρρυθμιστικής έκρηξης του 1960, να γίνει κατανοητός και να μετουσιωθεί ως ένας νέος τρόπος επιστημονικής σκέψης.

⁷ Βλ. Hickey, T.J.: *History of Twentieth-Century Philosophy of Science*, Publ. by T.J. Hickey, 2005 (1995), p 304, 343

⁸ Βλ. Confrey, J.: Conceptual change Analysis: Implications for Mathematics and Curriculum, *Curriculum Inquiry*, 11(5), 1981, pp. 243-257, spec. ref. p.245, Καστάνης Ν.: Η ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών, από τη σκοπιά των «Εννοιολογικών Αλλαγών», Δεκέμβριος 2006, http://users.auth.gr/~nioka/Files/anaptiksi_math_enoion.pdf, σελ. 3-4.

Παιδείας), Falmer, 1991 και 5) Gilles, D.(ed.): *Revolutions in Mathematics* (Επαναστάσεις στα Μαθηματικά), Oxford University Press, 1992.

Μετά τις γενικές αυτές νύξεις για τις εννοιολογικές αλλαγές στα Μαθηματικά, δημιουργείται η ανάγκη κάποιων πειστικών παραδειγμάτων, για να γίνουν αποδεκτές οι προηγούμενες επιστημονικές. Για το σκοπό αυτό, θα αναφερθούν τρία χαρακτηριστικά παραδείγματα, από τη σύγχρονη ιστορία των Μαθηματικών.

1. Στην ιστορία των Πιθανοτήτων, έχει αποκαλυφθεί ότι η προσθετική ιδιότητα (ή το προσθετικό αξίωμα) των πιθανοτήτων δεν ήταν αναγκαία προϋπόθεση από την αρχή της ανάπτυξης της Θεωρίας Πιθανοτήτων. Γεγονός που γίνεται φανερό, για παράδειγμα, στις σχετικές μελέτες του Jacob Bernoulli (1654-1705) και του Johann Heinrich Lambert (1728-1777).⁹ Αυτό σημαίνει ότι η έννοια της πιθανότητας, κάποια χρονική περίοδο, άλλαξε και απέκτησε την προσθετική της παραδοχή. Φαίνεται ότι ο Thomas Bayes (1702-1761), ο Marie Jean [Condorcet](#) (1743-1794) και ο Pierre-Simon [Laplace](#) (1749-1827) χρησιμοποιούσαν, σιωπηλά, την προσθετική παραδοχή των πιθανοτήτων κι ότι από τον Augustus De Morgan (1806-1871) και μετά, καθιερώθηκε.¹⁰
2. Σύγχρονες ιστορικές μελέτες έδειξαν ότι μέχρι τον Euler, περίπου, θεωρούσαν τον αριθμό ως το αποτέλεσμα μιας μέτρησης. Από το 1820 και μετά, ο αριθμός άρχισε να αντιμετωπίζεται ως ένα εκπεφρασμένο στοιχείο ενός συστήματος αριθμητικών πράξεων, που αναπτύχθηκε από τα τέλη του 19^{ου} αιώνα.¹¹ Αυτή ήταν μια πολύ σημαντική αλλαγή της έννοιας του αριθμού, αλλά και των Μαθηματικών γενικότερα.
3. Στην ιστορία της γεωμετρικής σκέψης, οι Μη-Ευκλείδειες Γεωμετρίες αποτέλεσαν μια “εκ βάθρων αναθεώρηση ολόκληρου του αντικειμένου της”¹². Στο πλαίσιο αυτό, η έννοια του χώρου άλλαξε. Μεταλλάχθηκε από μια εμπειρική, κατά βάση, αντίληψη του ευκλείδειου χώρου, σε μια αφηρημένη θεώρηση των γεωμετρικών σχέσεων της κάθε μη-ευκλείδειας θεωρίας.¹³ Με άλλα λόγια “η διαδεδομένη άποψη που προέκυπτε από την περιορισμένη αίσθηση της εμπειρίας, ότι η γεωμετρία του Ευκλείδη αποτελούσε μια a priori [προϋπάρχουσα] αλήθεια για το σύμπαν... ήταν το μοναδικό μοντέλο για το φυσικό χώρο”, “κατάρρευσε, στις αρχές του

⁹ Βλ. Shafer, G.: Non-Additive Probabilities in the Work of Bernoulli and Lambert, [Archive for History of Exact Sciences](#), 19(4), 1978, pp. 309-370. Βλ. επίσης Basili, M. & Zappia, C.: Keynes’s “non-numerical” probabilities and non-additive measures, [Journal of Economic Psychology](#), 30(3), 2009, pp. 419-430.

¹⁰ Βλ. Shafer, G, πρ. παρ. σελ. 362.

¹¹ Βλ. Βερυκάκη, Α. & Καστάνη, Ν.: Εννοιολογικές Αλλαγές: Μια αναβάθμιση του διδακτικού ρόλου της Ιστορίας των Μαθηματικών, στο βιβλίο *Ιστορία & Μαθηματική Εκπαίδευση*, επιμ. Θωμαΐδης, Γ., Καστάνης, Ν., Τζανάκης Κ., εκδόσεις Ζήτη, 2006, σελ. 213-232, ειδ. σελ. 228-232. Βλ. επίσης Καστάνης Ν.: Η ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών, από τη σκοπιά των «Εννοιολογικών Αλλαγών», Δεκέμβριος 2006, http://users.auth.gr/~nioka/Files/anaptiksi_math_enoion.pdf

¹² Βλ. Osserman, R.: *Η Ποίηση του Σύμπαντος*, εκδόσεις Κάτοπτρο, 1998, σελ. 89.

¹³ Βλ. Kastanis, N.: *The Concept of Space before and after the Non-Euclidean Geometries: An Approach for Didactic Reasons*, Ζητήματα Ιστορίας των Μαθηματικών [του Ομίλου για την Ιστορία των Μαθηματικών] No 12, July 1988, σελ 15.

δέκατου ένατου αιώνα,” με “την ανακάλυψη των μη-ευκλείδειων γεωμετριών”, όπου η γεωμετρία έγινε αφηρημένη.¹⁴

Με τις επισημάνσεις αυτές, άρχισε να διαφαίνεται η ύπαρξη εννοιολογικών αλλαγών στην ιστορική πορεία των Μαθηματικών. Δεν είναι, όμως, καθόλου αυτονόητη η φύση, η σημασία και η δυναμική της ανάδειξης αυτών των αλλαγών, για να συνειδητοποιηθεί η ουσία του μαθηματικού γίνεσθαι. Στην προοπτική αυτή, είναι απαραίτητη μια επιστημολογική διεξόδυση στο υπόβαθρο των εννοιολογικών αλλαγών, για να γίνουν ανάγλυφες οι υποκείμενες συνιστώσες τους και να αναδειχθούν οι σημαντικότερες πλευρές της υποδομής τους. Έτσι μπορεί να δοθεί η δυνατότητα να κατανοηθεί η ιστορία των Μαθηματικών, από τη σκοπιά των εννοιολογικών αλλαγών. Με άλλα λόγια, μπορεί να δοθεί η δυνατότητα μιας νέας ιστοριογραφικής αντίληψης των Μαθηματικών, με επίκεντρο τις εννοιολογικές αλλαγές. Για το σκοπό αυτό, δύο ερωτήσεις που μπορούν να προσανατολίσουν την προσπάθεια προς έναν μεθοδολογικό εκσυγχρονισμό της ιστορικής κατανόησης των Μαθηματικών με υπόστρωμα τις εννοιολογικές αλλαγές, είναι οι εξής:

1. Τι χαρακτηρίζει τις εννοιολογικές αλλαγές και ποιος ο ρόλος τους στη μαθηματική σκέψη; και
2. Ποια η σημασία τους στην ιστοριογραφία των Μαθηματικών;

II. ΤΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΚΑΙ Η ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΩΝ ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΩΝ ΑΛΛΑΓΩΝ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί ότι, από τη δεκαετία του 1980, το ζήτημα των εννοιολογικών αλλαγών άρχισε να έχει μια αυξανόμενη απήχηση στη Φιλοσοφία, την Ιστορία και τη Διδακτική των Επιστημών. Τα τελευταία χρόνια, το σχετικό ενδιαφέρον διευρύνθηκε σημαντικά και οι αντίστοιχες μελέτες και έρευνες αναπτύχθηκαν ραγδαία. Σήμερα, οι συγκεκριμένες ιδέες επηρεάζουν, ολοένα και περισσότερο, ένα ευρύ φάσμα της Επιστημολογίας, της Γνωστικής Ψυχολογίας και της Εκπαιδευτικής Θεωρίας.¹⁵

Μια πρώτη ανίχνευση στη σχετική βιβλιογραφία, θα αποκαλύψει ότι υπάρχουν θεωρητικές και μεθοδολογικές αποκλίσεις.¹⁶ Κι αυτό είναι, λίγο-πολύ, αναμενόμενο. Δημιουργεί, ωστόσο, μια ανάγκη κάποιων βασικών διευκρινίσεων και επισημάνσεων για να συνειδητοποιηθεί η φύση και η σημασία των εννοιολογικών αλλαγών.

Η πρώτη, άμεση κι αυθόρμητη, αντίληψη της φράσης “εννοιολογικές αλλαγές” προέρχεται από μια λεκτική και ετυμολογική ευαισθητοποίησή της. Έτσι, μια

¹⁴ Βλ. Davis, P.J. & Hersh, R.: *Η Μαθηματική Εμπειρία*, εκδόσεις Τροχαλία, [1991], σελ. 300-301.

¹⁵ Λ.χ. οι σχετικές δημοσιεύσεις που εμφανίζονται στη συλλογή των επιστημονικών περιοδικών του *JSTOR Archive* έχουν την εξής κατανομή: 118 άρθρα την εικοσαετία 1971-1990 και 378, τη δεκαπενταετία 1991-2005. Η ποσοτική αυτή διαφορά αποτελεί ένα δείκτη της δυναμικής του συγκεκριμένου επιστημονικού ενδιαφέροντος.

¹⁶ Βλ. Vosniadou, S. and Verschaffel, L.: Extending the conceptual change approach to mathematics learning and teaching, *Learning and Instruction*, 14, 2004, σελ 445-451, ειδ. σελ. 446-7.

λεκτική απλούστευσή της θα μπορούσε να είναι η φράση “αλλαγές των εννοιών”, ή, πιο προσδιοριστικά, η φράση “αλλαγές των επιστημονικών εννοιών”. Συντακτικά, φαίνεται ότι οι “έννοιες”, οι “επιστημονικές έννοιες”, αποτελούν το αντικείμενο και οι “αλλαγές”, την επενέργεια που αυτό υφίσταται. Και ετυμολογικά, η “έννοια” απηχεί την “αντίληψη του περιεχομένου ενός πράγματος ή φαινομένου, του νοήματός του, της σημασίας του”¹⁷ και η “αλλαγή” σηματοδοτεί “την μεταβολή, την μετατροπή, την αντικατάσταση”¹⁸.

