Διευρυμένος μετασχηματισμός ομοιότητας για υψόμετρα GPS και αποχές γεωειδούς μεταξύ διαφορετικών γεωδαιτικών συστημάτων αναφοράς

Χ. ΚΩΤΣΑΚΗΣ
Επίκουρος Καθηγητής, Α.Π.Θ

Κ. ΚΑΤΣΑΜΠΑΛΟΣ
Καθηγητής, Α.Π.Θ

Δ. ΑΜΠΑΤΖΙΔΗΣ
Μεταπτυχιακός Φοιτητής, Α.Π.Θ

Περίληψη
Ο μετασχηματισμός υψομετρικής πληροφορίας σε σχέση με κάποιο ελλειψοειδές-εκ-περιστροφής (ΕΕΠ) μεταξύ διαφορετικών γεωδαιτικών συστημάτων αναφοράς (ΓΣΑ) είναι μία σημαντική διαδικασία για πολλές γεωδαιτικές, τοπογραφικές και χαρτογραφικές εργασίες. Λαμβάνοντας υπόψη το ευρύ φάσμα πρακτικών εφαρμογών που σχετίζονται με την παραπάνω διαδικασία, στην παρούσα εργασία εξετάζεται η μεθοδολογία μετασχηματισμού υψομέτρων GPS και αποχών γεωειδούς μεταξύ διαφορετικών ΓΣΑ, όταν είναι γνωστές οι παράμετροι μετάθεσης, στροφής και κλίμακας που συνδέουν τα 3Δ συστήματα Καρτεσιανών συντεταγμένων τα οποία συνοδεύουν κάθε ΓΣΑ. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στη σημαντική επίδραση που έχει η διαφορά κλίμακας μεταξύ των εμπλεκόμενων ΓΣΑ στο μετασχηματισμό υψομέτρων σε σχέση με κάποιο γήινο ΕΕΠ αναφοράς (το οποίο προσαρμόζεται κάθε φορά στο αντίστοιχο ΓΣΑ). Η παρούσα εργασία αναλύει ενδελεχώς τα παραπάνω ζητήματα και παρουσιάζει το αναγκαίο μαθηματικό υπόβαθρο για την αντιμετώπισή τους.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το πρόβλημα του μετασχηματισμού υψομετρικής πληροφορίας σε σχέση με κάποιο γήινο μοντέλο ελλειψοειδούς-εκ-περιστροφής (ΕΕΠ), από ένα γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς (ΓΣΑ) σε κάποιο άλλο, είναι μία σημαντική διαδικασία για πολλές γεωδαιτικές, τοπογραφικές και χαρτογραφικές εφαρμογές.

Όταν κάνουμε λόγο για υψομετρική πληροφορία σε σχέση με ένα ΕΕΠ αναφοράς εννοούμε είτε τα γεωμετρικά υψόμετρα, τα οποία λαμβάνονται συνήθως μέσω δορυφορικών μετρήσεων GPS (ή μέσω παρατηρήσεων δορυφορικής αλτιμετρίας, αν πρόκειται για σημεία που βρίσκονται στη θάλασσα), είτε τις αποχές του γεωειδούς (πολλές φορές καλούνται και υψόμετρα του γεωειδούς), οι οποίες υπολογίζονται μέσω παγκόσμιων γεωδυναμικών μοντέλων βαρύτητας ή μέσω ειδικών λύσεων αριθμητικής ολοκλήρωσης χρησιμοποιώντας τοπικά δεδομένα βαρύτητας.

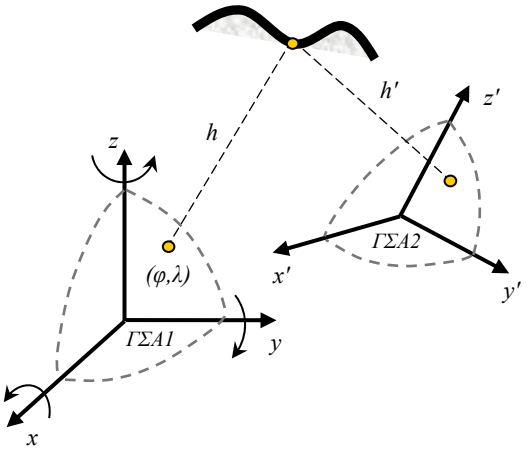
Ο συνδυασμός αυτών των δύο διαφορετικών τύπων υψομετρικής πληροφορίας είναι ιδιαίτερα χρήσιμος για τον έμμεσο προσδιορισμό ορθομετρικών υψομέτρων (ως προς τη μέση στάθμη της θάλασσας - ΜΣΘ), χωρίς την ανάγκη εκτέλεσης γεωμετρικής χωροστάθμησης ή ειδικών τεχνικών τριγωνομετρικής υψομετρίας [3, 9]. Η πρακτική αυτή έχει ήδη αρχίσει να εφαρμόζεται για μεγάλο αριθμό γεωδαιτικών και τοπογραφικών εργασιών σε πολλές χώρες, καθιερώνοντας την έννοια ενός σύγχρονου κατακόρυφου ή χωροσταθμικού συστήματος αναφοράς (vertical reference system), το οποίο υλοποιείται αποκλειστικά μέσω δορυφορικών μετρήσεων GPS και ενός βαρυτημετρικού μοντέλου γεωειδούς με υψηλή ακρίβεια και διακριτική ανάλυση [2, 14]. Άλλες σημαντικές εφαρμογές που βασίζονται στην κοινή επεξεργασία ετερογενών υψομετρικών δεδομένων σε σχέση με ένα ΕΕΠ αναφοράς είναι: η μελέτη των διαχρονικών μεταβολών του στερεού φλοιού ή/και του βαρυτικού πεδίου της Γης, η μελέτη των μεταβολών της μέσης στάθμης της θάλασσας μέσω μετρήσεων δορυφορικής αλτιμετρίας, η αξιολόγηση των σύγχρονων γεωδυναμικών μοντέλων βαρύτητας με βάση υψόμετρα γεωειδούς που υπολογίζονται από δορυφορικές μετρήσεις GPS και επίγειες χωροσταθμήσεις, καθώς και η προσαρμογή υπαρχόντων μοντέλων γεωειδούς ώστε να είναι συμβατά με τις τρέχουσες υλοποιήσεις των σύγχρονων παγκόσμιων 3Δ ΓΣΑ.

Από θεωρητική σκοπιά, η κοινή επεξεργασία υψομέτρων GPS και αποχών του γεωειδούς απαιτεί να είναι γνωστές οι τιμές τους σε ένα ενιαίο (κοινό) σύστημα αναφοράς. Λαμβάνοντας υπόψη την ανάγκη αυτή και μέσα στο πλαίσιο των διαφόρων εφαρμογών που αναφέρθηκαν προηγουμένως, το αντικείμενο της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη του μετασχηματισμού υψομετρικής πληροφορίας, εξαρτώμενης από κάποιο ΕΕΠ αναφοράς, μεταξύ διαφορετικών 3Δ ΓΣΑ για τα οποία γνωρίζουμε εξ'αρχής τις παραμέτρους της σχετικής τους θέσης, προσανατολισμού και διαφοράς κλίμακας (βλέπε σχήμα 1). Συγκεκριμένα, γίνεται αναλυτική παρουσίαση της μεθοδολογίας μετασχηματισμού τόσο για γεωμετρικά υψόμετρα που προέρχονται από μετρήσεις GPS, όσο και για υψόμετρα γεωειδούς που υπολογίζονται απευθείας μέσω κάποιου γεωδυναμικού μοντέλου βαρύτητας ή μέσω άλλων

Υποβλήθηκε: 25.5.2007 Έγινε δεκτή: 20.7.2007

ειδικών βαρυτημετρικών τεχνικών.

Μία παρόμοια προσέγγιση με αυτή που παρουσιάζεται στην παρούσα εργασία είναι δυνατό να ακολουθηθεί και για το μετασχηματισμό άλλων τύπων υψομετρικής πληροφορίας, εξαρτώμενης πάντα από ένα ΕΕΠ αναφοράς, όπως είναι τα υψόμετρα της ΜΣΘ που προσδιορίζονται από αλτιμετρικά δεδομένα, και η ανωμαλία ύψους που υπολογίζεται από ένα μοντέλο σφαιρικών αρμονικών του γήινου δυναμικού βαρύτητας.



Σχήμα 1: Μετασχηματισμός γεωμετρικών (ελλειψοειδών) υψομέτρων ανάμεσα σε διαφορετικά γεωδαιτικά συστήματα αναφοράς.

Figure 1: Geometrical (ellipsoidal) height transformation between different geodetic reference frames.

Χρησιμοποιώντας το μαθηματικό πρότυπο του Ευκλείδειου μετασχηματισμού ομοιότητας και θεωρώντας τη γενικότερη περίπτωση όπου υπάρχει μη-μηδενική διαφορά κλίμακας ανάμεσα στα σχετιζόμενα συστήματα αναφοράς, ένας σημαντικός παράγοντας επίδρασης στα μετασχηματιζόμενα υψόμετρα (γεωμετρικά ή γεωειδούς) από ένα ΓΣΑ σε κάποιο άλλο (π.χ. WGS84 → ITRF2000) είναι η «προσαρμογή» ή μη του επιλεγμένου ΕΕΠ στη μετρητική κλίμακα του νέου ΓΣΑ.

Ανεξάρτητα από τη φυσική σημασία που μπορούμε να προσδώσουμε στην ύπαρξη διαφορετικής μετρητικής κλίμακας ανάμεσα σε δύο ΓΣΑ (π.χ εξ'αιτίας αποκλίσεων στις χαρακτηριστικές τιμές βασικών γεωδαιτικών «σταθερών» που χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό των συντεταγμένων στα σημεία υλοποίησης, ύπαρξη συστηματικών σφαλμάτων που προέρχονται από τις τεχνικές μέτρησης ή/και το μαθηματικό μοντέλο ανάλυσης που χρησιμοποιήθηκε, κτλ.), μπορεί να διατυπωθεί το εξής ερώτημα:

> *«ένα συμβατικά επιλεγμένο ΕΕΠ αναφοράς (π.χ GRS80) θα πρέπει να διατηρεί την αριθμητική τιμή του μεγάλου ημιάξονά του σε οποιοδήποτε ΓΣΑ και αν προσαρμόζεται, ή θα πρέπει η τιμή αυτή να αλλάζει ανάλογα με τη μετρητική κλίμακα του εκάστοτε 3Δ συστήματος Καρτεσιανών συντεταγμένων που συνοδεύει το αντίστοιχο ΓΣΑ;»*

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να αναφερθεί ότι με τον όρο «μετρητική κλίμακα» ενός ΓΣΑ εννοούμε τη γραμμική κλίμακα μέτρησης αποστάσεων, η οποία υλοποιείται μέσω των γνωστών Καρτεσιανών συντεταγμένων (x, y, z) σε ένα δίκτυο επίγειων σημείων ελέγχου.

Η σκοπιμότητα του προηγούμενου ερωτήματος δεν γίνεται συνήθως άμεσα αντιληπτή, αφού η χρήση ενός ΕΕΠ αναφοράς για γεωδαιτικούς υπολογισμούς βασίζεται σε μία κατεξοχήν συμβατική επιλογή, η οποία δεν έχει κανένα λόγο να υπαγορεύεται από τις διαφορές μετρητικής κλίμακας ανάμεσα στα διάφορα ΓΣΑ που ενδέχεται να το χρησιμοποιήσουν. Παρόλα αυτά, αν θεωρήσουμε το ΕΕΠ ως ένα σταθερό μοντέλο γεωμετρικής περιγραφής της επιφάνειας της Γης, με συγκεκριμένο φυσικό σχήμα και μέγεθος (όπως ορίζεται, για παράδειγμα, μέσω γνωστών αριθμητικών τιμών για το μήκος του μεγάλου ημιάξονα και της επιπλάτυνσής του), τότε η χρήση του από διαφορετικά ΓΣΑ θα πρέπει να εξασφαλίζει τη διατήρηση του φυσικού του μεγέθους, ανεξάρτητα από τη μετρητική κλίμακα που χρησιμοποιείται στο κάθε σύστημα αναφοράς.

Κατά αυτόν τον τρόπο, η χρήση ενός ΕΕΠ από διαφορετικά ΓΣΑ με ταυτόχρονη δέσμευση για διατήρηση του φυσικού μεγέθους του (θεωρώντας δηλαδή το ΕΕΠ ως ένα φυσικό σώμα με σταθερές διαστάσεις) επιβάλλει να υιοθετήσουμε διαφορετικές τιμές για το μήκος του μεγάλου ημιάξονά του στο εκάστοτε ΓΣΑ, σύμφωνα με τη γενική σχέση α' = (1+δs) α. Σε αυτή την περίπτωση, η τιμή α αντιστοιχεί στο μήκος του μεγάλου ημιάξονα του ΕΕΠ αναφοράς που προσαρμόζεται σε ένα αρχικό ΓΣΑ, ενώ η τιμή α' αντιστοιχεί στο μήκος του μεγάλου ημιάξονα του ίδιου ΕΕΠ, όταν αυτό προσαρμόζεται σε ένα νέο ΓΣΑ που παρουσιάζει διαφορά κλίμακας κατά ένα διαφορικό συντελεστή δs, σε σχέση με το αρχικό ΓΣΑ. Η επιπλάτυνση του ΕΕΠ δεν χρειάζεται να μεταβληθεί σε αυτή την περίπτωση, εφόσον είναι ένα αδιάστατο μέγεθος που δεν επηρεάζεται από τυχόν διαφορές στη μετρητική κλίμακα των αντίστοιχων ΓΣΑ.