Είναι αλήθεια ότι στο απολυτοκρατικό περιβάλλον των Μαθηματικών, το οποίο επικρατεί στον επιστημονικό αυτό χώρο, οι αναφορές και οι προσεγγίσεις στο υπόβαθρο των εννοιών, δεν ευδοκίμούν. Παρ’ όλα αυτά μπορούν να βρεθούν κάποιες σχετικές νύξεις, ίσως και κάποιες επισημάνσεις. Μια τέτοια περίπτωση, που δίνει και μια αφορμή για προβληματισμό ή διεισδυση στο συγκεκριμένο θέμα, είναι το εξής ερώτημα:

“Είναι οι φυσικοί αριθμοί και οι βασικές γεωμετρικές έννοιες δημιουργήματα του νου μας, ή, μήπως, είναι μορφές που ενυπάρχουν στην φύση ανεξάρτητα από την σκέψη μας;”¹⁹

Ένα ερώτημα, που προέρχεται, όχι από έναν καθαρά φιλοσοφικό στοχασμό, αλλά από μια μαθηματική θεώρηση, εμφορούμενη από ένα διεπιστημονικό πνεύμα επιστημολογικών συστατικών, γνωστικο-ψυχολογικών στοιχείων και ιδεών της τεχνητής νοημοσύνης.²⁰ Οι επιστημονικές έννοιες, στην προκειμένη περίπτωση, προσεγγίζονται με δύο τρόπους. Ο πρώτος δίνει μια φιλοσοφική έμφαση στη νοησιαρχική εκδοχή προβάλλοντας:

- 1) τις υπερβατικές Ιδέες του Πλάτωνα (και των οπαδών του), όπου “οι ακέραιοι αριθμοί ή τα γεωμετρικά σχήματα είναι, ..., όχι φυσικά και υλικά αντικείμενα, αλλά υπάρχουν ... αιώνια έξω από το χώρο και τον χρόνο σ’ έναν άυλο κόσμο, ... τον ...κόσμο των ιδεών”²¹,
- 2) τις έμφυτες ιδέες του Kant, όπου ο “χώρος και ο χρόνος δεν είναι έννοιες που προκύπτουν από την εμπειρία, αλλά αποτελούν ένα εκ των προτέρων δοσμένο πλαίσιο μέσα στο οποίο τοποθετούμε τις εμπειρίες μας ” και πιο ειδικά, “η a priori υπάρχουσα ενόραση ή διαίσθηση του χώρου ταυτίζεται ... με τον Ευκλείδειο χώρο, ενώ θεωρεί[ται] [ο] χρόνο[ς] ως πηγή της έννοιας των φυσικών αριθμών ”²², και
- 3) τα “κατασκευάσματα του νου μας”, σύμφωνα με τους φορμαλιστές, όπου “οι φυσικοί αριθμοί είναι ... κατασκευάσματα του νου μας, οριζόμενα από ένα [συγκεκριμένο] σύστημα αξιωμάτων. ... [Τ]α Μαθηματικά (άρα και οι γεωμετρικές έννοιες) είναι μια λογική μελέτη ορισμένων αρχικών τύπων, των

¹⁷ Λεξικό της Δημοτικής, της Εταιρείας Ελλ. Εκδόσεων, σελ. 224.

¹⁸ Στο ίδιο, σελ. 29.

¹⁹ Βλ. Κιουστελίδη, Ι. Β.,: Οι παράξενες ιδιότητες των αξιωματικών συστημάτων και η Διαίσθηση. Ή: Ξέρουμε, τελικά, τι είναι φυσικοί αριθμοί; http://www.math.ntua.gr/~jqstel/axiomatika_systimata.pdf, σελ. 1.

²⁰ Βλ. παράλληλα με την προηγούμενη εργασία και το βιβλίο του ίδιου συγγραφέα Κιουστελίδη, Ι.Β.: *Ο Μηχανισμός της Νόησης. Εξελικτικές πλευρές της σκέψης και της φύσης των εννοιών*, εκδόσεις Παπασωτηρίου, 2002.

²¹ Στο ίδιο, σελ. 446.

²² Βλ. πρ. παρ. 5, σελ. 2.

«αξιωματών» του συστήματος, που επιλέγονται αυθαίρετα χωρίς οποιαδήποτε [υποχρεωτική] εξωτερική αναγκαιότητα.”²³

Ο δεύτερος τρόπος προσέγγισης ακολουθεί την Αναπτυξιακή Ψυχολογία, σύμφωνα με την οποία “οι έννοιες δεν είναι έμφυτες στον άνθρωπο, αλλά [ο άνθρωπος έχει την] ικανότητα να τις δημιουργεί σταδιακά.”²⁴ Από τη σκοπιά αυτή, “η έννοια «ακέραιος αριθμός» δεν είναι μια απλή οντότητα ή παράσταση, αλλά έχει διάφορες πλευρές που γίνονται κατανοητές μονό σταδιακά.”²⁵ Στην προκειμένη περίπτωση, αξιοσημείωτη είναι και η συσχέτισή της με τη γνωστική συνιστώσα της Ψυχολογίας²⁶ και με κάποιους εκπροσώπους της, όπως π.χ. τη Στέλλα Βοσνιάδου²⁷. Μια επισήμανση, που δίνει τη δυνατότητα να φωτιστούν και κάποιες άλλες θεωρητικές διαστάσεις των εννοιών—και ειδικότερα των επιστημονικών εννοιών.

Μ’ αφορμή τη νύξη αυτή, στη Γνωστική Ψυχολογία και τους εκπροσώπους της, μπορεί να διαπιστωθεί μια άλλη φιλοσοφική αντίληψη για τις έννοιες, αρκετά σημαντική, η οποία, ωστόσο, δεν έτυχε της προσοχής στις προηγούμενες εκδοχές του θέματος. Πρόκειται για την *κλασική άποψη*, σύμφωνα με την οποία “οι έννοιες” περιγράφονται “ως ένα σύνολο αναγκαίων και επαρκώς καθοριστικών γνωρισμάτων που ορίζουν σαφώς ποιες περιπτώσεις ανήκουν σε μια δοσμένη κατηγορία και ποιες όχι.”²⁸ Αυτή η αντίληψη, που έχει τις ρίζες της στον Αριστοτέλη, στηρίζεται, σε μεγάλο ποσοστό, σ’ ένα εμπειρικό υπόστρωμα.²⁹ Πιο συγκεκριμένα, οι έννοιες θεωρούνται ότι αποτελούν γενικεύσεις εμπειρικών αντικειμένων με κάποια κοινά γνωρίσματα. Με άλλα λόγια, οι έννοιες, σύμφωνα με την *κλασική άποψη*, προέρχονται από εμπειρικές γενικεύσεις. Στην προκειμένη περίπτωση, η έννοια του φυσικού αριθμού, αποτελεί ένα αντιπροσωπευτικό παράδειγμα εμπειρικής γενίκευσης. Έτσι, ο αριθμός 7 προκύπτει από την επισήμανση του κοινού ποσοτικού γνωρίσματος των επτά τραπεζιών, ισάριθμων καρεκλών, μολυβιών κ.τ.λ. Αυτό σημαίνει ότι, από τα ισάριθμα εμπειρικά αντικείμενα διακρίνεται το κοινό τους χαρακτηριστικό, που εκφράζει η ισάριθμη ποσότητά τους, κι αυτή η διάκριση είναι μια εμπειρική γενίκευση η οποία προσδιορίζει τον αντίστοιχο φυσικό αριθμό.³⁰

Ένα άλλο παράδειγμα είναι η έννοια του γεωμετρικού χώρου, που μπορεί να χαρακτηριστεί ως εμπειρική, στην ιστορική περίοδο πριν την αξιωματική συστηματοποίηση της Γεωμετρίας.³¹ Κι αυτό γιατί αποτελούσε, σύμφωνα με μια εκδοχή, εμπειρική γενίκευση των τόπων (δηλ. των περιοχών), όπου βρίσκονται και

²³ Βλ. πρ. παρ. 6, σελ. 448-449.

²⁴ Βλ. πρ. παρ. 5, σελ. 10.

²⁵ Βλ. πρ. παρ. 6, σελ. 451.

²⁶ Στο ίδιο, κεφ. 4.

²⁷ Βλ. πρ. παρ. 5, σελ. 16.

²⁸ Βλ. Βοσνιάδου Σ.: Γνωστική Ψυχολογία, εκδόσεις Gutenberg, 1998, σελ. 11-12.

²⁹ Βλ. Φαγουκί, Ν.: *Πίστη και Λογική*, εκδοτικός οίκος Π. Τραυλός-Ε. Κωσταράκη, 1997, σελ. 41-44.

³⁰ Βλ. Πολυδούρη Β.: *Η αριθμητική των ακεραίων*, Μέρος πρώτον, εκδ. Κυριακίδη, 1995, σελ. 19, και Ξανθόπουλου, Β.Κ.: *Τα Μαθηματικά στη Φυσική, Μαθηματική Επιθεώρηση*, 27, 1984, σελ. 95-112, ειδ. σελ. 110. Επίσης βλ. Χασάπη, Δ.: *Διδακτική Βασικών Μαθηματικών Εννοιών. Αριθμοί και Αριθμητικές Πράξεις*, εκδ. Μεταίχμιο, 2000, σελ. 16-17, 19 και 70.

³¹ Βλ. Damerow, P.: *The Material Culture of Calculation*, στο Gellert, U. and Jablonka, E. (eds.): *Mathematisation and Demathematisation, Social, Philosophical and Educational Ramifications*, Sense Publ., 2007, σελ. 19-56, ειδ. σελ. 28.

οροθετούνται τα φυσικά και γεωμετρικά αντικείμενα. Όμοια, και η έννοια της πιθανότητας ήταν εμπειρικής φύσης, στην πρώτη της ιστορική περίοδο. Οι πρωτοπόροι επιστήμονες, που ασχολήθηκαν με την ιδέα αυτή, αντιμετώπισαν την πιθανότητα ενός ενδεχόμενου ως μια ποσοτική εκτίμηση (με τη μέση τιμή) της επιλογής του συγκεκριμένου ενδεχόμενου, από ένα πλήθος διαφορετικών σχετικών εκβάσεων, με πειράματα τύχης.³² Δηλαδή, η εκτίμηση αυτή έγινε με τη βοήθεια μιας ακολουθίας αυξανόμενου πλήθους δοκιμών της ίδιας επιλογής, όπου υπολογιζόταν το εκάστοτε ποσοστό εμφάνισης του υπό εξέταση ενδεχόμενου κι έτσι μπορούσε να σταθμισθεί η γενικότερη ποσοτική συμπεριφορά της επιλογής του, στις πολλαπλές επαναλήψεις της. Στην προκειμένη περίπτωση, η πιθανότητα ενός ενδεχόμενου προέκυπτε ως μια γενίκευση των ποσοστών έκβασης του συγκεκριμένου ενδεχόμενου από τα αντίστοιχα πειράματα τύχης. Το κοινό εμπειρικό χαρακτηριστικό, σ' αυτά τα πειράματα τύχης, ήταν η οριακή εγγύτητα των ποσοστών έκβασης του υπό εξέταση ενδεχόμενου.³³

Με την ευκαιρία της αναφοράς στις εμπειρικές έννοιες, που εμπεριέχονται στο εννοιολογικό παρασκήνιο των Μαθηματικών και των άλλων επιστημονικών κλάδων, αξίζει να σημειωθεί ότι όλος ο τρόπος σκέψης στην καθημερινή ζωή αναπτύσσεται και οργανώνεται με βάση αυτού του είδους τις έννοιες. Ωστόσο, δεν αποτελούν την αποκλειστική “πρώτη ύλη” της επιστημονικής σκέψης. Επισημάνθηκε, σχετικά, ότι “η κλασική άποψη για τις έννοιες έχει αμφισβητηθεί κάνοντας χρήση του επιχειρήματος ότι ορισμένες έννοιες δεν είναι δυνατόν να περιγραφούν με βάση αναγκαία και επαρκή γνωρίσματα.”³⁴ Κι όπως έδειξαν κάποιες επιστημολογικές αναλύσεις, μια από τις πιο δημιουργικές συνιστώσες της επιστημονικής ανάπτυξης είναι οι θεωρητικές έννοιες, δηλ. το είδος εκείνο των εννοιών που δεν προέρχονται από εμπειρικές γενικεύσεις.³⁵

Σχετικά με τις θεωρητικές έννοιες, δύο αναφορές, από την “ελληνική” βιβλιογραφία, μπορούν να βοηθήσουν στη διείσδυση και τη συνειδητοποίησή τους. Η πρώτη, από το περιοδικό *Διάσταση*, όπου σημειώνονται, μ' αφορμή τη μόρφωση των μαθηματικών της εκπαίδευσης, τα εξής:

³² Βλ. Gillies, D.: *Philosophical Theories of Probability*, Routledge, 2000, σελ. 10. Επίσης, βλ. Steinbring, H.: Use of the Chance Concept in Everyday Teaching, στο Vere-Jones, David (Ed.): *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics, Vol. 1: School and general issues*, Voorburg, 1991, σελ. 329-337, ειδ. σελ. 330 κ.ε.

³³ Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι ο πειραματικός προσδιορισμός της πιθανότητας να εμφανιστεί κεφαλή, κατά τη ρίψη ενός κέρματος, όπου δοκιμάζονται και υπολογίζονται τα αντίστοιχα ποσοστά: για 25 ρίψεις (ποσοστό κεφαλών 0,5600), για 50 (0,5400), για 100 (0,5400), για 500 (0,4760), για 1.000 (0,4900), για 10.000 (0,4958) και για 100.000 (0,5021) [βλ. Evertt, B.S.: *Οι Κανόνες της Τύχης*, εκδ. Κάτοπτρο, 2001, σελ. 43-44].

³⁴ Βλ. Βοσνιάδου, Σ.: *Γνωσιακή Ψυχολογία*, εκδ. Gutenberg, 1998, σελ. 12. Επίσης, βλ. Keil, F.C.: *Concepts, Kinds, and Cognitive Development*, MIT Press, 1996, σελ. 15.

³⁵ Βλ. Otte, M.: Arithmetic and Geometry: Some Remarks on the Concept of Complementarity, *Studies in Philosophy and Education*, 10, 1990, σελ. 37-62 και Steinbring, H.: Changed views on mathematical knowledge in the course of didactical theory development—independent corpus of scientific knowledge or result of social constructions?, *ZDM, The International Journal of Mathematics Education*, 40(2), 2008, σελ. 303-316. Επίσης, βλ. Stepin, V.: *Theoretical Knowledge*, Springer, 2005 και Arabatzis, Th.: Conceptual Change and Scientific Realism: Facing Kuhn's Challenge, στο Vosniadou, S. et al (eds.): *Re-Framing the Conceptual Change Approach in Learning and Instruction*, Elsevier, 2007, σελ. 47-62.

“Δεν μπορούμε να συγκρίνουμε τη διδασκαλία ή τη μάθηση μιας θεωρητικής έννοιας με την απόδοση ή αποδοχή οποιουδήποτε εμπειρικού πράγματος. Η γνώση είναι μ’ αυτή την έννοια αφηρημένη. Ο δάσκαλος δεν αρκεί, γι’ αυτό το λόγο, να γνωρίζει τις εμπειρικές έννοιες και θεωρίες που θέλει να διδάξει, αλλά πρέπει να ξέρει κάπως τη φύση της θεωρητικής έννοιας, είτε το χαρακτήρα της έννοιας ως ένα θεωρητικό επιστημονικό αντικείμενο.

...

[Κ]άθε θεωρητική έννοια μπορεί να γίνει κατανοητή μέσα σε μια δυναμική σχέση εργαλειακών και ‘περιχομενικών’, λειτουργικών και περιγραφικών, πλευρών. Η σχέση ...του ‘περιχομενικού’ και του διαδικαστικού στην έννοια εξαρτάται ουσιαστικά από την ολότητα των θεωρητικών σχέσεων, τις οποίες αφορά η έννοια.”³⁶

Η δεύτερη παρατήρηση είναι από το βιβλίο: *Τεχνοκρατία και Ανθρώπινα Ιδεώδη στο Σοσιαλισμό*, όπου παρουσιάζεται η εξής άποψη:

“[Π]ριν ακόμα επινοήσουν τον αριθμό, την πρόσθεση, την αφαίρεση, τη διαίρεση και τον πολλαπλασιασμό, οι άνθρωποι αναγκάστηκαν, χωρίς αμφιβολία, να χρησιμοποιήσουν όρους όπως ‘περισσότερο’, ‘λιγότερο’, ‘πιο μακριά’, ‘πιο κοντά’, ‘μετά’, ‘πριν’, ‘ίσο’, ‘άνισο’ κλπ. Σε τέτοιους όρους βρήκαν έκφραση οι γενικοί ποιοτικοί (χωρο-χρονικοί) συσχετισμοί ανάμεσα στα πράγματα, στα φαινόμενα, στα γεγονότα.

...

Ο άνθρωπος δεν επινόησε τον αριθμό αφαιρώντας απ’ αυτόν κάθε δυνατή ποιότητα ή επειδή έμαθε να ‘μη δίνει σημασία’ στη διαφορά ανάμεσα στην πέτρα και το κρέας, στο μπαστούνι και τη φωτιά. Ακριβώς, στον ίδιο τον αριθμό και το λογισμό βρήκε το μέσο να εκφράσει με πιο βαθύ και συγκεκριμένο τρόπο τον ποιοτικό προσδιορισμό (δηλαδή τον πρώτο και πιο σημαντικό προσδιορισμό) του πραγματικού. Ο αριθμός ‘χρησίμευσε’ στον άνθρωπο μόνο εκεί όπου η ζωή τον έβαλε μπροστά στην ανάγκη να κοινοποιήσει στο συνάνθρωπό του (ή στον εαυτό του) όχι μόνο αν ένα πράγμα ήταν περισσότερο (ή λιγότερο) μεγάλο, αλλά το πόσο μεγάλο ήταν.”³⁷

Από τα προηγούμενα αποσπάσματα διαφαίνεται ότι οι θεωρητικές έννοιες εκφράζουν σχέσεις κι όχι αντικείμενα ή γενικεύσεις αντικειμένων, ούτε ονόματα επιστημονικών όρων. Κατά συνέπεια, η θεωρητική σκέψη είναι σχεσιακή σκέψη, δηλ. σκέψη με βάση τις σχέσεις. Κι έχει, μάλιστα, επισημανθεί ότι η μαθηματική γνώση είναι, βασικά, θεωρητική γνώση, μ’ άλλα λόγια, σχεσιακή γνώση.³⁸

³⁶ Βλ. Otte, M.: *Η Μόρφωση των Δασκάλων, Διάσταση*, 1, 1994, σελ. 52-59, ειδ. σελ. 56, 58.

³⁷ Βλ. Ιλένκοφ, Ε.: *Τεχνοκρατία και Ανθρώπινα Ιδεώδη στο Σοσιαλισμό*, εκδ. Οδυσσέας, 1976, σελ. 155, 157-8.

³⁸ Βλ. Steinbring, H.: *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction. An Epistemological Perspective*, Springer, 2005, σελ. 19 και Confrey, J.: *Steering a Course between Vygotsky and Piaget*, *Educational Researcher*, 20(8), 1991, σελ. 28-32, ειδ. σελ. 30.

Αυτή η επιστημολογική θεώρηση είχε ήδη προβάλλει στη φιλοσοφία της επιστήμης από τις αρχές του 20^{ου} αιώνα. Πολύ χαρακτηριστικά, είχε επισημανθεί ότι

“Η ουσία του αριθμού είναι πάντα σχετική, όχι απόλυτη. Ο μεμονωμένος αριθμός είναι μονάχα μια μεμονωμένη θέση μέσα σε μια γενική συστηματική τάξη. Δεν έχει δικό του *είναι*, ούτε αυτοτελή πραγματικότητα. Το νόημά του καθορίζεται από τη θέση που κατέχει στο όλο αριθμητικό σύστημα.... ο αριθμός έχασε όλα τα οντολογικά του μυστικά.”³⁹

Πρόκειται για μια αξιοσημείωτη παρατήρηση, που προέρχεται από τον γερμανό φιλόσοφο, Ernest Cassirer (1874-1945), ο οποίος έδωσε μια σημαντική ώθηση στον σχεσιακό και το δομικό τρόπο σκέψης. Και είναι αλήθεια ότι η φιλοσοφική αυτή σκοπιά δεν ήταν μια μεμονωμένη ιδιαιτερότητα στο χώρο των ανθρωπιστικών επιστημών. Διακεκριμένοι επιστήμονες της εποχής του, όπως ο Richard Dedekind (1831-1916) και ο Hermann Weyl (1885-1955), υποστήριξαν και αξιοποίησαν τη συγκεκριμένη επιστημολογική προσέγγιση.⁴⁰

Εκτός από τη διάσταση αυτή, στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών, το ζήτημα της σχεσιακής σκέψης αναπτύχθηκε και στη Διδακτική των Μαθηματικών. Από τη δεκαετία του 1970, άρχισαν να δημοσιεύονται τέτοιου είδους άρθρα⁴¹, μ' αποτέλεσμα, σήμερα, το ζήτημα της σχεσιακής σκέψης να παίζει έναν δημιουργικό ρόλο στη σύγχρονη διδακτική επιστημολογία των Μαθηματικών⁴².

Ο αρνητικός αριθμός είναι ένα παράδειγμα θεωρητικής έννοιας. Εκφράζει τη σχέση δυο φυσικών αριθμών που ανήκουν στην αντίστοιχη κλάση ισοδυναμίας⁴³. Όμοια η έννοια του χώρου είναι θεωρητική έννοια, που, σύμφωνα με τον Leibniz και τους νεότερους επιστήμονες, εκφράζει μια “διάταξη συνυπαρχόντων” ή μια “κατάσταση

³⁹ Βλ. Cassirer, E.: *Δοκίμιο για τον Άνθρωπο*, εκδ. Κάλβος, 1972, σελ. 317.

⁴⁰ Βλ. Reck, E.H.: *Dedekind, Structural Reasoning, and Mathematical Understanding*, στο Van Kerkhove, B.(ed.): *New Perspectives on Mathematical Practices : Essays in Philosophy and History of Mathematics*, World Scientific Publ., 2009, σελ. 150-173, ειδ. σελ 168. Επίσης βλ. Weyl, H.: *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, Atheneum, 1963, σελ. 26 κ.ε.

⁴¹ Μια από τις πρωτοπόρες δημοσιεύσεις, στον τομέα αυτό, που άσκησε αρκετή επίδραση, είναι το άρθρο του Skemp, R. με τίτλο *Relational Understanding and Instrumental Understanding*, στο περιοδικό *Mathematics Teaching* (77, 1976, σελ. 20-27). Υπάρχει η ελληνική μετάφραση του, στον *Ευκλείδη γ'* (46, 1996, σελ. 20-35), με την παραπλανητική, δυστυχώς, απόδοση του όρου relational ως εννοιολογικός/ή και όχι ως σχεσιακός/ή.

⁴² Ενδεικτικά να αναφερθούν οι εξής σχετικές δημοσιεύσεις: 1) Hiebert, J.(ed.): *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics*, Lawrence Erlbaum Associates, Publ. 1986, 2) Davydov, V.V.: *Types of Generalization in Instruction: Logical and Psychological Problems in the Structuring of School Curricula*, National Council of Teachers of Mathematics, 1990, 3) Steinbring, H.: *The Theoretical Nature of Probability in the Classroom*, στο Kapadia, R. and Borovcnik, M. (eds.): *Chance Encounters: Probability in Education*, Kluwer, 1991, σελ. 135-167, 4) Carpenter, T.P. et al: *Algebra in Elementary School: Developing Relational Thinking*, *ZDM, The International Journal of Mathematics Education*, 37(1), 2005, σελ. 53-59, 5) Otte, M.: *Mathematical history, philosophy and education*, *Educational Studies in Mathematics*, 66, 2007, σελ. 243-255.