Η προηγούμενη θεώρηση για τη διατήρηση των φυσικών διαστάσεων του ΕΕΠ αναφοράς, όταν αυτό χρησιμοποιείται από διαφορετικά ΓΣΑ, έχει σημαντική πρακτική αξία για εργασίες υψομετρικού προσδιορισμού μέσω μετρήσεων GPS. Για παράδειγμα, ο έλεγχος κατακόρυφων μετακινήσεων σε σύγχρονα 3Δ δίκτυα ελέγχου γίνεται συνήθως μέσα από μία κοινή επεξεργασία διάφορων γεωδαιτικών (δορυφορικών και επίγειων) δεδομένων, τα οποία συλλέγονται σε διαφορετικές χρονικές εποχές και αναφέρονται συνήθως σε ξεχωριστά ΓΣΑ. Η αγνόηση της έμμεσης επίδρασης (λόγω των μεταβολών μετρητικής κλίμακας ανάμεσα στα διάφορα ΓΣΑ) στο σχήμα και μέγεθος του εκάστοτε ΕΕΠ αναφοράς, μπορεί να προκαλέσει σημαντικές φαινόμενες μεταβολές στα προσδιοριζόμενα υψόμετρα, οι οποίες δεν αντιστοιχούν κατά ανάγκη σε πραγματικές κατακόρυφες μετακινήσεις των σημείων ελέγχου στο χώρο.

Η παρούσα εργασία παρουσιάζει ένα διευρυμένο μοντέλο μετασχηματισμού ομοιότητας για υψόμετρα εξαρτώμενα από ένα ΕΕΠ αναφοράς, δίνοντας έμφαση στην «αποδέσμευση» των μεταβολών τους που προέρχονται από: (α) τη

διαφορά μετρητικής κλίμακας μεταξύ του αρχικού και του νέου ΓΣΑ, (β) την έμμεση επίδραση της διαφοράς κλίμακας των ΓΣΑ στο σχήμα και μέγεθος των αντίστοιχων ΕΕΠ αναφοράς, και (γ) την ενδεχόμενη πραγματική αλλαγή των φυσικών διαστάσεων του ΕΕΠ αναφοράς που πρόκειται να χρησιμοποιηθεί στο νέο ΓΣΑ.

2. ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

x, y, z	Καρτεσιανές συντεταγμένες ως προς κάποιο 3Δ ΓΣΑ.
φ, λ, h	Καμπυλόγραμμες γεωδαιτικές συντεταγμένες ως προς κάποιο 3Δ ΓΣΑ, με αναφορά ένα δεδομένο ΕΕΠ.
t_x, t_y, t_z	Παράμετροι μετάθεσης μεταξύ διαφορετικών 3Δ ΓΣΑ.
ε_x, ε_y, ε_z	Γωνίες στροφής μεταξύ διαφορετικών 3Δ ΓΣΑ.
δs	Διαφορικός συντελεστής αλλαγής κλίμακας μεταξύ διαφορετικών 3Δ ΓΣΑ.
h	Γεωμετρικό υψόμετρο ως προς κάποιο 3Δ ΓΣΑ, σε σχέση με κάποιο δεδομένο ΕΕΠ αναφοράς.
N	Υψόμετρο γεωειδούς ως προς κάποιο 3Δ ΓΣΑ, σε σχέση με κάποιο δεδομένο ΕΕΠ αναφοράς.
α	Μήκος του μεγάλου ημιάξονα του ΕΕΠ αναφοράς.
f	Επιπλάτυνση του ΕΕΠ αναφοράς.
δα	Αλλαγή της αριθμητικής τιμής του μεγάλου ημιάξονα του ΕΕΠ αναφοράς, κατά τη μετάβαση από ένα ΓΣΑ σε κάποιο άλλο.
$\delta\bar{a}$	Αλλαγή του φυσικού μήκους του μεγάλου ημιάξονα του ΕΕΠ αναφοράς, κατά τη μετάβαση από ένα ΓΣΑ σε κάποιο άλλο.
W και N	Ακτίνα καμπυλότητας της κύριας ή πρώτης καθέτου

3. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΓΙΑ ΥΨΟΜΕΤΡΑ ΕΞΑΡΤΩΜΕΝΑ ΑΠΟ ΤΟ ΕΕΠ ΑΝΑΦΟΡΑΣ

3.1 Υψόμετρα GPS

Ο μετασχηματισμός γεωμετρικών υψομέτρων από ένα αρχικό σύστημα αναφοράς (ΓΣΑ1) σε ένα άλλο σύστημα αναφοράς (ΓΣΑ2), σε σχέση με κάποιο ΕΕΠ, θα βασιστεί στο γνωστό μοντέλο του 3Δ Ευκλείδιου μετασχηματισμού ομοιότητας. Το μοντέλο αυτό χρησιμοποιείται συνήθως για τον απ'ευθείας μετασχηματισμό Καρτεσιανών συντεταγμένων, μεταξύ δύο ορθογωνίων συστημάτων αναφοράς που διαφέρουν κατά τρεις παραμέτρους μετάθεσης, τρεις παραμέτρους προσανατολισμού και ένα συντελεστή ομοιόμορφης αλλαγής της μετρητικής τους κλίμακας, και έχει τη γενική μορφή [7, 10, 11, 19]

$$\begin{bmatrix} x'-x \\ y'-y \\ z'-z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta s & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & \delta s & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & \delta s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

Η γραμμική εξίσωση μετασχηματισμού (3.1) προέρχεται από μία διαδικασία γραμμικοποίησης του αυστηρού, μη-γραμμικού, σύμμορφου μετασχηματισμού Καρτεσιανών συντεταγμένων κατά Helmert [7, 10]:

$$\mathbf{x}'_{\Gamma\Sigma A2} = \mathbf{t} + (1+\delta s)\,\mathbf{R}(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)\,\mathbf{x}_{\Gamma\Sigma A1} \tag{3.2}$$

όπου **R** είναι ένας ορθογώνιος πίνακας που πραγματοποιεί τρεις διαδοχικές και ανεξάρτητες στροφές των αξόνων του ΓΣΑ1 ώστε να επιτευχθεί παραλληλία με τους αντίστοιχους άξονες του ΓΣΑ2, $\mathbf{t} = [t_x\ t_y\ t_z]^T$ είναι το διάνυσμα των Καρτεσιανών συντεταγμένων της αρχής του ΓΣΑ1 σε σχέση με το ΓΣΑ2, δs είναι ένας αδιάστατος διαφορικός συντελεστής κλίμακας ανάμεσα στα δύο συστήματα αναφοράς, $\mathbf{x}_{\Gamma\Sigma A1} = [x\ y\ z]^T$ είναι το διάνυσμα των Καρτεσιανών συντεταγμένων ενός αυθαίρετου σημείου ως προς το ΓΣΑ1, και $\mathbf{x'}_{\Gamma\Sigma A2} = [x'\ y'\ z']^T$ είναι το διάνυσμα των Καρτεσιανών συντεταγμένων του ίδιου σημείου ως προς το ΓΣΑ2 (βλέπε σχήμα 1).

Η χρήση του γραμμικοποιημένου μοντέλου της εξίσωσης (3.1), αντί του αυστηρού μη-γραμμικού μοντέλου της εξίσωσης (3.2), προκαλεί 0ασήμαντες απώλειες στην ακρίβεια των μετασχηματισμένων συντεταγμένων (<1mm) και εφαρμόζεται σε όλες τις γεωδαιτικές εργασίες όπου η τάξη μεγέθους των παραμέτρων στροφής και κλίμακας είναι μικρότερη του 10^{-5} [7].

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι, σε αντίθεση με τη σύμβαση που χρησιμοποιείται από τη Διεθνή Υπηρεσία Περιστροφής της Γης και Συστημάτων Αναφοράς (IERS) για το μετασχηματισμό ομοιότητας μεταξύ παγκοσμίων γεωδαιτικών συστημάτων αναφοράς [11], το μοντέλο της εξίσωσης (3.1) χρησιμοποιεί τις στροφές των αξόνων του αρχικού ΓΣΑ ως προς το τελικό ΓΣΑ, διατηρώντας ωστόσο (όπως και τα μοντέλα της IERS) τη σύμβαση του θετικού προσήμου για αριστερόστροφη φορά (counter-clockwise) των αξονικών στροφών [19].

Προκειμένου να δημιουργήσουμε ένα απλό μαθηματικό μοντέλο για τον απ'ευθείας μετασχηματισμό ομοιότητας γεωμετρικών υψομέτρων που υπολογίζονται από μετρήσεις GPS, η εξίσωση (3.1) θα πρέπει να συνδυαστεί με τη γνωστή σχέση που συνδέει τις Καρτεσιανές με τις καμπυλόγραμμες γεωδαιτικές συντεταγμένες ενός οποιουδήποτε σημείου στο χώρο:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathsf{N}+h)\cos\varphi\cos\lambda \\ (\mathsf{N}+h)\cos\varphi\sin\lambda \\ (\mathsf{N}(1-e^2)+h)\sin\varphi \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

όπου N είναι η ακτίνα καμπυλότητας της πρώτης κάθετης τομής στο ΕΕΠ αναφοράς (δεν πρέπει να συγχέεται με το N που συμβολίζει το υψόμετρο του γεωειδούς)

$$\mathsf{N} = \frac{a}{W} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} \tag{3.4}$$

Οι ποσότητες a και e αντιστοιχούν στο μήκος του μεγάλου ημιάξονα και την εκκεντρότητα του ΕΕΠ αναφοράς που επιλέγεται για τον ορισμό και τον υπολογισμό των γεωδαιτικών συντεταγμένων (φ, λ, h) που εμφανίζονται στη σχέση (3.3).

Διαφορίζοντας την εξίσωση (3.3) ως προς τη μεταβολή των καμπυλόγραμμων γεωδαιτικών συντεταγμένων, παίρνουμε τη γραμμική σχέση:

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} d\varphi \\ d\lambda \\ dh \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

όπου J είναι ένας Ιακωβιανός πίνακας μερικών παραγώγων που έχει την εξής μορφή [18]:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -(\mathsf{M}+h)\sin\varphi\cos\lambda & -(\mathsf{N}+h)\cos\varphi\sin\lambda & \cos\varphi\cos\lambda \\ -(\mathsf{M}+h)\sin\varphi\sin\lambda & (\mathsf{N}+h)\cos\varphi\cos\lambda & \cos\varphi\sin\lambda \\ (\mathsf{M}+h)\cos\varphi & 0 & \sin\varphi \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

Ο όρος $M = a(1-e^2)/W^3$ αντιστοιχεί στη μεσημβρινή ακτίνα καμπυλότητας του ΕΕΠ αναφοράς, ενώ ο όρος W αναφέρεται στη βοηθητική αδιάστατη ποσότητα $(1-e^2\sin^2\varphi)^{1/2}$ που μεταβάλλεται ανάλογα με το γεωδαιτικό πλάτος του εκάστοτε σημείου.

Αντικαθιστώντας το αριστερό μέλος της εξίσωσης (3.5) σύμφωνα με το βασικό μοντέλο του 3Δ μετασχηματισμού ομοιότητας (δηλαδή dx = x'−x, dy = y'−y, dz = z'−z) και επιλύοντας στη συνέχεια ως προς dh, παίρνουμε την ακόλουθη εξίσωση που εκφράζει το γραμμικοποιημένο μετασχηματισμό ομοιότητας για τα γεωμετρικά υψόμετρα μεταξύ δύο διαφορετικών ΓΣΑ:

$$\begin{aligned} h' - h &= \delta h(t_x) + \delta h(t_y) + \delta h(t_z) \\ &\quad + \delta h(\varepsilon_x) + \delta h(\varepsilon_y) + \delta h(\delta s) \end{aligned} \tag{3.7}$$

όπου οι επιμέρους όροι του μετασχηματισμού δίνονται από τις σχέσεις:

$$\delta h(t_x) = t_x \cos\varphi\cos\lambda \tag{3.8}$$

$$\delta h(t_y) = t_y \cos\varphi\sin\lambda \tag{3.9}$$

$$\delta h(t_z) = t_z \sin\varphi \tag{3.10}$$

$$\delta h(\varepsilon_x) = -\varepsilon_x \mathsf{N} e^2 \sin\varphi\cos\varphi\sin\lambda \tag{3.11}$$

$$\delta h(\varepsilon_y) = \varepsilon_y \mathsf{N} e^2 \sin\varphi\cos\varphi\cos\lambda \tag{3.12}$$

$$\delta h(\delta s) = (aW + h)\,\delta s \tag{3.13}$$

Σημειώνεται ότι εξαιτίας της περιστροφικής συμμετρίας του ΕΕΠ αναφοράς ως προς τον άξονα 'z' του αντίστοιχου ΓΣΑ, η γωνία στροφής ε_z δεν προκαλεί καμία επίδραση στο μετασχηματισμό των γεωμετρικών υψομέτρων από το ένα σύστημα αναφοράς στο άλλο. Περισσότερες λεπτομέρειες για την παραπάνω διαδικασία του διαφορικού υψομετρικού μετασχηματισμού ομοιότητας δίνονται στις εργασίες [12, 16, 18, 20].

3.2 Υψόμετρα γεωειδούς

Οι εξισώσεις (3.7) έως (3.13) υλοποιούν τον αλγόριθμο για τον ευθύ μετασχηματισμό ομοιότητας γεωμετρικών υψομέτρων από ένα ΓΣΑ προς κάποιο άλλο, σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου με γνωστές καμπυλόγραμμες γεωδαιτικές συντεταγμένες ως προς το αρχικό σύστημα αναφοράς.