⁴³ Βλ. Steinbring, H.: *Epistemological Constraints of Mathematical Knowledge in Social Learning Settings*, στο Sierpiska, A. and Kilpatrick, J. (eds.): *Mathematics Education as a Research Domain. A Search for Identity*, Kluwer, 1998, σελ. 513-526, ειδ. σελ. 523.

μεταξύ των ίδιων των σωμάτων”⁴⁴. Επίσης, με την καθιέρωση της κλασικής πιθανότητας από τον Laplace, το 1812, εδραιώθηκε ο θεωρητικός χαρακτήρας της⁴⁵ και πρόβαλε ο σχεσιακός προσδιορισμός της, ως η συσχέτιση των ευνοϊκών περιπτώσεων ενός ενδεχόμενου προς τις αντίστοιχες δυνατές περιπτώσεις, στο πλαίσιο ενός μοντέλου εννοιολογικής συστηματοποίησης.

Με δεδομένο ότι η σύγχρονη φιλοσοφία της επιστήμης έχει έναν ιστορικό προσανατολισμό⁴⁶, (με βάση, δηλαδή, το γεγονός ότι τα φιλοσοφικά ζητήματα της επιστήμης κατανοούνται, σήμερα, ιστορικά κι όχι ως στατικές και ακατάλυτες μεταγνώσεις), είναι φυσιολογικό και πρόσφορο να αναπτύσσονται ενδιαφέροντα, αναζητήσεις και αναλύσεις για την ανέλιξη των επιστημονικών εννοιών. Και μ’ αυτή την οπτική γωνία, είναι συμβατή η δημιουργία μιας παρακίνησης και μιας ιδιαίτερης προσοχής για τις διαδικασίες ανάπτυξης των εμπειρικών εννοιών, των θεωρητικών εννοιών και των μεταβάσεων από τις εμπειρικές στις θεωρητικές έννοιες. Πιο συγκεκριμένα, η έμφαση δίνεται στις περιπτώσεις επιστημολογικών αναβαθμών τους, όταν, δηλαδή, η ανάπτυξη των επιστημονικών εννοιών συνυφαίνεται με υπερβάσεις. Αυτού του είδους οι διεισδύσεις, αναπτύσσονται στο πλαίσιο της Επιστημολογίας, στο πλαίσιο της Ιστορίας των Επιστημών, στο πλαίσιο της Γνωστικής Ψυχολογίας και, τις περισσότερες φορές, μέσα σ’ ένα διεπιστημονικό πλαίσιο αυτών των επιστημονικών κλάδων.

Για να φανεί η σημασία των σύγχρονων αυτών τάσεων στα Μαθηματικά, θα επισημανθούν κάποιες ιστορικές εξελίξεις εμπειρικών εννοιών, θεωρητικών εννοιών και κάποιες περιπτώσεις μεταστροφής από εμπειρικές σε θεωρητικές έννοιες.

Ένα απλό παράδειγμα εμπειρικής εξέλιξης είναι η αλλαγή της έννοιας του αριθμού, ως μια συλλογή μονάδων, σύμφωνα με τον Ευκλείδη (3^{ος} αι. π.Χ.), στην έννοια του αριθμού, ως το αποτέλεσμα μιας μέτρησης, σύμφωνα με τον Simon Stevin (1548-1620).⁴⁷ Μπορεί να σημειωθεί μια ανάλογη εξέλιξη στην έννοια του χώρου, κατά την μετάβασή της από την έννοια του τόπου (έκτασης, εσωτερικής περιοχής) ενός στερεού σώματος, σύμφωνα με τον Αριστοτέλη (4^{ος} αι. π.Χ.), στην έννοια του τρισδιάστατου πεδίου (όγκου), που περιέχει το σώμα, σύμφωνα με τον Φιλόπονο (6^{ος} αι. μ.Χ.)⁴⁸ και στην έννοια του γεωμετρικού μέτρου της θέσης, σύμφωνα με τον Δαμάσκιο (6^{ος} αι. μ.Χ.)⁴⁹. Επίσης, ο ίδιος χαρακτήρας εξέλιξης παρουσιάζεται και με την αντικατάσταση της έννοιας της πιθανότητας, θεωρώντας την ως μέση τιμή των πειραμάτων τύχης, με την έννοια της πιθανότητας, ως αριθμητική προσέγγιση της στατιστικής συχνότητας, (δηλαδή, την αριθμητική τιμή που προσεγγίζει ο λόγος του αριθμού των εμφανιζόμενων αποτελεσμάτων ενός ενδεχόμενου προς τον συνολικό

⁴⁴ Βλ. Huggett, N.: *Space from Zeno to Einstein: Classic Readings with a Contemporary Commentary*, MIT Press, 1999, σελ. 160 κ.ε.

⁴⁵ Βλ. Steinbring, H., πρ. παρ. 28, σελ. 140.

⁴⁶ Βλ. Rouse, J.: *New Philosophies of Science in North America-Twenty Years Later*, *Journal for General Philosophy of Science*, 29, 1998, σελ. 71-122, ειδ. σελ. 71.

⁴⁷ Βλ. Βερυκάκη, Α. και Καστάνη, Ν., πρ. παρ. 11, σελ. 224, 226.

⁴⁸ Βλ. Sorabji, R.(ed.): *Φιλόπονος και η Απόρριψη της Αριστοτελικής Επιστήμης*, εκδ. Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τράπεζας, 2006, σελ. 41.

⁴⁹ Βλ. Jammer, M.: *Έννοιες του Χώρου*, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, 2001, σελ. 82.

αριθμό των δυνατών εκβάσεων του) σε μια αυξανόμενη ακολουθία δοκιμών Bernoulli.⁵⁰

Οι περιπτώσεις μεταλλαγής εμπειρικών εννοιών σε θεωρητικές έννοιες, στα Μαθηματικά, είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσες, γιατί απεικονίζουν ριζοσπαστικές μετατροπές στον τρόπο σκέψης, αλλά και γιατί σηματοδοτούν μεγάλα εμπόδια και συγκρούσεις. Τρία ιστορικά παραδείγματα, αυτού του είδους, είναι: 1) Η υπέρβαση της οντολογικής αντίληψης του αριθμού με την ανάδειξη του πραξιακού ή λειτουργικού (operational) και πλαισιοκρατικού (contextual) τρόπου κατανόησης του.⁵¹ 2) Η ανανέωση της έννοιας του χώρου με την ανάπτυξη και εδραίωση των Μη-Ευκλείδειων Γεωμετριών, όπου η οντολογική αντιμετώπιση των γεωμετρικών αντικειμένων έδωσε τη θέση της στη συστηματική (δομική) θεώρηση των γεωμετρικών σχέσεων του χώρου.⁵² 3) Η μετατροπή της εμπειρικής αντίληψης για την πιθανότητα, ως μέσης τιμής των πειραμάτων τύχης ή των δημογραφικών δεδομένων, στην κλασική πιθανότητα του Laplace, ως σχέση των ευνοϊκών προς τις δυνατές περιπτώσεις των ενδεχομένων, με μια εσωτερική σύνθεση των συναφών εννοιών (στοιχειώδες και σύνθετο ενδεχόμενο, βέβαιο και αβέβαιο ενδεχόμενο, κ.τ.λ.).⁵³

Ωστόσο, στην ιστορική δυναμική της επιστημονικής γνώσης, όπως και των Μαθηματικών, ειδικότερα, δεν αναπτύσσονται μόνο οι εμπειρικές έννοιες, ούτε οι αλλαγές περιορίζονται, μόνο, στις μεταστροφές από εμπειρικές σε θεωρητικές έννοιες. Προωθούνται, αναδιοργανώνονται, και οι θεωρητικές έννοιες. Γενικότερα, μετεξελίσσεται η θεωρητική γνώση. Για παράδειγμα, η έννοια του αριθμού μετασχηματίστηκε από τα μέσα της τρίτης δεκαετίας του 19^{ου} αιώνα στις αρχές του 20^{ου} αιώνα. Συγκεκριμένα, από την επέκταση των θετικών ακεραίων σε συμβολικές παραστάσεις (που περιείχαν και τους αρνητικούς), με τη βοήθεια της επέκτασης των αριθμητικών πράξεων των θετικών ακεραίων σε πράξεις με συμβολικές μορφές και με καταλύτη την “αρχή της διατήρησης αυτών των πράξεων”, η ιδέα των θετικών αριθμών “μεταλλάχθηκε” με υπόβαθρο την επέκταση αριθμητικών συστημάτων και με υποστηρίγματα: τις κλάσεις ισοδυναμίας και τις ισομορφικές εμφυτεύσεις. Έτσι, ο αριθμός από ένα εκπεφρασμένο στοιχείο ενός συστήματος αριθμητικών πράξεων, έγινε ένα στοιχείο μιας αριθμητικής δομής, που προερχόταν από τις διαδοχικές δομικές επεκτάσεις των αριθμητικών κλάσεων ισοδυναμιών.⁵⁴ Με την ίδια οπτική γωνία, μπορεί να κατανοηθεί η “εκτίναξη” του μη-ευκλείδειου χώρου, στην έννοια του χώρου με πολλές διαστάσεις.⁵⁵ Όμοια, μπορεί να

⁵⁰ Βλ. Borovcnik, M. et al: A Probabilistic Perspective, στο Kapadia, R. and Borovcnik, M. (eds.): *Chance Encounters: Probability in Education*, Kluwer, 1991, σελ. 27-71, ειδ. σελ. 33, και Stigler, S.M.: *The History of Statistics. The Measurement of Uncertainty before 1900*, Harvard Univ. Press, 1986, σελ.65.

⁵¹ Βλ. Καστάνη, Ν.: Η ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών από τη σκοπιά των *Εννοιολογικών Αλλαγών*, ΑΠΘ, Δεκέμβριος 2006, http://users.auth.gr/~nioka/Files/anaptiksi_math_enoion.pdf, σελ. 11, επίσης βλ. Βερυκάκη, Α. και Καστάνη, Ν., πρ. παρ. 11, σελ. 230.

⁵² Βλ. Distalle, R.: *Understanding Space-Time. The Philosophical Development of Physics from Newton to Einstein*, Cambridge Univ. Press, 2006, σελ. 95.

⁵³ Βλ. Steinbring, H., πρ. παρ. 31, σελ 140.

⁵⁴ Βλ. Βερυκάκη, Α. και Καστάνη, Ν., πρ. παρ. 11, σελ. 230-232.

⁵⁵ Βλ. Jammer, M., πρ. παρ. 35, σελ. 243 κ.ε.

διαπιστωθεί η αντικατάσταση της κλασικής πιθανότητας, με την έννοια του συνολοθεωρητικού “πιθανομέτρου”, τη δεκαετία του 1920.⁵⁶

Διαφαίνεται, ότι η επίγνωση της εννοιολογικής ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης είναι ο ακρογωνιαίος λίθος της σημερινής μαθηματικής παιδείας και της επιστημονικής νοστροπίας, γενικότερα. Η κατανόηση των εννοιολογικών αλλαγών και η εμβάθυνση στο γνωστικό τους υπόστρωμα είναι ιδιαίτερα σημαντική για το σύγχρονο γίνεσθαι της επιστημονικής κουλτούρας. Κι αυτό απηχεί η μεγάλη έμφαση της Γνωστικής Ψυχολογίας (και γενικότερα της επιστημολογίας της Πληροφορικής) στις αντίστοιχες έρευνες κι αναλύσεις. Μια απήχηση, που τα ίχνη της, δεν είναι καθόλου αμελητέα στη σύγχρονη πραγματικότητα της ελληνικής επιστήμης. Γεγονός, το οποίο επηρεάζει, με τον ένα ή άλλο τρόπο, τους γειτονικούς επιστημονικούς τομείς όπως π.χ. την Ιστορία των Μαθηματικών ή τη Διδακτική των Μαθηματικών.

III. Η ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΙΣΤΟΡΙΟΓΡΑΦΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΟΙ ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΕΣ ΑΛΛΑΓΕΣ

Από τα τέλη της δεκαετίας του 1970, η ώθηση του προβληματισμού και των διεισδύσεων στις εννοιολογικές αλλαγές, στο πλαίσιο της Γνωστικής Ψυχολογίας, προκάλεσε τη διέγερση κάποιων παράπλευρων επιστημονικών τομέων, π.χ. της Επιστημολογίας και της Ιστορίας των Μαθηματικών. Κι όπως ήταν φυσικό, οι συγκεκριμένες προσεγγίσεις αντλούσαν και προσάρμοζαν σχετικές ιδέες από τους συναφείς κλάδους. Για τα ενδιαφέροντα και τον προσανατολισμό αυτών των παρακείμενων αναζωπυρώσεων, μια πολύ χαρακτηριστική επισήμανση είναι η εξής:

“Η προσέγγιση της εννοιολογικής αλλαγής, στη μάθηση, έχει τις ρίζες της τόσο στην ερευνητική παράδοση της διδακτικής των επιστημονικών μαθημάτων, όσο και στη γνωστικο-αναπτυξιακή ερευνητική παράδοση. Και οι δύο παραδόσεις πήραν υπ’ όψη τους την επαναστατική θεώρηση των επιστημονικών αλλαγών του Kuhn. Στην ερευνητική παράδοση της διδακτικής των επιστημονικών μαθημάτων, οι ερευνητές χρησιμοποίησαν μια αναλογική σύγκλιση ανάμεσα στις ιδέες του Piaget, σχετικά με τη συμμόρφωση και την αφομοίωση, και τις ιδέες του Kuhn, σχετικά με τη θεωρία της αλλαγής στην ιστορία της επιστήμης. Η καταλυτική ιδέα της ‘επιστημονικής επανάστασης’, χρησιμοποιήθηκε, ως πηγή υποθέσεων σχετικά με το πώς οι έννοιες αλλάζουν στη διαδικασία της μάθησης.

...

Το ζήτημα, αν οι επαναστάσεις, σύμφωνα με την άποψη του Kuhn, λαμβάνουν χώρα στα Μαθηματικά, είναι ακόμη σημαντικό για την έκταση της καρποφόρας συζήτησης που προκάλεσε και την επίσπευση της αλλαγής στο τρόπο που αντιμετωπίζονταν η ιστορία των Μαθηματικών. Νέες προοπτικές στην ιστορία των Μαθηματικών έχουν

⁵⁶ Βλ. Bingham, N.H.: Studies in the History of Probability and Statistics XLVI. Measure into Probability: From Lebesgue to Kolmogorov, *Biometrika*, 87(1), 2000, σελ. 145-156, ειδ. σελ. 147.

αμφισβητήσει την αξίωση σύμφωνα με την οποία ‘η δομή των Μαθηματικών αντανακλά επακριβώς την ιστορία τους’ και αποκάλυψαν ότι οι μαθηματικές έννοιες υφίστανται αλλαγές, οι οποίες δεν μπορούν να περιγραφούν με όρους συσσωρευσης.”⁵⁷

Στο απόσπασμα αυτό γίνεται φανερό η έμφαση στον αναπροσανατολισμό της Ιστορίας των Μαθηματικών. Ένας αναπροσανατολισμός, όπου οι ιδέες του Kuhn και του Piaget προκάλεσαν την αρχική έκρηξη στην απολυτοκρατική μακαριότητα της Δυτικής Φιλοσοφίας και Ιστοριογραφίας των Επιστημών. Πρόκειται για μια στροφή, από την καταγραφή των αιώνιων και αμετάβλητων αληθειών, που αποκάλυψαν κι ανακαλύπτουν οι εμπνευσμένοι διανοούμενοι, στην αναγλυφοποίηση και τη συνειδητοποίηση των γνωστικών ρήξεων και των υπερβάσεων, που οι επιστημονικές κοινότητες προέτρεψαν και αντιπαράθεσαν, δίνοντας έτσι τη δυνατότητα να ανοιχτούν νέοι επιστημονικοί ορίζοντες.

Η νέα αυτή δυναμική βρήκε γόνιμο έδαφος σε διάφορους επιστημονικούς κλάδους, όπως π.χ. στη Φυσική, την Αστρονομία και τη Βιολογία. Στα Μαθηματικά, η εν λόγω ιστοριογραφική τάση είχε μια ανάλογη απήχηση, αν και λίγο πιο υποτονική. Ένας από τους λόγους της υστέρησης αυτής ήταν η δυσκολία αποδοχής των μαθηματικών επαναστάσεων. Μια δυσκολία που σχετίζεται με τη βαθιά εδραιωμένη πλατωνική νοοτροπία του αντίστοιχου επιστημονικού κατεστημένου.

Εκείνοι που “έσπασαν” πρώτοι το “παγόβουνο” της παραδοσιακής ιστοριογραφίας των Μαθηματικών, ήταν οι μαθητές και οι οπαδοί του Thomas Kuhn. Μεταξύ αυτών, διακρίνονται: η Judith V. Grabiner, ο Michael S. Mahoney (1939-2008), ο Joseph W. Dauben και ο Timothy LeNoir. Οι διατριβές και οι δημοσιεύσεις των αμερικανών, αυτών, ιστορικών των Μαθηματικών⁵⁸, διάνοιξαν το δρόμο προς ένα υβριδικό είδος πλαισιοκρατικής (contextual) και επιστημολογικής κατανόησης της ανέλιξης της μαθηματικής σκέψης και απέφυγαν, συνειδητά, τη συσσωρευτική κι αναχρονιστική αντίληψη της παραδοσιακής ιστοριογραφίας των Μαθηματικών. Οι κυριότερες μελέτες τους, που προκάλεσαν, τότε, την προσοχή των ενδιαφερομένων, ήταν οι εξής: 1) Grabiner, J.V.: Is Mathematical Truth Time-Dependent? (Είναι η Μαθηματική Αλήθεια Χρονικά Εξαρτώμενη;), *The American Mathematical Monthly*, 81(4), 1974, σελ. 354-365, 2) Grabiner, J.V.: The Mathematicians, the Historians, and the History of Mathematics (Οι Μαθηματικοί, οι Ιστορικοί και η Ιστορία των Μαθηματικών), *Historia Mathematica*, 2, 1975, σελ. 439-445, 3) Grabiner, J.V.: *The Origins of Cauchy’s Rigorous Calculus (Οι Απαρχές του Αυστηρού Απειροστικού Λογισμού του Cauchy)*, The MIT Press, 1981, 4) Mahoney, M.S.: Babylonian Algebra: Form vs. Content (Βαβυλωνιακή Άλγεβρα: Μορφή σ’ αντιπαράθεση Περιεχομένου), *Studies in History and Philosophy of Science*, 1, 1970, σελ. 369-380. 5) Mahoney,

⁵⁷ Βλ. Vamvakoussi, X. and Vosniadou, S.: Understanding the structure of the set of rational numbers: a conceptual change approach, *Learning and Instruction*, 14, 2004, σελ. 453-467, ειδ. σελ. 453, 455.

⁵⁸ Οι διατριβές τους ήταν οι εξής: 1) Grabiner, J.V.: *The Calculus as Algebra: J.-L. Lagrange, 1736-1813*, Harvard Univ., 1966, 2) Mahoney, M.S.: *The Royal Road: The Development of Algebraic Analysis from 1550 to 1650, with Special Reference to the Work of Pierre de Fermat*, Princeton Univ., 1967, 3) Dauben, J.W.: *The Early Development of Cantorian Set Theory*, Harvard Univ., 1972 και 4) LeNoir, T.: *The Social and Intellectual Roots of Discovery in Seventeenth Century Mathematics*, Indiana Univ., 1974.

M.S.: Die Anfänge der algebraischen Denkweise im 17 Jahrhundert (Οι Αφετηρίες της Αλγεβρικής Σκέψης τον 17^ο Αιώνα), *Rate*, 1, 1971, σελ. 15-31, 6) Mahoney, M.S.: *The Mathematical Career of Pierre de Fermat, 1601-1665 (Η Μαθηματική Καριέρα του Pierre de Fermat, 1601-1665)*, Princeton, 1973, 7) Mahoney, M.S.: Changing Canons of Mathematical and Physical Intelligibility in the Laster 17th Century (Αλλάζοντας τους Κανόνες της Μαθηματικής και Φυσικής “Πνευματικότητας”), *Historia Mathematica*, 11, 1984, σελ. 417-423, 8) Dauben, J.W.: Conceptual Revolutions and the History of Mathematics: Two Studies in the Growth of Knowledge (Εννοιολογικές Επανάστασεις και η Ιστορία των Μαθηματικών: Δύο Μελέτες για την “Προώθηση” της Γνώσης), στο βιβλίο Mendelsohn, E.(ed.): *Transformation and Tradition in the Science. Essays in Honor of I. Bernard Cohen*, Cambridge Univ. Press, 1984, σελ. 81-103 και 9) LeNoir, T.: Descartes and the Geometrization of Thought: The Methodological Background of Descartes' Géométrie (Ο Καρτέσιος και η Γεωμετρικοποίηση της Σκέψης: Το Μεθοδολογικό Υπόβαθρο της Γεωμετρίας του Καρτέσιου), *Historia Mathematica*, 6, 1979, σελ. 355-379.

Αυτή η αρχική ώθηση, δημιούργησε, στα μέσα της δεκαετίας του 1970, έναν ευρύτερο προβληματισμό για τη νέα ιστορική αντίληψη των Μαθηματικών⁵⁹ και υπόθαλψε μια σφοδρή σύγκρουση με τους εκπροσώπους της καθιερωμένης, τότε, συμπεριφοράς στην ιστοριογραφία των Μαθηματικών⁶⁰. Έτσι, άρχισαν να συζητιούνται και να αγκαλιάζονται οι ιδέες του Kuhn στο χώρο της Ιστορίας των Μαθηματικών, αν και η έννοια της *επιστημονικής επανάστασης* ήταν “δύσπεπτη”.

Στα τέλη της δεκαετίας του 1970, ένα παράπλευρο ιστορικο-επιστημολογικό ρεύμα άρχισε να αναπτύσσεται ραγδαία, μετά τη δημοσίευση της διατριβής: *Proofs and Refutations* (1976)⁶¹, του Imre Lakatos, το οποίο ενίσχυσε σημαντικά τις φιλοσοφικές⁶² και ιστοριογραφικές⁶³ τάσεις ανανέωσης των Μαθηματικών. Στις ιδέες του Lakatos, “ελλόχευε” και η σκέψη της εννοιολογικής αλλαγής.⁶⁴ Ένας καρπός αυτής της επιστημολογικής ροπής, σε συνδυασμό με την απήχηση των ιδεών του Kuhn στα Μαθηματικά, ήταν η διδακτορική διατριβή της Jere Confrey, το

⁵⁹ Βλ. Crowe, M.J.: Ten “Laws” Concerning Patterns of Change in the History of Mathematics, *Historia Mathematica*, 2, 1975, σελ. 161-166 και 469-470, Mehrtens, H.: T.S. Kuhn’s Theories and Mathematics: A Discussion Paper on the “New Historiography” of Mathematics, *Historia Mathematica*, 3, 1976, σελ. 297-320, Koppleman, E.: Progress in Mathematics, *Historia Mathematica*, 2, 1975, σελ. 457-463 και Browder, F.E.: The Relation of Functional Analysis to Concrete Analysis in 20th Century Mathematics, *Historia Mathematica*, 2, 1975, σελ. 577-590.