Αν θεωρήσουμε ότι το σημείο υπολογισμού βρίσκεται πάνω στο γεωειδές, τότε η εξίσωση (3.7) ανάγεται στο γραμμικοποιημένο μοντέλο μετασχηματισμού ομοιότητας για τα υψόμετρα του γεωειδούς [22]:

$$\begin{aligned} N' - N &= \delta N(t_x) + \delta N(t_y) + \delta N(t_z) \\ &\quad + \delta N(\varepsilon_x) + \delta N(\varepsilon_y) + \delta N(\delta s) \end{aligned} \tag{3.14}$$

όπου

$$\delta N(t_x) = t_x \cos\varphi\cos\lambda \tag{3.15}$$

$$\delta N(t_y) = t_y \cos\varphi\sin\lambda \quad (3.16$$

$$\delta N(t_z) = t_z \sin\varphi \tag{3.17}$$

$$\delta N(\varepsilon_x) = -\varepsilon_x \mathsf{N} e^2 \sin\varphi\cos\varphi\sin\lambda \tag{3.18}$$

$$\delta N(\varepsilon_y) = \varepsilon_y \mathsf{N} e^2 \sin\varphi\cos\varphi\cos\lambda \tag{3.19}$$

Εφόσον τώρα το σημείο υπολογισμού τοποθετείται στην επιφάνεια του γεωειδούς, το γεωμετρικό του υψόμετρο θα είναι ίσο με την αποχή του γεωειδούς σε σχέση με το ίδιο ΓΣΑ (h = N). Κατά συνέπεια, ο όρος που δίνεται από την εξίσωση (3.13) και ο οποίος εκφράζει την επίδραση λόγω της διαφοράς κλίμακας ανάμεσα στα δύο ΓΣΑ, θα πρέπει να πάρει την εξής μορφή:

$$\delta N(\delta s) = (aW + N)\,\delta s \tag{3.20}$$

όπου N είναι το υψόμετρο του γεωειδούς ως προς το αρχικό σύστημα αναφοράς.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι καμπυλόγραμμες γεωδαιτικές συντεταγμένες, φ και λ, που πρέπει να εισαχθούν στις εξισώσεις μετασχηματισμού (3.15) έως (3.20), αναφέρονται στην επιφανειακή θέση του συγκεκριμένου σημείου υπολογισμού (το οποίο θεωρήθηκε ότι βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια του γεωειδούς) ως προς το αρχικό ΓΣΑ. Στην πράξη οι συντεταγμένες φ και λ αντιστοιχούν συνήθως στη γνωστή επιφανειακή θέση ενός επίγειου σημείου ως προς ένα αρχικό σύστημα αναφοράς (ΓΣΑ1), στο οποίο είναι επίσης γνωστή

η αποχή N του γεωειδούς και ζητείται ο μετασχηματισμός της σε κάποιο άλλο σύστημα αναφοράς (ΓΣΑ2).

Σχόλιο 1. Στα προηγούμενα μοντέλα υψομετρικού μετασχηματισμού εμφανίζονται μόνο οι παράμετροι μετάθεσης, στροφής και αλλαγής κλίμακας, χωρίς να λαμβάνονται υπόψη επιπλέον μεταβολές που αφορούν στη γεωμετρία του επιλεγμένου ΕΕΠ αναφοράς ή/και άλλες θεμελιώδεις γήινες φυσικές «σταθερές» (π.χ. W_o, J_2, GM) στο νέο ΓΣΑ.

Σχόλιο 2. Παρόμοιες εξισώσεις με την (3.7) και (3.14) μπορούν να δημιουργηθούν για το μετασχηματισμό ομοιότητας και άλλων υψομετρικών ποσοτήτων που εξαρτώνται από κάποιο ΕΕΠ αναφοράς και συχνά χρησιμοποιούνται σε γεωδαιτικές εφαρμογές, όπως οι ανωμαλίες ύψους που προσδιορίζονται από μοντέλα σφαιρικών αρμονικών για το γήινο πεδίο βαρύτητας και τα υψόμετρα της μέσης στάθμης της θάλασσας που υπολογίζονται από δεδομένα δορυφορικής αλτιμετρίας.

3.3 Φαινόμενη αλλαγή του ΕΕΠ αναφοράς

Για λόγους απλότητας και ευκολότερης κατανόησης, ας θεωρήσουμε την περίπτωση όπου τα εμπλεκόμενα ΓΣΑ έχουν την ίδια αρχή και τον ίδιο προσανατολισμό ($t_x = t_y = t_z = \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$), αλλά διαφέρουν μόνο κατά ένα διαφορικό συντελεστή κλίμακας. Υπό αυτές τις προϋποθέσεις, ο υψομετρικός μετασχηματισμός ομοιότητας σύμφωνα με την εξίσωση (3.7) δίνει το ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$h' - h = \delta h(\delta s) = (aW + h)\,\delta s \tag{3.21}$$

ή ισοδύναμα

$$h' = (1+\delta s)h + aW\delta s \tag{3.22}$$

Ομοίως, η εξίσωση (3.14) οδηγεί στην εξής σχέση για μετασχηματισμό ομοιότητας των υψομέτρων γεωειδούς:

$$N' - N = \delta N(\delta s) = (aW + N)\,\delta s \tag{3.23}$$

ή ισοδύναμα

$$N' = (1+\delta s)N + aW\delta s \tag{3.24}$$

Ο προσθετικός όρος aWδs εκφράζει την επίδραση της «φαινόμενης αλλαγής» του μήκους του μεγάλου ημιάξονα του ΕΕΠ αναφοράς, λόγω της ύπαρξης διαφορετικής μετρητικής κλίμακας στα δύο ΓΣΑ. Το μέγεθος της επίδρασης αυτής μπορεί να γίνει ιδιαίτερα σημαντικό, ξεπερνώντας τα 6 m για $\delta s = 10^{-6}$ (1 ppm), ενώ μειώνεται περίπου στα 7 mm για $\delta s = 10^{-9}$ (1 ppb).

Οι συνέπειες της φαινόμενης αυτής αλλαγής στις τιμές των μετασχηματισμένων υψομέτρων μελετήθηκαν διεξοδικά από τους Soler και van Gelder [20] με σκοπό να εξηγηθεί η σημαντική μετάθεση-κατά-z (z-shift effect) που ανιχνεύθηκε ανάμεσα σε παγκόσμια ΓΣΑ, τα οποία υλοποιήθηκαν μέσω δορυφορικών μετρήσεων Doppler, καθώς και μέσω άλλων ανεξάρτητων γεωδατικών μετρήσεων τύπου-SLR (Satellite Laser Ranging).

Εάν το ΕΕΠ αναφοράς διατηρεί το φυσικό του μέγεθος και στα δύο ΓΣΑ, τότε τα μετασχηματισμένα γεωμετρικά υψόμετρα (όταν $t_x = t_y = t_z = \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$) θα πρέπει να υπολογιστούν μέσω της σχέσης:

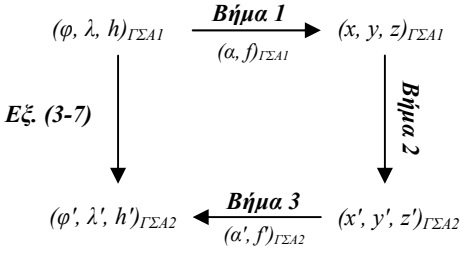
$$h' = (1+\delta s)h \tag{3.25}$$

και όχι μέσω της εξίσωσης (3.22) που απορρέει από την εφαρμογή του (απλού) υψομετρικού μετασχηματισμού ομοιότητας. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι το ίδιο φυσικό μήκος (π.χ η απόσταση μεταξύ ενός σταθερού σημείου στο χώρο και της ορθογώνιας προβολής του επί ενός συγκεκριμένου ΕΕΠ αναφοράς) χρειάζεται να «μετρηθεί» ως προς δύο διαφορετικά ΓΣΑ, τα οποία ταυτίζονται ως προς τη θέση και τον προσανατολισμό τους, αλλά διαφέρουν κατά έναν ενιαίο συντελεστή κλίμακας δs. Η ίδια αντιμετώπιση θα πρέπει να εφαρμοστεί επίσης και για την περίπτωση του μετασχηματισμού υψομέτρων γεωειδούς.

Προκειμένου να αντισταθμιστεί η επίδραση της φαινομενικής αλλαγής των μετασχηματισμένων υψόμετρων (λόγω της παρουσίας του προσθετικού όρου aWδs), καθώς και για να ληφθούν υπόψη τυχόν μεταβολές στο πραγματικό φυσικό μέγεθος του ΕΕΠ που συνοδεύει το τελικό σύστημα αναφοράς (ΓΣΑ2), το μοντέλο του 6-παραμετρικού υψομετρικού μετασχηματισμού ομοιότητας της εξίσωσης (3.7) θα πρέπει να διευρυνθεί σύμφωνα με τη μεθοδολογία που παρουσιάζεται στην ενότητα 4 της παρούσας εργασίας.

3.4 Αυστηρή μη-γραμμική προσέγγιση

Μία πιο αυστηρή μαθηματική προσέγγιση για την υλοποίηση του μετασχηματισμού ομοιότητας των γεωμετρικών υψομέτρων και των υψομέτρων γεωειδούς ανάμεσα σε διαφορετικά ΓΣΑ, απαιτεί μία διαδικασία τριών διαδοχικών βημάτων, σύμφωνα με το μη-γραμμικό μοντέλο που απεικονίζεται στο σχήμα 2.



Σχήμα 2: Η αυστηρή (μη-γραμμική) προσέγγιση για το μετασχηματισμό του γεωμετρικού υψομέτρου ενός γνωστού σημείου (φ, λ, h), ανάμεσα σε διαφορετικά γεωδαιτικά συστήματα αναφοράς.

Figure 2: The rigorous (non-linear) approach for transforming the ellipsoidal height at a known point (φ, λ, h) between different geodetic reference frames.

Το πρώτο βήμα περιλαμβάνει τη μετατροπή των γνωστών καμπυλόγραμμων γεωδαιτικών συντεταγμένων του σημείου υπολογισμού, ως προς το αρχικό σύστημα αναφοράς, σε Καρτεσιανές συντεταγμένες ως προς το ίδιο σύστημα, σύμφωνα με την εξίσωση (3.3). Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τις γνωστές παραμέτρους μετάθεσης, στροφής και κλίμακας μεταξύ του αρχικού και του τελικού ΓΣΑ, εφαρμόζεται το μοντέλο 3Δ μετασχηματισμού ομοιότητας κατά Helmert, σύμφωνα με την εξίσωση (3.1). Το τελευταίο βήμα απαιτεί τη μετατροπή των Καρτεσιανών συντεταγμένων του σημείου υπολογισμού, ως προς το τελικό σύστημα αναφοράς, σε καμπυλόγραμμες γεωδαιτικές συντεταγμένες ως προς το ίδιο σύστημα, «αντιστρέφοντας» τώρα την εξίσωση (3.3) μέσω κάποιου απλού επαναληπτικού αλγορίθμου [4, 15, 21].

Για την περίπτωση μετασχηματισμού υψομέτρων γεωειδούς, η διαδικασία του σχήματος 2 θα πρέπει να εφαρμοστεί χρησιμοποιώντας το γνωστό υψόμετρο γεωειδούς N στη θέση του h, έτσι ώστε οι υπολογιζόμενες Καρτεσιανές συντεταγμένες (μέσω του βήματος 1) να αναφέρονται στη θέση του σημείου υπολογισμού πάνω στην επιφάνεια του γεωειδούς, ως προς το αρχικό σύστημα (ΓΣΑ1). Στα επόμενα δύο βήματα προσδιορίζονται οι Καρτεσιανές και οι καμπυλόγραμμες γεωδαιτικές συντεταγμένες του ίδιου σημείου σε σχέση με το νέο ΓΣΑ. Προφανώς το γεωμετρικό υψόμετρο h' που υπολογίζεται στο βήμα 3 θα αντιστοιχεί στο μετασχηματισμένο υψόμετρο του γεωειδούς N' ως προς το ΓΣΑ2.

Η εφαρμογή των βημάτων 1 και 3 απαιτεί την επιλογή ενός ΕΕΠ αναφοράς, το οποίο προσαρμόζεται στα συστήματα ΓΣΑ1 και ΓΣΑ2, προκειμένου να οριστούν και να υπολογιστούν οι καμπυλόγραμμες γεωδαιτικές συντεταγμένες φ, λ, h (ή N) και φ', λ', h' (ή N'), αντίστοιχα.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να σημειωθεί ότι η παρουσία του πρόσθετου όρου aWδs λόγω της διαφοράς κλίμακας μεταξύ του αρχικού και τελικού ΓΣΑ, όπως προέκυψε από την εφαρμογή του γραμμικοποιημένου μετασχηματισμού ομοιότητας στην προηγούμενη ενότητα (βλέπε εξισώσεις 3.22 και 3.24), είναι συμβατή με τη χρήση της ίδιας αριθμητικής τιμής για το μήκος του μεγάλου ημιάξονα του ΕΕΠ αναφοράς που πρόκειται να χρησιμοποιηθεί στα βήματα 1 και 3 της αυστηρής μη-γραμμικής διαδικασίας του σχήματος 2 (περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με το θέμα αυτό θα δοθούν σε επόμενες παραγράφους).