⁶⁰ Βλ. Θωμαΐδη, Γ. / Καστάνη, Ν.: Ο όρος “Γεωμετρική Άλγεβρα” στο στόχαστρο μιας σύγχρονης επιστημολογικής διαμάχης, στο βιβλίο *Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά. Κείμενα Ιστορίας και Φιλοσοφίας*, επιμ. Δ. Αναπολιτάνου / Β. Καρασμάνη, εκδ. Τροχαλία, 1993, σελ. 27-52.

⁶¹ Cambridge Univ. Press. Η ελληνική μετάφραση κυκλοφόρησε το 1996, από τις εκδ. Τροχαλία, με τίτλο *Αποδείξεις και Ανασκευές*.

⁶² Βλ. Fine, A.: Conceptual Change in Mathematics and Science: Lakatos' Stretching Refined, PSA: Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association, Volume Two: Symposia and Invited Papers, 1978, σελ. 328-341 και Koetsier, T.: *Lakatos' Philosophy of Mathematics. A Historical Approach*, North-Holland Publ., 1991, σελ. 1-3.

⁶³ Βλ. Hallett, M.F.: Towards a Theory of Mathematical Research Programmes, *British Journal for the Philosophy of Science*, 30, 1979, σελ. 1-25 και 135-159.

⁶⁴ Mormann, T.: Towards an Evolution Account of Conceptual Change in Mathematics: *Proof and Refutations* and the Axiomatic Variation of Concepts, στο βιβλίο Kampis, G. et al (eds.): *Appraising Lakatos. Mathematics, Methodology, and the Man*, Kluwer Academic Publ., 2002, σελ. 139-156.

1980 στο Cornell University, με θέμα: *Εννοιολογική Αλλαγή, Έννοιες του Αριθμού και Εισαγωγή στον Απειροστικό Λογισμό (Conceptual Change, Number Concepts and the Introduction to Calculus)*.⁶⁵ Πρόκειται για μια ριζοσπαστική ιστορικο-επιστημολογική προσέγγιση στη Διδακτική των Μαθηματικών, που δεν άφησε αδιάφορο τον επιστημονικό αυτόν τομέα⁶⁶.

Η επίδραση του Piaget ήταν αξιοσημείωτη, την περίοδο 1965-1985, στην ανάπτυξη της Γνωστικής Ψυχολογίας και ευνοούσε την καλλιέργεια ιστορικο-επιστημολογικών διεισδύσεων, αναλύσεων και διδακτικών μεθοδεύσεων στο πλαίσιο της μαθηματικής παιδείας.⁶⁷ Αποτελούσε, αναμφίβολα, μια καθοριστική συνιστώσα στην προώθηση της ιδέας των εννοιολογικών αλλαγών.⁶⁸ Ωστόσο, ήταν περιορισμένη η ιστοριογραφική της συμβολή.⁶⁹

Οι πρώτες, δειλές, νύξεις για εννοιολογικές αλλαγές στην Ιστορία των Μαθηματικών έγιναν τη δεκαετία του 1980.⁷⁰ Στην κατεύθυνση αυτή επισημάνθηκαν κάποιες ιστορικές αλλαγές στα Μαθηματικά, με υπόβαθρο τις ιδέες του Kuhn και του Lakatos. Ωστόσο, οι σχετικές αναφορές ήταν επιφανειακές και δεν εμβάθυναν, ούτε εξειδίκευαν, τις περιπτώσεις εννοιολογικών αλλαγών στην ιστορική ανάπτυξη της

⁶⁵ Οι βασικές ιδέες της διατριβής αυτής δημοσιεύτηκαν στην εργασία: Confrey, J.: Conceptual Analysis: Implications for Mathematics and Curriculum, *Curriculum Inquiry*, 11(3), 1981, σελ. 243-257.

⁶⁶ Βλ. Robitaille, D. & Dirks, M.: Models for the Mathematics Curriculum, *For the Learning of Mathematics*, 2(3), 1982, σελ. 3-21, Lerman, S.: Problem-solving or knowledge-centred: the influence of philosophy on mathematics teaching, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14(1), 1983, σελ. 59 – 66, και Ernest, P.: *The Philosophy of Mathematics Education*, The Falmer Press, 1991, σελ. xiii, 28

⁶⁷ Βλ. Copeland, R. W.: *How Children Learn Mathematics, Teaching Implications of Piaget's Research*, The Macmillan Company, 1970, Høyrup, J.: On Some Implications of a Piagetian Theory of Intelligence for Mathematics Education, *Institut for Økonomi, Politik og Administration, Roskilde Universitetscenter*, Skriftserie 1976, nr. 5, Arbib, M.A.: A Piagetian Perspective on Mathematical Construction, *Synthese*, 84, 1990, σελ. 43-50, Dubinsky, E.: Applying a Piagetian Perspective to Post-Secondary Mathematics Education, Unpublished manuscript, 1998, <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.57.5521>, Ojose, B.: Applying Piaget's Theory of Cognitive Development to Mathematics Instruction, *The Mathematics Educator*, 18(1), 2008, σελ. 26–30, Τουμάση, Μπ.: *Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών*, εκδ. Gutenberg, 1996, σελ. 133-142, Χασάπη, Δ.: *Διδακτική Βασικών Μαθηματικών Εννοιών*, εκδ. Μεταίχμιο, 2000, σελ. 114-118, Κολέζα, Ε.: *Μαθηματικά και Σχολικά Μαθηματικά*, εκδ. Ελληνικά Γράμματα, 2006, σελ. 161-167.

⁶⁸ Βλ. Vosniadou, S.: Conceptual Change Research: State of the Art and Future Directions, στο Schnotz, W. et al (eds.): *New Perspective on Conceptual Change*, Pergamon (In imprint of Elsevier Science), 1999, σελ. 3-13, ειδ. σελ. 3-5.

⁶⁹ Βλ. Damerow, P.: Vorläufige Bemerkungen über das Verhältnis rechen didaktischer Prinzipien zur Frühgeschichte der Arithmetik, *Mathematica Didactica*, 4(3), 1981, σελ. 131-153, Piaget, J. & Garcia, R.: *Psychogenese et Histoire des Sciences*, Flammarion, 1983 (in English, Columbia Univ. Press, 1989), Rogers, L.: Ontogeny, Phylogeny and Evolutionary Epistemology, *Proceedings British Society for Research into Learning Mathematics*, 1997, σελ. 44-49.

⁷⁰ Βλ. Merzbach, U.C.: Idolatry, automorphic function, and conceptual change. Reflection on the historiography of nineteenth-century mathematics, στο Mendelsohn, E.(ed.): *Transformation and Tradition in the Sciences: Essays in Honour of I. Bernard Cohen*, Cambridge Univ. Press, 1984, σελ. 125-132, Glas, E.: On the Dynamics of Mathematical Change in the Case of Monge and the France Revolution, *Studies in the History and Philosophy of Science*, 17(3), 1986, σελ. 249-268 και Glas, E.: Testing the Philosophy of Mathematics in the History of Mathematics. Part I: The Sociocognitive Process of Conceptual Change, *Studies in the History and Philosophy of Science*, 20(1), 1989, σελ. 115-131.

μαθηματικής γνώσης. Η κατάσταση φαίνεται ότι άλλαξε, στις αρχές της δεκαετίας του 1990, όταν το διανοητικό κλίμα “αναθερμάνθηκε” με τη δημοσίευση, το 1992, του βιβλίου: *Επαναστάσεις στα Μαθηματικά*⁷¹ και με την ισχυροποίηση ενός νέου επιστημολογικού πλαισίου, που διέπονταν από γνωστικές (cognitive)⁷² και “κατασκευαστικές” (κονστρουκτιβιστικές, constructivist)⁷³ ιδέες. Και οι νέες, αυτές, επιστημολογικές τάσεις στα Μαθηματικά παραμέριζαν το καθιερωμένο πρότυπο του δογματικού “θεμελιωτισμού” (*foundationalism*)⁷⁴, προωθώντας μια ανανεωτική προοπτική, που χαρακτηρίζεται από μια ιδιαίτερη ευαισθησία στην ανθρωπολογική κατανόηση της δυναμικής των εννοιολογικών δομών και, γενικότερα, των συστημάτων της μαθηματικής σκέψης⁷⁵. Το πνεύμα αυτό αποτυπώνεται σε μια σειρά δημοσιεύσεων, με πιο αντιπροσωπευτικές, τις εξής: 1) Ernest, P.: *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics* (“Κατασκευαστισμός” ως μια Φιλοσοφία των Μαθηματικών), State University of New York Press, 1998, 2) Netz, R.: *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics: A Study in Cognitive History* (Η “Σχηματοποίηση” του Συμπερασμού στα Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά: Μια Μελέτη στην Γνωστική Ιστορία), Cambridge Univ. Press, 1999, και 3) Lakoff, G. and Núñez, R.: *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being* (Από πού Προέρχονται τα Μαθηματικά: Πως το Ενσωματωμένο Μυαλό Φέρνει τα Μαθηματικά σε Ύπαρξη), Basic Books Publ., 2000.

Οι νέες αντιλήψεις, για την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης, ευνόησαν την ώθηση του ενδιαφέροντος για τις εννοιολογικές αλλαγές και την αναβάθμιση των σχετικών αναλύσεων και ερευνών. Στη στροφή του 20^{ου} αιώνα, αναπτύχθηκαν στην Ευρώπη τρεις πυρήνες ερευνητικής δραστηριότητας, με επίκεντρο τη συσχέτιση των εννοιολογικών αλλαγών με τη μάθηση των Μαθηματικών: στην Ελλάδα, με επικεφαλής τη Στέλλα Βοσνιάδου, στη Φιλανδία, με τον Erno Lehtinen και στο Βέλγιο, με τον Lieven Verschaffel. Μια αξιοσημείωτη συνύπαρξη των επιστημονικών αυτών ερευνών, αποτελεί το ειδικό τεύχος του περιοδικού *Learning and Instruction*, του 2004, με θέμα: *The conceptual change approach to mathematics learning and teaching* (Η προσέγγιση της εννοιολογικής αλλαγής στη μάθηση και τη διδασκαλία των Μαθηματικών).⁷⁶

Αν και η δυναμική της ιδέας αυτής είναι εμφανής στη Γνωστική Ψυχολογία, δεν παρατηρείται κάτι ανάλογο στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών, που παραμένει

⁷¹ Gillies, D. (ed.): *Revolutions in Mathematics*, Oxford Univ. Press, 1992.

⁷² Βλ. Andersen, H. et al: *The Cognitive Structure of Scientific Revolutions*, Cambridge Univ. Press, 2006, σελ. 14.

⁷³ Βλ. Sriraman, B. & English, L. (eds.): *Theories of Mathematics Education. Seeking New Frontiers*, Springer, 2010, σελ. 8.

⁷⁴ Βλ. Sierpinska, A. & Lerman, S.: Epistemologies of Mathematics and of Mathematics Education, στο βιβλίο *International Handbook of Mathematics Education*, vol.2, edited by Bishop, A. et al, Kluwer, 1996, σελ. 827-876, ειδ. σελ. 829-830.

⁷⁵ Από ιστοριογραφική άποψη, δίνεται έμφαση, με τη συγκεκριμένη προσέγγιση, η ανάδειξη και κατανόηση των ιστορικών επιλογών, αλλαγών και καθιερώσεων (ή απορρίψεων) των μαθηματικών πρακτικών σε σχέση με τα εκάστοτε πολιτισμικά, κοινωνικά και θεσμικά πλαίσια.

⁷⁶ Βλ. *Learning and Instruction*, 14(5), 2004, σελ. 445-548.

προσηλωμένη, σε μεγάλο βαθμό, στα λογικο-συντακτικά στερεότυπα.⁷⁷ Λίγο καλύτερη, είναι η ανάπτυξή της στην Ιστορία των Μαθηματικών, όπου το σχετικό ενδιαφέρον στις επιστημονικές επαναστάσεις ανατροφοδοτείται⁷⁸ και λειτουργεί καταλυτικά στην καλλιέργεια ενός κατάλληλου κλίματος. Το γεγονός αυτό, σε συνδυασμό με την τάση των γνωστικών προσεγγίσεων στις ιδιαιτερότητες της μαθηματικής ανάπτυξης, ενθάρρυνε και ενθαρρύνει την ιστορική ευαισθησία για τις εννοιολογικές υποδομές κι ανελίξεις των, εκάστοτε, μαθηματικών καταστάσεων.⁷⁹ Τα τελευταία χρόνια, αναπτύχθηκαν μελέτες για κάποιες περιπτώσεις εννοιολογικών αλλαγών στην ιστορία των Μαθηματικών. Είναι ενδεικτικό, της σχετικής ιστοριογραφικής τάσης, το αφιέρωμα για τη “Φύση της Εννοιολογικής Αλλαγής” στο περιοδικό⁸⁰ *Centaurus*, στα τέλη του 2009, όπου εμπλέκεται και η μαθηματική διάσταση του θέματος.⁸¹

Με τη σκιαγράφηση των τάσεων (και των αντιστάσεων) στην ιστοριογραφική δυναμική των εννοιολογικών αλλαγών μπορεί να συνειδητοποιηθεί το γιατί. Μ’ άλλα λόγια, μπορούν να φωτιστούν, κάπως, οι υπόγειες αιτίες και οι προσπάθειες των ανανεωτικών απαιτήσεων για τη συγκεκριμένη υπέρβαση των καθιερωμένων επιστημονικών προτύπων και νοοτροπιών. Παράλληλα όμως, διαφαίνονται, λίγο, κάποιες δομικές πλευρές τους, ή υποθάλλονται σχετικές απορίες, ερωτήσεις κι αναζητήσεις, για το τι της ιστοριογραφίας των εννοιολογικών αλλαγών, δηλ. για την ιδιαίτερη ιστορική φύση των εν λόγω αλλαγών.

Σχετικά με το ζήτημα της ιστορικότητας των εννοιολογικών αλλαγών, επισημάνθηκαν δύο ιδιαίτερες πλευρές του μεταγνωστικού τους παρασκήνιου: 1) οι διαχρονικές μεταβολές των *αναπαραστάσεων* τους, από τη μια, και 2) τα ιστορικά “σημεία” *καμπής* (δηλ. οι απαρχές και οι υπερβάσεις) των επιστημονικών εννοιών, από την άλλη.⁸² Οι αναπαραστάσεις, έχουν να κάνουν με την ιστορικο-σημειολογική διάσταση του θέματος και τα “σημεία” *καμπής*, με τη γνωστική ιστοριογραφία τους. Η ιστορική κατανόηση της αλλαγής των αναπαραστάσεων, δηλ. των εσωτερικών

⁷⁷ Βλ. π.χ. Irvine, A.(ed.): *Philosophy of Mathematics*, Elsevier, 2009 και Bueno, O. and Linnebo, Ø. (eds): *New Waves in Philosophy of Mathematics*, Macmillan Publ., 2009.

⁷⁸ Βλ. π.χ. Laugwitz, D.: *Bernhard Riemann 1826—1866. Turning Points in the Conception of Mathematics*, Birkhäuser, 1999 και Kvasz, L.: *Patterns of Change. Linguistic Innovations in the Development of Classical Mathematics*, Birkhäuser, 2000.

⁷⁹ Βλ. π.χ. Schubring, G.: *Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition. Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17–19th Century France and German*, Springer, 2005 και Ferreirós, J. and Gray, J.J. (eds.): *The Architecture of Modern Mathematics. Essays in History and Philosophy*, Oxford Univ. Press, 2006.

⁸⁰ Διεθνές Περιοδικό της Ιστορίας της Επιστήμης και των Πολιτισμικών της Όψεων.

⁸¹ Βλ. *Spotlight on: The Nature of Scientific Change*, *Centaurus*, 51(4), November, 2009, σελ. 288-320, που περιλαμβάνει τα εξής άρθρα: 1) Hon, G. and Goldstein, B.R.: In Pursuit of Conceptual Change: the Case of Legendre and Symmetry (σελ. 288-293), 2) Ariew, R.: *Some Reflections on Thomas Kuhn's Account of Scientific Change* (σελ. 294-298), 3) Bowen, A.C.: *From Description to Prediction: an Unexamined Transition in Hellenistic Astronomy* (σελ. 299-304), 4) Steinle, F.: *Scientific Change and Empirical Concepts* (σελ. 305-313) και 5) Chen, X. and Barker, P.: *Process Concepts and Cognitive Obstacles to Change: Perspectives on the History of Science and Science Policy* (σελ. 314-320).

⁸² Βλ. Arabatzis, Th. and Kindi, V.: The Problem of Conceptual Change in the Philosophy and History of Science, στο Vosniadou, St.(ed.): *International Handbook of Research on Conceptual Change*, Routledge, 2008, σελ. 345-373, ειδ. σελ. 364-365.

απεικονίσεων των κρίσιμων πληροφοριών⁸³ από τη φυσική, κοινωνική και διανοητική πραγματικότητα, δίνει τη δυνατότητα να συνειδητοποιηθούν οι μεταβολές των νοερών εικόνων και των αντίστοιχων νοητικών δομών, με άλλα λόγια, να συνειδητοποιηθούν οι ιστορικές μεταβολές των πυρήνων του τρόπου σκέψης. Κι αυτό, σε συνδυασμό με την επίγνωση των αντίστοιχων αλλαγών των εξωτερικών αναπαραστάσεων, δηλ. των σημειολογικο-γλωσσολογικών “αποτυπωμάτων” των εννοιών (όπως, των συμβολικών ή μορφολογικών ή ονοματολογικών εκφάνσεων τους), συνυφαίνοντας αυτές τις “κωδικοποιήσεις” τους με τους σημασιολογικούς τους φορείς.⁸⁴

Η δεύτερη ιστοριογραφική διάσταση των εννοιολογικών αλλαγών, αυτή των ιστορικών “σημείων” καμπής ενός επιστημονικού κλάδου, αποβλέπει στην ανάδειξη του υπόβαθρου των εννοιολογικών καινοτομιών και των δυνατοτήτων ανάπτυξης της επιστημονικής δημιουργικότητας, στις ιστορικές περιπτώσεις αναθεώρησης του συγκεκριμένου επιστημονικού πεδίου. Με την προσέγγιση αυτή, επιδιώκεται η αποκάλυψη των γνωστικών υπερβάσεων από τα, εκάστοτε, επιστημονικά στερεότυπα, εξετάζοντας τις παρεμβάσεις (και τις αντιστάσεις) για την εισαγωγή νέων εννοιών ή για την τροποποίηση των ήδη καθιερωμένων εννοιών.⁸⁵ Από τη συγκεκριμένη σκοπιά, οι εννοιολογικές αλλαγές δεν αντιμετωπίζονται ως ευφυείς εκλάμψεις των πρωτοπόρων επιστημόνων μιας εποχής, αλλά, ως συνέπεια της δυναμικής των νέων επιστημονικών πρακτικών, οι οποίες ενσωματώνουν νέους προσανατολισμούς, νέες προσδοκίες, νέα μέσα, νέες μεθόδους, νέες θεωρήσεις, νέες στάσεις και συμπεριφορές, όπως και νέους υποστηρικτές ή συμπαραστάτες.⁸⁶

Αυτοί είναι, οι δύο κύριοι άξονες της ιστοριογραφίας των εννοιολογικών αλλαγών, γενικά και στα Μαθηματικά ειδικότερα, που μπορούν να αποκαλύψουν τις σημαντικότερες πλευρές της, εκάστοτε, επιστημολογικής τους ιδιαιτερότητας. Δεν φωτίζουν, ωστόσο, όλες τις πτυχές τους. Κι αυτό γιατί, οι επιστημονικές έννοιες δεν παρουσιάζονται, ούτε λειτουργούν, ούτε αναπτύσσονται, αυτόνομα και μεμονωμένα. Κατά κανόνα, είναι στενά συνδεδεμένες με άλλες έννοιες και γνωστικά εργαλεία, που δομούν αντίστοιχες θεωρίες. Αυτό σημαίνει, ότι οι εννοιολογικές αλλαγές είναι συνυφασμένες με αλλαγές θεωριών.⁸⁷ Και το ζήτημα της αλλαγής των

⁸³ Βλ. Βοσνιάδου, Στ.(επιμ.): *Η Ψυχολογία των Μαθηματικών*, εκδ. Gutenberg, 1995, σελ. 14. Επίσης, βλ. Κωσταρίδου-Ευκλείδη, Α.: *Γνωστική Ψυχολογία*, εκδ. Art of Text, 1992, σελ. 26-29 και Κολέζα, Ε. πρ. παρ. 67, σελ. 214-221.

⁸⁴ Για ένα παράδειγμα μιας σχετικής προσέγγισης στα Μαθηματικά βλ. Kruz, E.M.: Representation, agency, and disciplinarity : Calculus experts at work, *Proceedings of the Twentieth Annual Conference of the Cognitive Science Society*, Erlbaum Publ., 1998, σελ. 585-590.

⁸⁵ Βλ. Arabatzis, Th. and Kindi, V., πρ. παρ. 82, σελ. 365, και Nersessian, N.J.: *Creating Scientific Concepts*, The MIT Press, 2008, σελ.1-10.

⁸⁶ Για μια σχετική προσέγγιση στα Μαθηματικά βλ. Heffer, A.: A Conceptual Analysis of Early Arabic Algebra, στο Rahman, S. et al (eds.): *The Unity of Science in the Arabic Tradition. Science, Logic, Epistemology and their Interactions*, Springer, 2008, σελ. 89-128. Επίσης, βλ. Damerow, P.: *The Material Culture of Calculation. A Conceptual Framework for an Historical Epistemology of the Concept of Number*, Max Planck Institute for the History of Science, Preprint, Nr 117, 1999.

⁸⁷ Βλ. Keil, F. Conceptual Change, στο Wilson, R.A. & Keil, F. C. (eds.): *The MIT Encyclopedia of the Cognitive Science*, MIT Press, 1999, σελ. 179-182, ειδ. σελ. 180, Keil, F.C.: *Concepts, Kinds, and Cognitive Development*, MIT Press, 1996, (πρώτη έκδοση, 1989), σελ. 1 κ.ε., 267 κ.ε.

μαθηματικών θεωριών, απασχολεί τη σύγχρονη επιστημολογία των Μαθηματικών⁸⁸, ενώ στην παραδοσιακή νοοτροπία υπολείπεται, ή αγνοείται.