Η διαφορά στα μετασχηματισμένα υψόμετρα που υπολογίζονται, αφενός μέσω της αυστηρής μη-γραμμικής προσέγγισης του σχήματος 2 και αφετέρου μέσω της απλούστερης εξίσωσης υψομετρικού μετασχηματισμού (3.7), οφείλεται αποκλειστικά στα σφάλματα γραμμικοποίησης που συνοδεύουν τη διαφορική εξίσωση (3.5). Η επίδραση των σφαλμάτων αυτών είναι σχετικά μικρή και δεν ξεπερνάει (ανάλογα με τη τιμή του συντελεστή κλίμακας δs) τα 1-2 cm. Παρόλα αυτά, σε εφαρμογές υψομετρικού ελέγχου με μεγάλες απαιτήσεις ακρίβειας (όπως είναι, για παράδειγμα, οι μελέτες γεωδυναμικής παρακολούθησης μέσω επαναλαμβανομένων μετρήσεων GPS), τα σφάλματα αυτά μπορούν να επηρεάσουν σε σημαντικό βαθμό την αξιοπιστία των τελικών αποτελεσμάτων.

Σαν ενδεικτικό παράδειγμα αναφέρουμε το μετασχηματισμό του γεωμετρικού υψομέτρου σε ένα σημείο γνωστών γεωδαιτικών συντεταγμένων φ=50°.0034, λ=11°.0028 και h=547.19m ως προς το επίσημο Γερμανικό γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς (DHDN), στο Ευρωπαϊκό γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς (ETRF 1989). Οι παράμετροι μετασχηματισμού σε αυτή την περίπτωση είναι: t_x=582.00m, t_y=105.00m, t_z=414.00m, ε_x=−1″.040, ε_y=−0″.350, ε_z=3″.080 και δs=8.30 ppm [8]. Το ΕΕΠ αναφοράς που συνδέεται με τις καμπυλόγραμμες γεωδαιτικές συντεταγμένες στο σύστημα DHDN έχει a=6378137.000 και f=0.00335281068118 (τιμές του GRS80). Το γεωμετρικό υψόμετρο που υπολογίζεται εφαρμόζοντας τον απ'ευθείας μετασχηματισμό της εξίσωσης (3.7) είναι h'=1297.253m, ενώ η αντίστοιχη τιμή που προσδιορίζεται από την αυστηρή μη-γραμμική εφαρμογή του μετασχηματισμού ομοιότητας (σχήμα 2) είναι h'=1297.256m.

4. ΔΙΕΥΡΥΜΕΝΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΓΙΑ ΥΨΟΜΕΤΡΑ ΕΞΑΡΤΩΜΕΝΑ ΑΠΟ ΤΟ ΕΕΠ ΑΝΑΦΟΡΑΣ

4.1 Η επίδραση της αλλαγής του ΕΕΠ αναφοράς

Το μήκος του μεγάλου ημιάξονα (συμβολίζεται με a) και η επιπλάτυνση (συμβολίζεται με f) υιοθετούνται ως οι δύο θεμελιώδεις παράμετροι που ορίζουν μονοσήμαντα το γεωμετρικό σχήμα και μέγεθος ενός ΕΕΠ αναφοράς.

Προκειμένου να υπολογισθεί η συνεισφορά λόγω πιθανής αλλαγής του ΕΕΠ αναφοράς (από το ΓΣΑ1 στο ΓΣΑ2) στις τιμές των μετασχηματισμένων υψομέτρων, θα πρέπει να διαφορίσουμε εκ νέου την εξίσωση (3.3) σύμφωνα με την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \mathbf{J}_1 \begin{bmatrix} d\varphi \\ d\lambda \\ dh \end{bmatrix} + \mathbf{J}_2 \begin{bmatrix} da \\ df \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

όπου ο Ιακωβιανός πίνακας J_1 είναι ο ίδιος με τον πίνακα J που δόθηκε ήδη στην εξίσωση (3.6), ενώ ο Ιακωβιανός πίνακας J_2 έχει τη μορφή [18]:

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{\cos\varphi\cos\lambda}{W} & \dfrac{a(1-f)\sin^2\varphi\cos\varphi\cos\lambda}{W^3} \\ \dfrac{\cos\varphi\sin\lambda}{W} & \dfrac{a(1-f)\sin^2\varphi\cos\varphi\sin\lambda}{W^3} \\ \dfrac{(1-e^2)\sin\varphi}{W} & (\mathrm{M}\sin^2\varphi - 2\mathrm{N})(1-f)\sin\varphi \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

Οι διαφορικές ποσότητες da και df εκφράζουν τη μεταβολή της γεωμετρίας του ΕΕΠ αναφοράς, λόγω της αλλαγής του μήκους του μεγάλου ημιάξονα ή/και της επιπλάτυνσής του.

Θέτοντας το αριστερό μέλος της εξίσωσης (4.1) ίσο με μηδέν και επιλύοντας στη συνέχεια ως προς dh, προσδιορίζουμε τη μεταβολή του γεωμετρικού υψομέτρου λόγω της αλλαγής του ΕΕΠ αναφοράς. Το αποτέλεσμα αυτό, σε συνδυασμό με την εξίσωση (3.7) της προηγούμενης ενότητας, οδηγεί στο ακόλουθο διευρυμένο μοντέλο υψομετρικού μετασχηματισμού ομοιότητας:

$$\begin{aligned} h' - h \;=\; & \delta h(t_x) + \delta h(t_y) + \delta h(t_z) \\ & + \delta h(\varepsilon_x) + \delta h(\varepsilon_y) + \delta h(\delta s) \\ & + \delta h(\delta a) + \delta h(\delta f) \end{aligned} \tag{4.3}$$

όπου οι επιπλέον όροι δh(δa) και δh(δf) δίνονται από τις εξισώσεις [16, 18]:

$$\delta h(\delta a) \;=\; -W\,\delta a \tag{4.4}$$

$$\delta h(\delta f) \;=\; \frac{a\,(1-f)}{W}\sin^2\varphi\,\delta f \tag{4.5}$$

Οι ποσότητες δa = a'–a και δf = f'–f αντιστοιχούν στις διαφορές των αριθμητικών τιμών του μήκους του μεγάλου ημιάξονα και της επιπλάτυνσης του ΕΕΠ αναφοράς, όπως αυτές χρησιμοποιούνται από τα αντίστοιχα συστήματα, ΓΣΑ1 και ΓΣΑ2. Οι υπόλοιποι όροι της εξίσωσης (4.3) που εξαρτώνται από τις παραμέτρους μετάθεσης, στροφής και κλίμακας, έχουν ήδη οριστεί σε προηγούμενες παραγράφους.

Αν θεωρήσουμε ότι το σημείο υπολογισμού λαμβάνεται επί της επιφάνειας του γεωειδούς, τότε η εξίσωση (4.3) μετατρέπεται στον αντίστοιχο διευρυμένο μετασχηματισμό ομοιότητας για τα υψόμετρα γεωειδούς. Σε αυτή την περίπτωση θα έχουμε τη γενική σχέση:

$$\begin{aligned} N' - N \;=\; & \delta N(t_x) + \delta N(t_y) + \delta N(t_z) \\ & + \delta N(\varepsilon_x) + \delta N(\varepsilon_y) + \delta N(\delta s) \\ & + \delta N(\delta a) + \delta N(\delta f) \end{aligned} \tag{4.6}$$

Οι όροι δN(δa) και δN(δf) είναι ίδιοι με την περίπτωση του διευρυμένου μετασχηματισμού ομοιότητας γεωμετρικών υψομέτρων, δηλαδή

$$\delta N(\delta a) \;=\; \delta h(\delta a) \qquad (4.7$$

$$\delta N(\delta f) \;=\; \delta h(\delta f) \tag{4.8}$$

ενώ οι υπόλοιποι όροι μετασχηματισμού, λόγω μετάθεσης, στροφής και κλίμακας, έχουν ήδη οριστεί στην ενότητα 3.2.

Σχόλιο 3. Με εξαίρεση τους όρους μετασχηματισμού λόγω αλλαγής του προσανατολισμού και της κλίμακας του ΓΣΑ, οι εξισώσεις (4.3) και (4.6) αντιστοιχούν στους διαφορικούς τύπους (υψομετρικού) μετασχηματισμού του Molodensky [12]. Οι τύποι αυτοί έχουν χρησιμοποιηθεί ευρέως στη γεωδαιτική πρακτική για το μετασχηματισμό γεωμετρικών υψομέτρων και υψομέτρων γεωειδούς ανάμεσα σε διαφορετικά συστήματα αναφοράς [13, σελ. 7.3-7.4], καθώς και για τον προσδιορισμό της μέσης ακτίνας και του κέντρο μάζας της Γης μέσω ανάλυσης υψομετρικών δεδομένων που λαμβάνονται σε παγκόσμια κλίμακα από γεωμετρικές και βαρυτημετρικές μεθόδους [1, 6, 16, 17]. Παρόλα αυτά, το διαφορικό μοντέλο του Molodensky δεν μπορεί να θεωρηθεί ένα «πλήρες» μοντέλο μετασχηματισμού ομοιότητας μεταξύ διαφορετικών ΓΣΑ, αφού δεν λαμβάνει υπόψη τις μεταβολές λόγω διαφορετικού προσανατολισμού ή/και κλίμακας που συχνά εμφανίζονται ανάμεσα σε αρκετά γεωδαιτικά συστήματα αναφοράς.

4.2 Τι θα πρέπει να χρησιμοποιούμε ως 'δa';

Ένα ιδιαίτερα σημαντικό ζήτημα που χρειάζεται να αποσαφηνιστεί, προκειμένου να εφαρμοστεί σωστά το διευρυμένο μοντέλο του υψομετρικού μετασχηματισμού ομοιότητας, είναι η ορθή χρήση των όρων δh(δa) και δN(δa). Όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα, οι όροι αυτοί εκφράζουν τη μεταβολή του γεωμετρικού υψομέτρου και του υψομέτρου γεωειδούς, αντίστοιχα, λόγω της αλλαγής του μεγάλου ημιάξονα του ΕΕΠ αναφοράς που συνοδεύει το τελικό ΓΣΑ.

Σε περίπτωση που θέσουμε απλά δα = 0 (*γεγονός που σημαίνει ότι τα δύο ΓΣΑ χρησιμοποιούν την ίδια τιμή για το μήκος του μεγάλου ημιάξονα του ΕΕΠ αναφοράς που τα συνοδεύει*), η επίδραση του όρου aWδs για τη φαινόμενη μεταβολή των μετασχηματισμένων υψομέτρων θα παραμείνει αναλλοίωτη στα τελικά αποτελέσματα. Σε πολλές περιπτώσεις, η απαλοιφή της φαινόμενης αυτής μεταβολής από τις τιμές των μετασχηματισμένων υψομέτρων είναι αναγκαία, αφού η παρουσία μιας τέτοιας «μη φυσικής» επίδρασης μπορεί να προκαλέσει προβλήματα σε πλήθος γεωδαιτικών εφαρμογών (π.χ μελέτες που σχετίζονται με την παρακολούθηση κατακορύφων παραμορφώσεων του γήινου φλοιού από μετρήσεις GPS, μελέτες παρακολούθησης της μέσης στάθμης της θάλασσας από δεδομένα δορυφορικής αλτιμετρίας). Η επίδραση αυτή θα εμφανίζεται ως μία σχεδόν σταθερή μετατόπιση (offset) των μετασχηματισμένων υψομέτρων, η οποία όμως δε θα ανταποκρίνεται σε κάποια πραγματική κατακόρυφη μετακίνηση των υπό εξέταση σημείων.

Σε κάθε περίπτωση, το μήκος του μεγάλου ημιάξονα του ΕΕΠ που προσαρμόζεται στο τελικό σύστημα αναφοράς (ΓΣΑ2) μπορεί να εκφραστεί ως:

$$a' \;=\; (1+\delta s)\,a + \delta\overline{a} \tag{4.9}$$

όπου a είναι το μήκος του μεγάλου ημιάξονα του ΕΕΠ που προσαρμόζεται στο αρχικό σύστημα αναφοράς (ΓΣΑ1), και δs είναι ο διαφορικός συντελεστής αλλαγής κλίμακας ανάμεσα στα δύο συστήματα. Ο όρος $\delta\overline{a}$ αντιστοιχεί στην αλ-

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΥΨΟΜΕΤΡΩΝ ΑΠΟ *ΓΣΑ1 → ΓΣΑ2*

$$h' = h + \delta h(t_x) + \delta h(t_y) + \delta h(t_z) + \delta h(\varepsilon_x) + \delta h(\varepsilon_y) + \delta h(\delta s) + \delta h(\delta a) + \delta h(\delta f)$$

όροι μετάθεσης	$\delta h(t_x) = t_x \cos\varphi \cos\lambda$ $\delta h(t_y) = t_y \cos\varphi \sin\lambda$ $\delta h(t_z) = t_z \sin\varphi$	όπου t_x, t_y, t_z είναι οι συντεταγμένες της αρχής του *ΓΣΑ1* ως προς το *ΓΣΑ2*
όροι προσανατολισμού	$\delta h(\varepsilon_x) = -\varepsilon_x \mathrm{N}e^2 \sin\varphi \cos\varphi \sin\lambda$ $\delta h(\varepsilon_y) = \varepsilon_y \mathrm{N}e^2 \sin\varphi \cos\varphi \cos\lambda$	όπου ε_x, ε_y είναι οι γωνίες στροφής γύρω από τους άξονες x και y του *ΓΣΑ1*. Αριστερόστροφη (counter-clockwise) φορά θεωρείται θετική.
όρος κλίμακας	$\delta h(\delta s) = (aW + h)\,\delta s$	όπου δs είναι ο διαφορικός συντελεστής κλίμακας ανάμεσα στα *ΓΣΑ1* και *ΓΣΑ2*
όροι διαφοροποίησης του ΕΕΠ αναφοράς	$\delta h(\delta a) = -Wa\delta s - W\delta\overline{a}$ $= -W\delta a$ $\delta h(\delta f) = \dfrac{a(1-f)}{W}\sin^2\varphi\,\delta f$	όπου δa και $\delta\overline{a}$ είναι οι αλλαγές στην αριθμητική τιμή και το φυσικό μήκος, αντίστοιχα, του μεγάλου ημιάξονα του ΕΕΠ αναφοράς, και δf είναι η αλλαγή της επιπλάτυνσης του ΕΕΠ

Σχήμα 3: Διευρυμένος μετασχηματισμός ομοιότητας γεωμετρικών υψομέτρων (εξαρτώμενων από κάποιο ΕΕΠ αναφοράς) μεταξύ διαφορετικών γεωδαιτικών συστημάτων αναφοράς, λαμβάνοντας υπόψη πιθανές μεταβολές του ΕΕΠ στο νέο ΓΣΑ.