Διαφαίνεται ότι στο πλαίσιο της αλλαγής των μαθηματικών θεωριών, το ενδιαφέρον για τις εννοιολογικές αλλαγές δεν περιορίζεται μόνο στις γνωστικές μεταβολές των βασικών εννοιών, αλλά και στις ανανεώσεις των διαδικαστικών ή λειτουργικών (operational) μέσων και μεθόδων, π.χ. των “αριθμητικών” πράξεων, όπως και στις τροποποιήσεις των υποκείμενων δομικών σχέσεων, π.χ. της ισότητας. Για να γίνουν λίγο πιο φανερές αυτές οι συσχετίσεις, σημειώνονται οι εξής ιστορικές περιπτώσεις:

1. Με την ανάπτυξη των αριθμητικών πράξεων μεταξύ των γεωμετρικών μεγεθών, από τον René Descartes (1596-1650), δόθηκε η δυνατότητα να ενοποιηθεί η κλασική έννοια του αριθμού, με την έννοια του μεγέθους, μ’ άλλα λόγια, στην έννοια του αριθμού συνυφάνθηκαν τόσο οι διακριτοί αριθμοί όσο και οι συνεχείς αριθμοί.⁸⁹ Την ίδια ιστορική περίοδο, δηλ. το δεύτερο μισό του 17^{ου} αιώνα και στις αρχές του 18^{ου} αιώνα, η αριθμητική ισότητα άρχισε να αποδεσμεύεται από την ισότητα με αναλογίες και να καθιερώνονται οι αριθμητικές εξισώσεις εν γένει.⁹⁰
2. Η έννοια του χώρου αναπτύχθηκε, στην πρώιμη Αναγέννηση, με την εισαγωγή και καλλιέργεια της Γραμμικής Προοπτικής. Και με την αλλαγή αυτή, δεν άλλαξε μόνο η φύση της αναπαράστασης του χώρου, αλλά δημιουργήθηκε και η ιδέα του συστήματος αναφοράς, η οποία γονιμοποίησε την Αναλυτική Γεωμετρία, στα μέσα του 17^{ου} αιώνα, και την Παραστατική Γεωμετρία, αργότερα. Παράλληλα, η ίδια ρίζα εξέθρεψε και την προβολική αντίληψη στη Γεωμετρία.⁹¹ Στα δύο αυτά ρεύματα της Γεωμετρίας, η έννοια του χώρου ανανεώθηκε, σε σχέση με την παράδοση των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, με πιο θεαματική μετεξέλιξη, στις Μη-Ευκλείδειες Γεωμετρίες. Ωστόσο, η Προβολική Γεωμετρία έπαιξε καταλυτικό ρόλο στην αναδιοργάνωση της γεωμετρικής σκέψης τον 19^ο αιώνα. Κι αυτή η νέα ώθηση που δόθηκε από την Προβολική Γεωμετρία, δεν οφείλεται, μόνο, στη συσσώρευση νέων θεωρημάτων και ορισμών, αλλά στην εισαγωγή νέων επιστημολογικών βάσεων, όπως η *Αρχή της*

⁸⁸ Βλ. Kambartel, F.: *Mathematics and the Concept Theory*, in *Suppes, P., et al (eds.): Logic, Methodology and Philosophy of Science*, IV, North-Holland Publ., 1973, pp. 210-219, Kitcher, Ph.: *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford Univ. Press, 1983 και Guzmán de, M.: *The Origin and Evolution of Mathematical Theories, Implications for Mathematical Education, Selected Lectures from the 7th International Congress on Mathematical Education*, Québec, 17-23 August, 1992, σελ. 147-155.

⁸⁹ Βλ. Bos, H.J.M.: *Der doppelte Auftakt zur frühneuzeitlichen Algebra: Viète und Descartes*, στο Scholz, E.(ed.): *Geschichte der Algebra. Eine Einführung*, Wissenschaftsverlag, 1990, σελ. 183-234, ειδ. σελ. 223-234, και Bos, H.J.M.: *Philosophical Challenges from History of Mathematics*, στο Kjeldse, T.H. et al (eds.): *New Trends in the History and Philosophy of Mathematics*, University Press of Southern Denmark, 2004, σελ. 51-66.

⁹⁰ Βλ. Sasaki, Ch.: *The Acceptance of the Theory of Proportion in the Sixteenth and Seventeenth Centuries*, *Historia Scientiarum*, 29, 1985, σελ. 83-116, ειδ. σελ. 113-116, Malet, A.: *Changing Notions of Proportionality in Pre-Modern Mathematics*, *Asclepio*, 42(1), 1990, σελ. 183-211, και Boyer, C.B.: *Proportion, Equation, Fiction: Three Steps in the Development of a Concept*, *Scripta Mathematica*, 12, 1946, σελ. 5-13, ειδ. σελ. 11-12.

⁹¹ Βλ. Kemp, M.: *The Science of Art*, Yale Univ. Press, 1990, σελ.221-249.

Συνέχειας, που πρότεινε ο Jean Victor Poncelet (1788-1867), σύμφωνα με την οποία, “τα γεωμετρικά σχήματα προέρχονται το ένα από το άλλο με συνεχή αλλαγή, διατηρώντας το καθένα τις ιδιότητες του άλλου”⁹².

Πρόκειται για μια νέα επιστημολογική συσχέτιση των γεωμετρικών γνώσεων, η οποία αποδέσμευσε τη Γεωμετρία από τους φραγμούς της γεωμετρικής εποπτείας.⁹³ Γεγονός, που δεν άφησε αδιάφορους τους πρωτοπόρους των Μη-Ευκλείδειων Γεωμετριών: Nikolai I. Lobachevsky (1792-1856) και János Bolyai (1802-1860).⁹⁴

3. Η θεωρία πιθανοτήτων είχε μια “ριζοσπαστικά διαφορετική πορεία”, από τις αρχές του 20^{ου} αιώνα.⁹⁵ Επηρεάστηκε από τη συνολοθεωρία, τη θεωρία μέτρου και το νέο πνεύμα της αξιωματικοποίησης των Μαθηματικών, μ’ αποτέλεσμα να αναδιοργανωθεί και να καθιερωθεί, ως επιστημονικός κλάδος, λίγο πριν τον Β΄ Παγκόσμιο Πόλεμο. Τότε, αναδείχθηκε και εδραιώθηκε, στο επίκεντρο της πιθανοθεωρητικής σκέψης, η σχέση της στοχαστικής ανεξαρτησίας, η οποία απουσίαζε ή ήταν σε υπολανθάνουσα κατάσταση στις προσεγγίσεις και μελέτες των πιθανοτήτων πριν το 1900.⁹⁶

Γίνεται φανερό ότι οι αλλαγές των μαθηματικών εννοιών είναι στενά δεμένες με τις αλλαγές των μαθηματικών θεωριών και με τους αντίστοιχους μεταγνώστικους εμπλουτισμούς τους. Κι αυτές οι αναθεωρήσεις, συνήθως, προκαλούνται, ισχυροποιούνται και επικρατούν στα πλαίσια γενικότερων απαιτήσεων, ανακατατάξεων και συλλογικών τάσεων αναπροσανατολισμού της, εκάστοτε, επιστημονικής σκέψης.

IV. ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Η επισήμανση της γνωστικής δυναμικής των εννοιολογικών αλλαγών στα Μαθηματικά, δεν είναι τίποτα άλλο από μια προσπάθεια εδραίωσης και διεύρυνσης της συνειδητοποίησης των σχετικών επιστημονικών και παιδαγωγικών δραστηριοτήτων, που αναπτύσσονται στην Ελλάδα, στην Ευρώπη και στον κόσμο όλο. Μια προσπάθεια, η οποία προσανατολίζεται προς τους Έλληνες μαθηματικούς και, ιδιαίτερα, στους Έλληνες μαθηματικούς της εκπαίδευσης. Και επιδιώκει, προσδοκά, να ανοίξει ο επιστημολογικός τους ορίζοντας προς τη νέα επιστημονική

⁹² Βλ. Daston, L.J.: The Physicalist Tradition in Early Nineteenth Century French Geometry, *Studies in History and Philosophy of Science*, 17(3), 1986, σελ. 269-295, ειδ. σελ. 285.

⁹³ Βλ. Λαδόπουλου, Παν. Δ.: *Στοιχεία Προβολικής Γεωμετρίας*, τόμος Α΄, Αθήναι, 1971, σελ. 10.

⁹⁴ Βλ. Withers, J.W.: *Euclid's Parallel Postulate: Its Nature, Validity, and Place In Geometrical Systems*, The Open Court Publ., 1905, σελ. 43, Halsted, G.B.: Report on Progress in Non-Euclidean Geometry, *The American Mathematical Monthly*, 6(10), 1899, σελ. 219-233, ειδ. σελ. 224. Επίσης βλ. Rosenfeld, B.A.: The Analytic Principle of Continuity, *The American Mathematical Monthly*, 112(8), 2005), σελ. 743-748, ειδ. σελ. 743.

⁹⁵ Βλ. Boyer, C.B. & Merzttbach, U.C.: *Η Ιστορία των Μαθηματικών*, εκδ. Γ.Α. Πνευματικού, 1997, σελ. 703.

⁹⁶ Βλ. Κας, Μ.: *Αινίγματα της Τύχης*, εκδ. Κάτοπτρο, 1996, σελ. 107 κ.ε., Dahl, H.: Teaching Independence, *Teaching Statistics*, 95(2), 1994, σελ. 34-37, Bingham, N.H., πρ. παρ. 56, σελ. 145, de Tari, A. d’A. & Diblasi, A.: Analysis of Didactic Situations Suggested to Distinguish Disjunctive Events and Independent Events, *International Conference on Teaching Statistics-7*, Publ. International Association for Statistical Education, 2006, <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/17/C333.pdf>

και μαθηματική ορθολογικότητα κι έτσι να δημιουργηθεί ένα νέο υπόβαθρο για την ανάπτυξη της σύγχρονης μαθηματικής νοοτροπίας, κατανόησης και συμπεριφοράς.

Η έμφαση στην ιστοριογραφία των Μαθηματικών, μέσα από την οπτική γωνία των εννοιολογικών αλλαγών, δεν είναι μια απλή συνειδητοποίηση κάποιων, ήδη, διαδεδομένων απόψεων και πρακτικών. Αλλά, μια απόπειρα διεξόδου σε μια νέα περιοχή, μεθοδολογικής και φιλοσοφικής απόχρωσης, που, σε μεγάλο βαθμό, είναι αδιερεύνητη, μέχρι σήμερα. Και η παρακίνηση, το ενδιαφέρον, ή η αξιοποίηση, αυτής, της νέας διάστασης στη μαθηματική σκέψη, δίνει μια ευκαιρία για εμβάθυνση στο παρασκήνιο της μαθηματικής σκέψης. Παράλληλα, δίνεται η δυνατότητα να αναδειχθεί η ουσία της μαθηματικής παιδείας, γιατί οι ιστορικές προσεγγίσεις, αυτού του είδους, μπορούν να φωτίσουν τις πολιτισμικές ιδιαιτερότητες των επιστημολογικών ανανεώσεων και υπερβάσεων, στην πορεία ανάπτυξης της μαθηματικής γνώσης. Προβάλλεται, κατά συνέπεια, μια άλλου τύπου μαθηματική νοοτροπία, απ' αυτή που περιορίζει τη μαθηματική παιδεία στην αντίληψη των Μαθηματικών ως συσσώρευση μεταφυσικών εκλάμψεων εμπνευσμένων επιστημόνων.

Αξίζει να σημειωθεί, ότι η συγκεκριμένη οπτική γωνία της ιστορίας των Μαθηματικών είναι πλήρως συμβατή και διαπλέκεται με τον “κατασκευαστισμό” (ή κονστρουκτιβισμό), που σήμερα επηρεάζει την επιστημολογία των Μαθηματικών και τη μαθηματική εκπαίδευση.