Figure 3: Extended similarity-type transformation of geometric heights between different geodetic reference systems, taking into account possible variations of the reference ellipsoid associated with the new reference system.

λαγή του φυσικού μήκους του μεγάλου ημιάξονα του ΕΕΠ αναφοράς που συνοδεύει το ΓΣΑ2, σε σχέση με το φυσικό μήκος του μεγάλου ημιάξονα του ΕΕΠ αναφοράς που προσαρμόζεται στο ΓΣΑ1. Από την εξίσωση (4.9), παίρνουμε την ισοδύναμη σχέση:

$$\delta a = a' - a = a\,\delta s + \delta\overline{a} \tag{4.10}$$

η οποία δείχνει την επίδραση του διαφορικού συντελεστή κλίμακας στη συνολική αλλαγή (δa) του μεγάλου ημιάξονα του ΕΕΠ αναφοράς που προσαρμόζεται στο ΓΣΑ2.

Κατά αυτό τον τρόπο, και λαμβάνοντας υπόψη τις εξισώσεις (4.4) και (4.7), οι όροι δh(δa) και δN(δa) του διευρυμένου μετασχηματισμού ομοιότητας μπορούν να αναλυθούν ως εξής:

$$\delta h(\delta a) = \delta N(\delta a) = -Wa\delta s - W\delta\overline{a} \tag{4.11}$$

Βασιζόμενοι στις παραπάνω μαθηματικές σχέσεις, ας αναλύσουμε πάλι την περίπτωση του υψομετρικού μετασχηματισμού όπου $t_x = t_y = t_z = \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$ και επιπλέον δf = 0. Το διευρυμένο μοντέλο του μετασχηματισμού ομοιότητας για τα γεωμετρικά υψόμετρα δίνει τώρα το ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$h' - h = \delta h(\delta s) + \delta h(\delta a) \tag{4.12}$$

ή, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (3.13) και (4.11), ισοδύναμα

$$h' = (1 + \delta s)h - W\delta\overline{a} \tag{4.13}$$

Σε αντίθεση με την αντίστοιχη σχέση του απλού (μη διευρυμένου) υψομετρικού μετασχηματισμού ομοιότητας (βλέπε εξίσωση 3.22), η προηγούμενη εξίσωση (4.13) είναι απόλυτα συμβατή με την κοινή «γεωμετρική λογική» που υπαγορεύει ότι τα μετασχηματισμένα υψόμετρα πρέπει να προσδιορίζονται μέσω μίας απλής εφαρμογής του συντελεστή κλίμακας (re-scaling), εάν τα υπό μελέτη ΓΣΑ έχουν την ίδια αρχή, προσανατολισμό και χρησιμοποιούν το ίδιο ΕΕΠ αναφοράς ως προς τις φυσικές του διαστάσεις (δf = 0, $\delta\overline{a} = 0$). Παρόμοια ανάλυση μπορεί να γίνει επίσης και στην περίπτωση μετασχηματισμού ομοιότητας για τα υψόμετρα του γεωειδούς (N → N').

Σχόλιο 4. Η χρήση ενός διαφορετικού ΕΕΠ στο τελικό σύστημα αναφοράς (ΓΣΑ2), κατά την εφαρμογή του μη-γραμμικού μετασχηματισμού ομοιότητας, μπορεί να

αντιμετωπιστεί με την επιλογή κατάλληλων τιμών για τις βασικές γεωμετρικές παραμέτρους (a, e^2, f) στην εκτέλεση των βημάτων 1 και 3 (βλέπε σχήμα 2). Σε κάθε περίπτωση, η τιμή του μεγάλου ημιάξονα του ΕΕΠ που θα χρησιμοποιηθεί στο βήμα 3, μπορεί να σχετιστεί με την τιμή του μεγάλου ημιάξονα του ΕΕΠ που υιοθετήθηκε στο βήμα 1 μέσω της γενικής εξίσωσης (4.9). Για παράδειγμα, η επιλογή a' = (1+δs) a κατά την εκτέλεση του βήματος 3 ισοδυναμεί με τη διατήρηση του φυσικού μήκους του μεγάλου ημιάξονα του ΕΕΠ αναφοράς και στα δύο ΓΣΑ ($\delta\overline{a} = 0$). Αντίθετα, αν επιλέξουμε να εφαρμόσουμε τη συνήθη σύμβαση *α' = α* για την εκτέλεση του βήματος 3, τότε το φυσικό σχήμα του ΕΕΠ αναφοράς θα είναι διαφορετικό στο τελικό ΓΣΑ, αφού λόγω της εξίσωσης (4.9) θα έχουμε $\delta\overline{a} = -\,a\,\delta s$!

Το μοντέλο του διευρυμένου μετασχηματισμού ομοιότητας γεωμετρικών υψομέτρων δίνεται αναλυτικά στο σχήμα 3, μαζί με σύντομες επεξηγήσεις για τους επιμέρους όρους του. Με βάση την τελική αυτή μορφή του μοντέλου, τρεις βασικές περιπτώσεις υλοποίησης του υψομετρικού μετασχηματισμού ομοιότητας εξετάζονται στην επόμενη ενότητα, οι οποίες αντιστοιχούν στις εναλλακτικές δυνατότητες για την επιλογή του ΕΕΠ στο ΓΣΑ2.

5. ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΕΣ ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΕΣ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗΣ ΤΟΥ ΔΙΕΥΡΥΜΕΝΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ

Για την πρακτική υλοποίηση του διευρυμένου υψομετρικού μετασχηματισμού ομοιότητας που αναλύθηκε στην προηγούμενη ενότητα, υπάρχουν διάφορες εναλλακτικές δυνατότητες. Θεωρώντας ότι οι βασικές παράμετροι μετασχηματισμού μεταξύ των εμπλεκόμενων ΓΣΑ (δηλαδή t_x, t_y, t_z, ε_x, ε_y, ε_z, δs) είναι απολύτως γνωστές, οι δυνατότητες αυτές σχετίζονται με τη διαχείριση των όρων δh(δa) και δN(δa), και αντιστοιχούν ουσιαστικά στο πως (και εάν) μεταβάλλεται το φυσικό μεγέθος του ΕΕΠ αναφοράς που συνδέεται με το τελικό ΓΣΑ (σε σχέση με το φυσικό μέγεθος του ΕΕΠ αναφοράς που συνοδεύει το αρχικό ΓΣΑ). Σημειώνεται ότι οι όροι δh(δf) και δN(δf) δεν επηρεάζονται από τη διαφορά κλίμακας (δs) που τυχόν υπάρχει ανάμεσα στο αρχικό και το τελικό ΓΣΑ.

Ο διαχωρισμός και η μελέτη των εναλλακτικών επιλογών βασίζεται στη γενική εξίσωση (4.9), η οποία σχετίζει τις αριθμητικές τιμές του μήκους του μεγάλου ημιάξονα των ΕΕΠ αναφοράς που συνδέονται με το αρχικό και το τελικό ΓΣΑ, αντίστοιχα. Σε κάθε περίπτωση, η τιμή a για το ΕΕΠ στο αρχικό σύστημα αναφοράς, καθώς και ο συντελεστής αλλαγής κλίμακας δs μεταξύ των ΓΣΑ1 και ΓΣΑ2, θεωρούνται εξ'αρχής γνωστές ποσότητες.

Σε αρκετές πρακτικές εφαρμογές, η τιμή a' είναι επίσης γνωστή και δεδομένη εξ'αρχής, ειδικά για εργασίες όπου τα μετασχηματισμένα υψόμετρα πρέπει να συνδυαστούν με άλλα γεωδαιτικά δεδομένα που είναι ήδη διαθέσιμα ως προς το ΓΣΑ2 με αναφορά ένα συμβατικά επιλεγμένο και συγκεκριμένο ΕΕΠ (a', f' σταθερά). Σε αυτή την περίπτωση, τα μετασχηματισμένα υψόμετρα που υπολογίζονται μέσω των εξισώσεων (4.3) και (4.6) θα περιέχουν και την επίδραση λόγω της μεταβολής του φυσικού μεγέθους του ΕΕΠ αναφοράς από το ΓΣΑ1 στο ΓΣΑ2. Η μεταβολή αυτή μπορεί να υπολογιστεί μέσω της σχέσης (4.10), η οποία δίνει το εξής αποτέλεσμα:

$$\delta\overline{a} = a' - (1+\delta s)\,a \tag{5.1}$$

Ανάλογα με το συντελεστή διαφοράς κλίμακας (δs) ανάμεσα στα δύο ΓΣΑ, η επίδραση της μεταβολής $\delta\overline{a}$ στις τιμές των μετασχηματισμένων υψομέτρων μπορεί να είναι ιδιαίτερα σημαντική *(ειδικά στη συνήθη περίπτωση όπου α = α')*. Το γεγονός αυτό προκαλεί έντονες «φαινόμενες» αλλαγές στην κατακόρυφη θέση των υπό εξέταση σημείων στο τελικό σύστημα αναφοράς, και θα επηρεάσει οποιοδήποτε γεωδαιτικό μέγεθος υπολογίζεται εκ των υστέρων με βάση τις τιμές των μετασχηματισμένων υψομέτρων (π.χ κανονική βαρύτητα, ανωμαλίες βαρύτητας, διαταρακτικό δυναμικό, κ.ά).

Περίπτωση 1

Διατήρηση του φυσικού μεγέθους του ΕΕΠ αναφοράς και στα δύο ΓΣΑ, a' = (1+δs) a.

Μία δυνατότητα για την υλοποίηση του διευρυμένου μετασχηματισμού ομοιότητας είναι να χρησιμοποιήσουμε τη δέσμευση $\delta\overline{a} = 0$, η οποία συνεπάγεται ότι το φυσικό μήκος του μεγάλου ημιάξονα του ΕΕΠ αναφοράς παραμένει αμετάβλητο ανάμεσα στο αρχικό και το τελικό ΓΣΑ. Σύμφωνα με το γενικό τυπολόγιο του διευρυμένου μετασχηματισμού ομοιότητας (βλέπε σχήμα 3), η συνδυασμένη επίδραση των όρων δh(δs) και δh(δa) θα έχει την εξής μορφή:

$$\begin{aligned} \delta h(\delta s, \delta a) &= \delta h(\delta s) + \delta h(\delta a) \\ &= (aW + h)\,\delta s - W(a\delta s + \delta\overline{a}) \\ &= h\delta s \end{aligned} \tag{5.2}$$

ενώ για την περίπτωση μετασχηματισμού των υψομέτρων του γεωειδούς, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \delta N(\delta s, \delta a) &= \delta N(\delta s) + \delta N(\delta a) \\ &= (aW + N)\,\delta s - W(a\delta s + \delta\overline{a}) \\ &= N\delta s \end{aligned} \tag{5.3}$$

Και στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις, οι υψομετρικές μεταβολές λόγω των παραμέτρων μετασχηματισμού δs και δa αντιστοιχούν σε εξαιρετικά μικρές διορθώσεις, οι οποίες για τις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές μπορούν να αγνοηθούν (λιγότερο από 1cm ακόμη και για δs = 10 ppm).

Θα πρέπει να τονιστεί ιδιαίτερα ότι όλοι οι γεωδαιτικοί υπολογισμοί που πρόκειται να γίνουν στο τελικό σύστημα αναφοράς (ΓΣΑ2) και εμπλέκουν το ΕΕΠ ως προς το οποίο αναφέρονται τα μετασχηματισμένα υψόμετρα, θα πρέπει να είναι συμβατοί με την αναπροσαρμοσμένη τιμή:

$$a' = (1+\delta s)\, a \tag{5.4}$$

και όχι με την τιμή a που χρησιμοποιείται για παρόμοιους υπολογισμούς στο αρχικό σύστημα αναφοράς (ΓΣΑ1), βλέπε [20, 22] για περισσότερες λεπτομέρειες.

Η εφαρμογή της συγκεκριμένης επιλογής είναι χρήσιμη σε περιπτώσεις που θέλουμε να εξασφαλίσουμε ότι οι τιμές των υψομέτρων (γεωμετρικών ή γεωειδούς) αναφέρονται σε μία σταθερή επιφάνεια αναφοράς (ως προς το φυσικό της μέγεθος), όταν μετασχηματίζονται από ένα ΓΣΑ σε κάποιο άλλο μέσω ενός μετασχηματισμού ομοιότητας.

Περίπτωση 2

Διατήρηση της ίδιας αριθμητικής τιμής για το μήκος του μεγάλου ημιάξονα του ΕΕΠ αναφοράς και στα δύο ΓΣΑ, a'=a.

Μία δεύτερη δυνατότητα είναι να χρησιμοποιήσουμε τη δέσμευση δa = 0, η οποία συνεπάγεται ότι γίνεται χρήση της ίδιας αριθμητικής τιμής για το μήκος του μεγάλου ημιάξονα του ΕΕΠ αναφοράς και από τα δύο ΓΣΑ. Σε αυτή την περίπτωση, η συνδυασμένη επίδραση των όρων μετασχηματισμού δh(δs) και δh(δa) θα έχει τη μορφή:

$$\begin{aligned} \delta h(\delta s, \delta a) &= \delta h(\delta s) + \delta h(\delta a) \\ &= (aW + h)\,\delta s - W\delta a \\ &= h\delta s + aW\delta s \end{aligned} \tag{5.5}$$

ενώ για την περίπτωση μετασχηματισμού των υψομέτρων γεωειδούς θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \delta N(\delta s, \delta a) &= \delta N(\delta s) + \delta N(\delta a) \\ &= (aW + N)\,\delta s - W\delta a \\ &= N\delta s + aW\delta s \end{aligned} \tag{5.6}$$

Σε αντίθεση με την περίπτωση 1, το μέγεθος του πρόσθετου όρου aWδs που εμφανίζεται στις εξισώσεις (5.5) και (5.6) είναι αρκετά σημαντικό, αφού μπορεί να φτάσει ακόμη και τα 6m για δs = 1ppm (βλέπε σχήμα 4). Η τιμή της διόρθωσης aWδs είναι πρακτικά ανεξάρτητη από το ΕΕΠ που χρησιμοποιείται στα δύο συστήματα αναφοράς, και ουσιαστικά εμφανίζεται ως μία σταθερή μετατόπιση σε όλες τις τιμές των μετασχηματισμένων υψομέτρων, έχοντας πολύ ασθενή εξάρτηση από το γεωδαιτικό πλάτος των εκάστοτε σημείων υπολογισμού (οι τιμές του aWδs παρουσιάζουν διακυμάνσεις μικρότερες του ±1 cm πάνω στην επιφάνεια του ΕΕΠ αναφοράς).

Η επιλογή χρήσης της ίδιας αριθμητικής τιμής για το μήκος του μεγάλου ημιάξονα του ΕΕΠ αναφοράς που προσαρμόζεται στα δύο ΓΣΑ (π.χ. θεωρώντας ότι και τα δύο συστήματα αναφοράς χρησιμοποιούν τις παραμέτρους του GRS80) συνεπάγεται και την ταυτόχρονη μεταβολή των φυσικών του διαστάσεων, σε περιπτώσεις που ο συντελεστής διαφοράς κλίμακας είναι δs ≠ 0. Πράγματι, αν θέσουμε δa = 0 στην εξίσωση (4.10), θα έχουμε:

$$\delta\bar{a} = -\,a\,\delta s \tag{5.7}$$

Η παραπάνω τιμή αντιστοιχεί στην απαιτούμενη μεταβολή του φυσικού μήκους του μεγάλου ημιάξονα του ΕΕΠ αναφοράς που προσαρμόζεται στο ΓΣΑ2, ώστε οι αριθμητικές τιμές a και a' να είναι ίσες, σύμφωνα με το γενικό μοντέλο της εξίσωσης (4.9). Το γεγονός αυτό, σε συνάρτηση με την τάξη μεγέθους της διαφοράς κλίμακας ανάμεσα στα δύο ΓΣΑ, μπορεί βαθμιαία να προκαλέσει σημαντικές μεταβολές στις τιμές των μετασχηματισμένων υψομέτρων, όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.

Περίπτωση 3

Χρήση νέας συμβατικής τιμής για το μήκος του μεγάλου ημιάξονα του ΕΕΠ αναφοράς στο τελικό ΓΣΑ, a' ≠ a.

Η τελευταία εναλλακτική δυνατότητα για την εφαρμογή του διευρυμένου υψομετρικού μετασχηματισμού ομοιότητας, μπορεί να θεωρηθεί ως μία γενίκευση της προηγούμενης περίπτωσης. Στην προκειμένη περίπτωση, το ΕΕΠ που προσαρμόζεται στο τελικό σύστημα αναφοράς συνοδεύεται από μία συγκεκριμένη συμβατική τιμή για το μήκος του μεγάλου ημιάξονά του, η οποία είναι γενικά διαφορετική από την αρχική συμβατική τιμή που υιοθετήθηκε από το ΕΕΠ του ΓΣΑ1. Η νέα τιμή πρόκειται να χρησιμοποιηθεί σε όλους τους γεωδαιτικούς υπολογισμούς (συμπεριλαμβανομένων και του προσδιορισμού της 3Δ θέσης επίγειων σημείων) στο τελικό σύστημα αναφοράς, και συνήθως προκύπτει μέσα από μία αναθεώρηση των βασικών γεωμετρικών παραμέτρων του βέλτιστου γήινου ελλειψοειδούς, βλέπε, π.χ., [5].

Σε αυτή την περίπτωση, η πραγματική αλλαγή του φυσικού μήκους των μεγάλων ημιαξόνων των ΕΕΠ αναφοράς που προσαρμόζονται στο αρχικό και στο τελικό ΓΣΑ, μπορεί να προσδιοριστεί μέσω της εξίσωσης (4.9) ως εξής:

$$\delta\bar{a} = -\,a\,\delta s + (a' - a) \tag{5.8}$$

Λαμβάνοντας υπόψη το τυπολόγιο του διευρυμένου μετασχηματισμού ομοιότητας, η συνδυασμένη επίδραση των όρων δh(δs) και δh(δa) θα έχει τώρα τη μορφή:

$$\begin{aligned} \delta h(\delta s, \delta a) &= \delta h(\delta s) + \delta h(\delta a) \\ &= (aW + h)\,\delta s - W\delta a \\ &= h\delta s + aW\delta s - W(a' - a) \end{aligned} \tag{5.9}$$

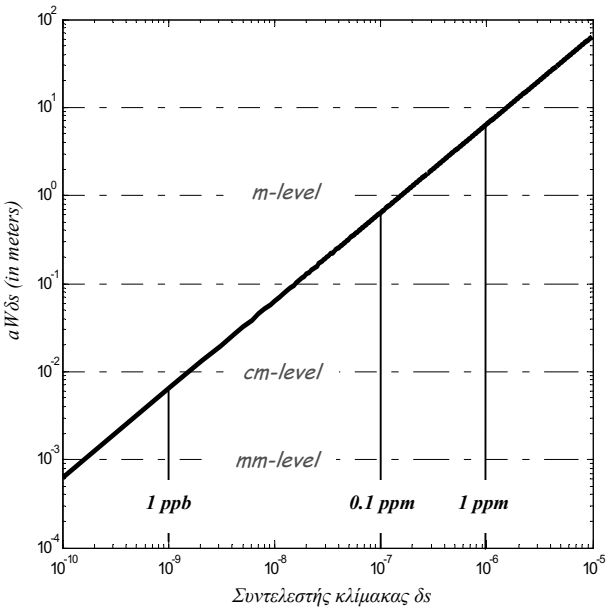
ενώ για την περίπτωση μετασχηματισμού των υψομέτρων γεωειδούς θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \delta N(\delta s, \delta a) &= \delta N(\delta s) + \delta N(\delta a) \\ &= (aW + N)\,\delta s - W\delta a \\ &= N\delta s + aW\delta s - W(a' - a) \end{aligned} \tag{5.10}$$

Ανάλογα με το μέγεθος της αριθμητικής διαφοράς a'−a και της επιθυμητής ακρίβειας για τα μετασχηματισμένα υψόμετρα, ο τελευταίος διορθωτικός όρος στις εξισώσεις

(5.9) και (5.10) μπορεί να είναι αρκετά σημαντικός και πρέπει να λαμβάνεται γενικά υπόψη.

Η επίδραση των υπολοίπων όρων που εμφανίζονται στις παραπάνω εξισώσεις έχει ήδη εξηγηθεί στις προηγούμενες παραγράφους.



Σχήμα 4: Η επίδραση του όρου της φαινόμενης διαφοροποίησης του ΕΕΠ αναφοράς (aWδs) στα μετασχηματισμένα υψόμετρα GPS και στις αποκλίσεις γεωειδούς, ως συνάρτηση του συντελεστή κλίμακας μεταξύ των αντιστοίχων ΓΣΑ. Το συγκεκριμένο διάγραμμα εμφανίζει την επίδραση σε σημείο με φ=45Ι για ένα ΕΕΠ αναφοράς a = 6378137 m και e^2 = 0.006694380.

Figure 4: The effect of the apparent variation term aWδs on the transformed ellipsoid-dependent heights, as a function of the scaling factor involved in the GRF transformation. The particular graph shows the influence at a point with φ=45Ι for a reference ellipsoid with a = 6378137 m and e^2 = 0.006694380.

Αριθμητικό παράδειγμα. Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα μετασχηματισμού για το γεωμετρικό υψόμετρο που λαμβάνεται μέσω μετρήσεων GPS, σε σημείο που ορίζεται από τις γεωδαιτικές συντεταγμένες: φ = 50°, λ = 11° και h = 47.193 m, ως προς το παγκόσμιο σύστημα αναφοράς WGS84(G873).

Ζητείται ο μετασχηματισμός του γεωμετρικού υψομέτρου στο παγκόσμιο σύστημα αναφοράς ITRF94, λαμβάνοντας υπόψη ότι οι παράμετροι μετασχηματισμού μεταξύ WGS84(G873) και ITRF94 (για τη χρονική εποχή t = 1997.0) είναι: t_x = 9.6 cm, t_y = 6.0 cm, t_z = 4.4 cm, ε_x = -2.2 mas, ε_y = -0.1 mas, ε_z = 1.1 mas και δs = -14.3 ppb, όπου mas συμβολίζει το χιλιοστό τόξου δευτερολέπτου μοίρας. Το ΕΕΠ αναφοράς που συνδέεται με το σύστημα WGS84(G873) έχει τις εξής τιμές για τις θεμελιώδεις παραμέτρους γεωμετρικής περιγραφής: a = 6378137.00 m και f = 0.00335281066475 [13].

Εφαρμόζοντας το τυπολόγιο του διευρυμένου μετασχηματισμού ομοιότητας, για κάθε μία από τις τρεις περιπτώσεις που μελετήθηκαν στις προηγούμενες παραγράφους, καταλήγουμε στα εξής αποτελέσματα:

Περίπτωση 1 ($\delta\bar{a}$ = 0, δf = 0 − διατηρώντας το φυσικό μέγεθος του ΕΕΠ αναφοράς και στα δύο ΓΣΑ)
h' = 47.295 m

Περίπτωση 2 (δa = 0, δf = 0 − διατηρώντας την ίδια αριθμητική τιμή για το μήκος του μεγάλου ημιάξονα του ΕΕΠ αναφοράς και στα δύο ΓΣΑ)
h' = 47.204 m

Περίπτωση 3 (a' = 6378136.602 m, f' = 0.00335281969240 − χρησιμοποιώντας το ΕΕΠ αναφοράς του World Geodetic Datum 2000 [5] στο ITRF94)
h' = 47.635 m

Τα παραπάνω αποτελέσματα αναδεικνύουν το σημαντικό ρόλο της συμβατικής επιλογής του ΕΕΠ αναφοράς που προσαρμόζεται στο τελικό ΓΣΑ (ως προς το οποίο θα αναφέρονται τα μετασχηματισμένα υψόμετρα). Αν και το γεωμετρικό υψόμετρο ως προς το ITRF94 είναι πρακτικά το ίδιο (με μια απόκλιση ±1 cm) με το αντίστοιχο γεωμετρικό υψόμετρο ως προς το WGS84(G873), όταν χρησιμοποιείται η επιλογή της περίπτωσης 2, η εφαρμογή της περίπτωσης 1 αυξάνει το υψόμετρο ως προς το ITRF94 κατά 9 cm.

Επίσης, στην περίπτωση 3 το μετασχηματισμένο γεωμετρικό υψόμετρο εμφανίζει μια επιπλέον αύξηση της τάξης των 30 cm. Σημειώνεται ότι για τον υπολογισμό του μετασχηματισμένου γεωμετρικού υψομέτρου στην τρίτη περίπτωση, ο όρος της μεταβολής της επιπλάτυνσης δN(δf) έχει ληφθεί υπόψη.

Σχόλιο 5. Θα πρέπει να τονιστεί ότι καμία από τις προαναφερθείσες επιλογές δεν πρέπει να χαρακτηρισθεί ως περισσότερο «σωστή» ή «λανθασμένη», με την έννοια του πόσο καλά αντικατοπτρίζει τη φυσική πραγματικότητα. Το πρόβλημα της επιλογής των γεωμετρικών παραμέτρων του ΕΕΠ αναφοράς που πρόκειται να χρησιμοποιηθεί από κάποιο ΓΣΑ είναι πάντα ένα ζήτημα συμβατικής επιλογής μοντέλου.

6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η διατήρηση ενός συμβατικού και αμετάβλητου (από τη σκοπιά των φυσικών του διαστάσεων) ΕΕΠ αναφοράς είναι ζήτημα θεμελιώδους σημασίας για τη Γεωδαισία, ιδιαίτερα λόγω της αυξανόμενης ανάγκης για την αξιόπιστη δυναμική

παρακολούθηση διαφόρων γήινων παραμέτρων και διεργασιών (π.χ. μεταβολές της μέσης στάθμης της θάλασσας, τεκτονικές παραμορφώσεις των γήινων μαζών, κτλ.).

Η χρήση ενός σύγχρονου γεωδαιτικού συστήματος αναφοράς στην πράξη, μέσω της προσβασιμότητας σε ένα δίκτυο επίγειων σημείων με γνωστές θέσεις ως προς κάποιο 3Δ παγκόσμιο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων (π.χ. WGS84, ITRFxx), απαιτεί συχνά τον υπολογισμό διαφόρων ποσοτητών που εξαρτώνται, άμεσα ή έμμεσα, από την επιλογή ενός τέτοιου ελλειψοειδούς μοντέλου, καθώς και το μετασχηματισμό αυτών των ποσοτήτων από/προς άλλα ΓΣΑ.

Σε κάθε περίπτωση, η μετρητική κλίμακα χώρου (spatial scale) στην οποία αναφέρονται οι διάφορες ποσότητες που εξαρτώνται και υπολογίζονται σε σχέση με ένα ΕΕΠ αναφοράς (π.χ. γεωμετρικά υψόμετρα, αποχές γεωειδούς, και όποια άλλα μεγέθη υπολογίζονται μέσω αυτών) δεν ανταποκρίνεται σε κάποιο «ιδανικό» και αμετάβλητο παγκόσμιο πρότυπο κλίμακας (υιοθετώντας, για παράδειγμα, μία συγκεκριμένη θεωρητική τιμή για την ταχύτητα του φωτός ή το χρονικό διάστημα ταλάντωσης των χρονομέτρων του δορυφορικού συστήματος GPS), αλλά αντίθετα απορρέει από την ποιότητα και την αξιοπιστία των διαθέσιμων δεδομένων, των τεχνικών μέτρησης και των μαθηματικών μοντέλων που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των τελικών αποτελεσμάτων.

Έτσι λοιπόν, κάθε ΓΣΑ που χρησιμοποιείται στη γεωδαιτική πρακτική «ερμηνεύει» το προσαρμοζόμενο σε αυτό ΕΕΠ σύμφωνα με τη δική του μετρητική κλίμακα, όπως αυτή ορίζεται μέσω των γνωστών τιμών για τις 3Δ Καρτεσιανές συντεταγμένες των σημείων υλοποίησής του. Το γεγονός αυτό επηρεάζει άμεσα τα αποτελέσματα των μετασχηματισμών που ενδέχεται να εφαρμοστούν από/προς άλλα ΓΣΑ, για ποσότητες εξαρτώμενες από το ΕΕΠ αναφοράς.

Σε ό,τι αφορά στην εφαρμογή του μετασχηματισμού ομοιότητας ανάμεσα σε διαφορετικά ΓΣΑ για υψομετρικά μεγέθη που εξαρτώνται από κάποιο ΕΕΠ αναφοράς, και με βάση τα όσα παρουσιάστηκαν και συζητήθηκαν στην παρούσα εργασία, είναι στην κρίση του χρήστη να διασφαλίσει ότι η συμβατική επιλογή που θα κάνει δεν θα δημιουργήσει συστηματικές ασυμφωνίες και «φαινόμενες» μεταβολές στις τιμές των μετασχηματισμένων μεγεθών, οι οποίες μπορούν να οδηγήσουν σε διάφορες παρερμηνείες, τόσο για την ποιότητα των χρησιμοποιούμενων δεδομένων, όσο και για τις φυσικές διεργασίες που επηρεάζουν τη μεταβολή της κατακόρυφης θέσης των σημείων στο χώρο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Anderle R.J. (1974). Transformation of terrestrial survey data to Doppler satellite datum. **Journal of Geophysical Research**, vol. 79, no. B35, pp. 5319-5331.

2. Canadian Council on Geomatics – CCOG (2007). **"The Canadian height modernization study"**. Ηλεκτρονική διαδυκτιακή πηγή: www.geod. nrcan.gc.ca/hm/index_e.php, Earth Sciences Sector, Natural Resources Canada.

3. Featherstone W.E., Kirby J.F., Kearsley A.H.W., Gilliland J.R., Johnston G.M., Steed J., Forsberg R., Sideris M.G. (2001). The AUSGeoid98 geoid model of Australia: data treatment, computations and comparisons with GPS-levelling data, **Journal of Geodesy**, vol. 75, no. 5-6, pp. 313-330.

4. Fukushima T. (2006). Transformation from Cartesian to Geodetic coordinates accelerated by Haley's method. **Journal of Geodesy**, vol. 79, no. 12, pp. 689-693.

5. Grafarend E.W., Ardalan A.A. (1999). World geodetic datum 2000. **Journal of Geodesy**, vol. 73, no. 11, pp. 611-623.

6. Grappo G.A. (1980). Determination of the earth's mean equatorial radius and center of mass from Doppler-derived and gravimetric geoid heights. **Manuscripta Geodaetica**, vol. 5, no. 3-4, pp. 201-216.

7. Heiskanen W., Moritz H. (1967). **"Physical geodesy"**. W.H. Freeman, San Francisco.

8. Ihde J., Lindstrot W. (1995). Datumstransformation zwischen den Bezugssystemen ETRF/WGS, DHDN und System 42. **Zeitschrift für Vermessungswesen**, vol. 120, no. 4, pp. 192-196.

9. Kearsley A.H.W., Ahmad Z., Chan A. (1993). National height datums, leveling, GPS heights and geoids. **Australian Journal of Geodesy**, Photogrammetry and Surveying, vol. 59, no. 1, pp. 53-88.

10. Leick A., van Gelder B.H.W. (1975). **"On similarity transformations and geodetic network distortions based on Doppler satellite observations"**. Report No. 235, Department of Geodetic Science, Ohio State University, Columbus.

11. McCarthy D.D., Petit G. (eds, 2004). **"IERS Conventions 2003"**. International Earth Rotation and Reference Systems Service, Technical Note No. 32, Verlag des Bundesamts fór Kartographie und Geodδsie, Frankfurt am Main.

12. Molodensky M.S., Eremeev V.F., Yurkina M.I. (1962). **Methods for study of the external gravitational field and figure of the Earth** (translation from Russian). Published for the National Science Foundation and the US Department of Commerce, Israel program for scientific translations, Jerusalem.

13. National Imagery and Mapping Agency (1996). **"World Geodetic System 1984: its definition and relationships with local geodetic systems"**. Technical Report 8350.2, Geodesy and Geophysics Department, National Imagery and Mapping Agency (NIMA), St. Louis.

14. National Geodetic Survey – NGS (2007). **"Height modernization project"**. Ηλεκτρονική διαδυκτιακή πηγή: www.ngs.nooa.gov/heightmod/, National Oceanic and Atmospheric Administration (NOOA), U.S. Department of Commerce.

15. Pollard J. (2002). Iterative vector methods for computing geodetic latitude and height from rectangular coordinates. **Journal of Geodesy**, vol. 76, no. 1, pp. 36-40.

16. Rapp R.H. (1993). **"Geometric Geodesy (part II)"**. Lecture Notes, Department of Geodetic Science and Surveying, Ohio State University, Columbus.

17. Rapp R.H., Rummel R. (1976). Comparison of Doppler derived undulations with gravimetric undulations considering the zero-order undulations of the geoid. **Proceedings of the International Geodetic Symposium on Satellite Doppler Positioning**, Defense Mapping Agency, Washington, DC, pp. 389-397.

18. Soler T. (1976). **"On differential transformations between Cartesian and curvilinear (geodetic) coordinates"**. Report No. 236, Department of Geodetic Science, Ohio State University, Columbus.

19. Soler T. (1998). A compendium of transformation formulas useful in GPS work. **Journal of Geodesy**, vol. 72, no. 7-8, pp. 482-490.

20. Soler T., van Gelder B.H.W. (1987). On differential scale changes and the satellite Doppler system z-shift. **Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society**, vol. 91, no. 3, pp. 639-656.

21. Zhang C.D., Hsu H.T., Wu X.P., Li S.S., Wang Q.B., Chai H.Z., Du L. (2005). An alternative algebraic algorithm to transform Cartesian to geodetic coordinates. **Journal of Geodesy**, vol. 79, no. 8, pp. 413-420.

22. Kotsakis C. (2006). On the problem of geoid height transformation between different geodetic reference frames. Presented at the **First**

International Symposium of the International Gravity Field Service (IGFS), Istanbul, Turkey, August 28 – September 1, 2006.

Χριστόφορος Κωτσάκης
Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών, Τομέας Γεωδαισίας και Τοπογραφίας, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Ταχ. Θυρ. ΑΠΘ 440, 54124 Θεσσαλονίκη
Email: kotsaki@topo.auth.gr
Κωνσταντίνος Κατσάμπαλος
Καθηγητής, Τμήμα Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών, Τομέας Γεωδαισίας και Τοπογραφίας, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Ταχ. Θυρ. ΑΠΘ 469, 54124 Θεσσαλονίκη
Email: kvek@topo.auth.gr
Δημήτριος Αμπατζίδης
Μεταπτυχιακός φοιτητής, Τμήμα Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών, Τομέας Γεωδαισίας και Τοπογραφίας, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Email: dimitrios_ampatzidis@yahoo.gr

Extended summary

Extended similarity-type datum transformation for GPS heights and geoid undulations

C. KOTSAKIS
Assistant Professor, AUTH

K. KATSAMBALOS
Professor, AUTH

D. AMPATZIDIS
M.Sc. Graduate Student, AUTH

Abstract
Transforming height information that refers to an ellipsoidal Earth reference model, such as the geometric heights determined from GPS measurements or the geoid undulations obtained by a gravimetric geoid solution, from one geodetic reference frame (GRF) to another is an important task whose proper implementation is crucial for many geodetic, surveying and mapping applications. This paper presents the required methodology to deal with the above problem when we are given the Helmert transformation parameters that link the underlying Cartesian coordinate systems to which the Earth reference ellipsoid is attached. The main emphasis is on the effect of GRF spatial scale differences in coordinate transformations involving reference ellipsoids for the particular case of heights. Since every three-dimensional Cartesian coordinate system 'gauges' an attached ellipsoid according to its own accessible scale, there will exist a supplementary contribution from the scale variation between the involved GRFs on the relative size of their attached reference ellipsoids. Neglecting such a scale-induced indirect effect corrupts the values for the curvilinear geodetic coordinates obtained from a similarity transformation model, and meter-level apparent offsets can be introduced in the transformed heights. The paper explains the above issues in detail and presents the necessary mathematical framework for their treatment.

1. INTRODUCTION

The objective of the present paper is to investigate the transformation of *ellipsoid-dependent heights* from one geodetic reference frame (GRF) to another, when we are given the Helmert transformation parameters that link the underlying Cartesian coordinate systems to which a conventional reference ellipsoid is attached. Such a task is of crucial importance in several geodetic applications, including the consistent combination of ellipsoidal, orthometric and geoid heights in the context of GPS-based leveling, the external validation of gravimetric geoid models using geometrically derived undulations with respect to a common datum, and the reduction of ellipsoidal heights obtained at different epochs to a common reference frame for vertical crustal deformation studies, among others.

Submitted: May 25. 2007 Accepted: July 20, 2007

Using the standard framework of Euclidean similarity transformation, a critical issue that affects the transformed GPS or geoid heights from one GRF to another (e.g. WGS84 → ITRF2000) is whether or not the adopted reference ellipsoid should be 'adapted' to each reference frame's scale, in case that a non-zero scaling factor is involved in their mutual Cartesian coordinate transformation. The following dilemma can be stated: should an adopted reference ellipsoid (e.g. GRS80) retain the value of its semi-major axis in every GRF it is attached to, or should every Cartesian coordinate system 'gauge' an attached reference ellipsoid according to its own accessible scale that is inherent in the x, y, z values of the control stations used for its realization?

The above predicament requires some clarification, since the use of a reference ellipsoid entails a more or less conventional choice and, apparently, it should not be dictated by the spatial scale differences of the specific GRFs that will utilize such a conventional model. However, if the same reference ellipsoid (*thought of as a conventional geometric Earth model with invariant physical dimensions*) needs to be utilized in different, in terms of their accessible spatial scale, GRFs, then a distinct value for its semi-major axis should be assigned in each case. In order to maintain the invariance of the reference ellipsoid's physical surface in every 3D Cartesian coordinate system associated with it, we should 're-define' the value of its semi-major axis by $\alpha' = (1+\delta s)\,\alpha$, where δs is the scaling factor between two reference frames GRF and GRF', a is the value of the reference ellipsoid's semi-major axis when attached to GRF, and a' is the value of the semi-major axis of the *same* reference ellipsoid when attached to GRF'. Neglecting such a scale-induced indirect effect corrupts the resulting values for the curvilinear geodetic coordinates obtained from a similarity transformation and *meter-level apparent offsets* can be introduced in the transformed ellipsoidal heights. This paper presents an extended similarity-type model for the datum transformation of ellipsoid-dependent heights, which offers a proper de-coupling of the height variation originating from (i) the GRF scale differences and (ii) the actual change of the physical size of the reference ellipsoid.

2. SIMILARITY TRANSFORMATION FOR ELLIPSOID-DEPENDENT HEIGHTS

Let us consider the well-known Euclidean similarity transformation model which is used to convert Cartesian coordinates between two geodetic reference frames that generally differ in terms of three translation parameters, three orientation parameters, and a factor of uniform spatial scale change:

$$\begin{bmatrix} x'-x \\ y'-y \\ z'-z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta s & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & \delta s & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & \delta s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

To derive a one-step formula for the similarity transformation of ellipsoidal heights determined from GPS measurements, we need to combine Eq. (2.1) with the well-known relationship between Cartesian and curvilinear geodetic coordinates

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathsf{N}+h)\cos\varphi\cos\lambda \\ (\mathsf{N}+h)\cos\varphi\sin\lambda \\ (\mathsf{N}(1-e^2)+h)\sin\varphi \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

By differentiation of Eq. (2.2), we obtain the following expression that corresponds to the direct (linearized) *similarity transformation model for ellipsoidal heights*

$$\begin{aligned} h'-h &= \delta h(t_x)+\delta h(t_y)+\delta h(t_z) \\ &\quad +\delta h(\varepsilon_x)+\delta h(\varepsilon_y)+\delta h(\delta s) \end{aligned} \tag{2.3}$$

where the individual transformation terms are given by

$$\delta h(t_x) = t_x \cos\varphi\cos\lambda \tag{2.4}$$

$$\delta h(t_y) = t_y \cos\varphi\sin\lambda \tag{2.5}$$

$$\delta h(t_z) = t_z \sin\varphi \tag{2.6}$$

$$\delta h(\varepsilon_x) = -\varepsilon_x \mathsf{N} e^2 \sin\varphi\cos\varphi\sin\lambda \tag{2.7}$$

$$\delta h(\varepsilon_y) = \varepsilon_y \mathsf{N} e^2 \sin\varphi\cos\varphi\cos\lambda \tag{2.8}$$

$$\delta h(\delta s) = (aW+h)\,\delta s \tag{2.9}$$

If we assume that the point whose ellipsoidal height being transformed is located on the geoid, then Eq. (2.3) is reduced to the direct (linearized) *similarity transformation model for geoid heights*

$$\begin{aligned} N'-N &= \delta N(t_x)+\delta N(t_y)+\delta N(t_z) \\ &\quad +\delta N(\varepsilon_x)+\delta N(\varepsilon_y)+\delta N(\delta s) \end{aligned} \tag{2.10}$$

by applying (where needed) the substitution $h = N$.

Let us consider the case where the underlying GRFs have the same origin and orientation ($t_x = t_y = t_z = \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$) and they differ only in terms of a spatial scaling factor. Under these constraints, the transformation model for ellipsoidal heights in Eq. (2.3) yields

$$h' = (1+\delta s)h + aW\delta s \tag{2.11}$$

The additive term $aW\delta s$ in Eq. (2.11) corresponds to the effect of an 'apparent' change in the length of the semi-major axis of the reference ellipsoid due to the scale difference between the involved GRFs. Its magnitude can be quite significant, reaching more than 6 m when $\delta s = 10^{-6}$ (1 ppm) and dropping to about 7 mm for $\delta s = 10^{-9}$ (1 ppb).

In order to counter balance the effect of the apparent variation term $aW\delta s$, and also to properly account for an actual change in the physical dimensions of the reference ellipsoid, the six-parameter similarity transformation model for ellipsoidal and geoid heights needs to be further extended as described in the following section.

3. EXTENDED SIMILARITY TRANSFORMATION FOR ELLIPSOID-DEPENDENT HEIGHTS

The length of the semi-major axis (denoted by a) and the flattening (denoted by f) shall be adopted as the two fundamental parameters that uniquely define the geometrical size and shape of a reference Earth ellipsoid. In order to account for a change of the physical dimensions of the reference ellipsoid in height transformation problems, we should perform an additional differentiation of the curvilinear-to-Cartesian coordinate conversion formula in Eq. (2.2), as follows

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \mathbf{J}_1 \begin{bmatrix} d\varphi \\ d\lambda \\ dh \end{bmatrix} + \mathbf{J}_2 \begin{bmatrix} da \\ df \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

from which we can finally derive the following direct (linearized) *extended similarity transformation model for ellipsoidal heights*

$$\begin{aligned} h'-h &= \delta h(t_x)+\delta h(t_y)+\delta h(t_z) \\ &\quad +\delta h(\varepsilon_x)+\delta h(\varepsilon_y)+\delta h(\delta s) \\ &\quad +\delta h(\delta a)+\delta h(\delta f) \end{aligned} \tag{3.2}$$

where the additional terms $\delta h(\delta a)$ and $\delta h(\delta f)$ are given by

$$\delta h(\delta a) = -W\,\delta a \tag{3.3}$$

$$\delta h(\delta f) = \frac{a(1-f)}{W}\sin^2\varphi\,\delta f \tag{3.4}$$

The quantities $\delta a = a' - a$ and $\delta f = f' - f$ correspond to the

difference in the numerical values for the semi-major axis and the flattening of the reference ellipsoid, as these are used in the respective reference frames, GRF1 and GRF2. The translation, rotation, and scale dependent terms in Eq. (2.8) have already been defined in Sect. 2.

Assuming that the evaluation point is located on the geoid's surface, the corresponding direct (linearized) *extended similarity transformation model for geoid heights* is obtained, by applying (where needed) the substitution $h = N$.

An issue that remains to be clarified, in the context of the similarity-type transformation for ellipsoid-dependent heights, is the proper evaluation of the term $\delta h(\delta a)$, which gives the ellipsoidal height variation due to the change of the semi-major axis for the reference ellipsoids adopted by the frames GRF1 and GRF2.

In general, the length of the semi-major axis of the reference ellipsoid attached to GRF2 can be expressed as

$$a' = (1+\delta s)\, a + \delta\bar{a} \tag{3.5}$$

where a is the length of the semi-major axis of the reference ellipsoid attached to GRF1, δs is the scale change factor between the two frames, and $\delta\bar{a}$ corresponds to the actual change of the *physical length* of the semi-major axis of the GRF2 ellipsoid with respect to the *physical length* of the semi-major axis of the GRF1 ellipsoid.

In this way, we have the relationship

$$\delta a = a' - a = a\,\delta s + \delta\bar{a} \tag{3.6}$$

which shows the influence of the differential scale factor δs on the total variation δa of the semi-major axis for the reference ellipsoid adopted by the GRF2 frame.

4. IMPLEMENTATION OPTIONS

Several cases can be identified for the practical implementation of the extended similarity-type transformation model that was discussed in the previous section. Assuming that the Helmert transformation parameters between the underlying GRFs are known, these cases relate to the evaluation of the term $\delta h(\delta a)$, and they essentially correspond to choosing how to treat the physical size of the reference ellipsoid with respect to the involved GRFs.

Equation (3.5) provides the basic model upon which each of the following implementation options can be distinguished. The value a of the semi-major axis of the reference ellipsoid associated with the initial reference system (GRF1) and the scaling factor δs are considered to be given, known quantities in every case. In many practical applications the value a' of the semi-major axis of the reference ellipsoid associated with the target reference system (GRF2) is also fixed, particularly for studies where the transformed heights need to be combined with other types of geodetic data that are already available with respect to the GRF2 datum and a conventionally given reference ellipsoid (a', f').

In the latter case, however, the transformed heights obtained in GRF2 through the similarity-type model of Eq. (3.2) will additionally contain the effect of the inherent change $\delta\bar{a} = a' - (1+\delta s)\, a$ of the *physical dimensions* of the GRF2 ellipsoid with respect to the GRF1 ellipsoid. Such an effect can create significant apparent biases in the vertical position of the evaluation points, especially in the common case where $a' = a$, and it will affect any other auxiliary geodetic quantity that may be subsequently computed from these transformed heights (e.g. normal gravity, gravity anomaly, gravity disturbance, etc.).

The ***first case*** is to select $\delta\bar{a} = 0$, which implies that the physical length of the semi-major axis of the reference ellipsoid is invariant within the underlying GRFs. In this case, all numerical calculations involving the semi-major axis of the reference ellipsoid with respect to the GRF2 datum (e.g. conversion of Cartesian coordinates to curvilinear coordinates and vice versa, computation of normal gravity values, etc.) should be compatible with the new re-scaled value $a' = (1+\delta s)\, a$, and not the initial value a, which is used for similar calculations with respect to the GRF1 datum.

The implementation of this particular option is useful if we want to ensure that various ellipsoid-dependent geodetic quantities that are observed or computed in one datum will continue to refer to the same spatial reference surface when they are transferred to a new datum through a similarity-type transformation model.

The ***second alternative*** is to set *a priori* $\delta a = 0$, which implies that the same numerical value for the semi-major axis of the reference ellipsoid is adopted and used by both reference systems, GRF1 and GRF2. This is a rather common option in practice, since most geodetic data today make use of the physical and geometric parameter values associated with the *GRS80* ellipsoid, which is generally accepted as the best Earth reference model for all geodetic work. The option of adopting the same numerical value for the semi-major axis of the reference ellipsoid attached in each datum (e.g. assuming that both GRFs are associated with the GRS80 ellipsoid) carries an inherent change in its physical dimensions, if the scaling factor $\delta s \neq 0$. Indeed, by setting $\delta a = 0$ in Eq. (3.6), we get $\delta\bar{a} = -\,a\,\delta s$, which gives the required change in the physical length of the semi-major axis of the reference ellipsoid attached to GRF2 in order for the numerical values a and a' to be equal. This, in turn, may cause significant changes in the transformed heights values, as shown in Fig. 3, depending on the value of the scaling factor δs.

The ***third option*** can be considered as a generalization of the previous case. According to this case, a given conventional numerical value a' for the semi-major axis of the GRF2 reference ellipsoid is used, which is generally different from the initial conventional value a that was adopted for the GRF1 ellipsoid.

Numerical example. Consider the problem of trans-

forming the GPS-derived ellipsoidal height from the WGS84(G873) frame to the ITRF94 frame. The geodetic coordinates of the evaluation point, with respect to the WGS84(G873) frame, have the following values: φ = 50°.0000, λ = 11°.0000 and h = 47.193 m. The values of the Helmert transformation parameters from WGS84(G873) to ITRF94 (at epoch t = 1997.0) are also known: t_x = 9.6 cm, t_y = 6.0 cm, t_z = 4.4 cm, ε_x = -2.2 mas, ε_y = -0.1 mas, ε_z = 1.1 mas and δs = -14.3 ppb. The reference ellipsoid associated with the WGS84(G873) system is defined in terms of the values a = 6378137.00 m and f = 0.00335281066475 [13].

By applying each of the three aforementioned for the GPS height conversion from WGS84(G873) to ITRF94, we obtain the following results.

Case 1 (003, δf = 0 − *retaining the physical size of the WGS84 reference ellipsoid*)

N' = 47.295 m

Case 2 (δa = 0, δf = 0 − *retaining the numerical values for the semi-major axis and the flattening of the WGS84 reference ellipsoid*)

N' = 47.204 m

Case 3 (a' = 6378136.602 m, f' = 0.00335281969240 − *using the zero-tide reference ellipsoid of the World Geodetic Datum 2000; see [5]*)

N' = 47.635 m

The above results verify the important role of the conventional choice of the reference ellipsoid attached to the new GRF (with respect to which the transformed height shall refer to). Although the original WGS84(G873) ellipsoidal height can be considered identical, within ±1 cm, to the ITRF94 ellipsoidal height determined through ***case 2***, the implementation of ***case 1*** increases the ITRF94 ellipsoidal height by almost 9 cm. Furthermore, in ***case 3***, the ITRF94 ellipsoidal height exhibits an additional increase of about 30 cm, with respect to the corresponding value that is referenced to the physical body of the WGS84 ellipsoid.

Remark. It should be noted that none of the three aforementioned options should be treated as more 'correct' or 'false' in the sense of physical reality. The problem of selecting a value for the semi-major axis of a reference ellipsoid is always an issue of conventional choice. In the context of similarity-type transformation for geodetic quantities, it is up to the user to ensure that his conventional choice will not create inconsistencies or other apparent biases with existing data sets, when transferring geodetic data from one datum to another.

5. CONCLUSIONS

Maintaining a conventional, yet geometrically and physically invariant Earth reference model is a fundamental issue in geodesy, particularly in view of the increasing need to monitor global change parameters, such as mean sea level or landmass subsidence. However, when a geodetic reference system is used in practice via an accessible group of stations with known spatial positions, the adopted reference ellipsoid that is required to define several important geodetic quantities does not refer to an 'ideal' scale unit, but rather to the best spatial scale which geodesists are able to reproduce by means of their current data, measurement techniques and combination procedures. Accordingly, any geodetic datum 'detects' an attached reference ellipsoid, as well as every length-type quantity that depends on it (e.g. ellipsoidal height, geoid height, height anomaly, sea surface height), according to its own accessible spatial scale that is inherent in the Cartesian coordinate values of its realization points. Obviously, in cases of classical terrestrial geodetic datums, the spatial scale itself is defined through the conventional adoption of a reference ellipsoid in which the horizontal positions of its realization points are given.

Taking into account the above considerations, we have investigated the problem of ellipsoidal height ($h \rightarrow h'$) and geoid height ($N \rightarrow N'$) conversion between different GRFs by providing a general similarity-type transformation that incorporates the contribution of GRF scale variation to the relative size of the reference ellipsoids adopted by each datum. Several options that can be followed for the conventional selection of the semi-major axis of the reference ellipsoid in the target GRF have been analyzed, and their practical implications were highlighted.

Considering the growing trend for the definition and realization of modern GPS-based vertical reference systems, as well as the continuous requirement of accurate vertical control for the evaluation of Earth gravity field models, the extended height transformation model presented herein provides an adequate tool for the consistent combination of GPS and/or geoid heights obtained from different GRFs with different scale realizations.

C. Kotsakis
Assistant Professor, Department of Geodesy and Surveying, School of Engineering, Aristotle University of Thessaloniki, Univ. Box 440, 54124 Thessaloniki, Greece, Email: kotsaki@topo.auth.gr
K. Katsambalos
Professor, Department of Geodesy and Surveying, School of Engineering, Aristotle University of Thessaloniki, Univ. Box 469, 54124 Thessaloniki, Greece, Email: kvek@topo.auth.gr
D. Ampatzidis
M.Sc. graduate student, Department of Geodesy and Surveying, School of Engineering, Aristotle University of Thessaloniki, Email: dimitrios_ampatzidis@yahoo.gr