Μικροτριγωνισμοί Υψηλής Ακρίβειας. Προβλήματα και Επιλογές

ΧΡ. ΚΩΤΣΑΚΗΣ
Αγρονόμος & Τοπογράφος Μηχανικός

Δ. ΡΩΣΣΙΚΟΠΟΥΛΟΣ
Αναπληρωτής Καθηγητής Α.Π.Θ.

Περίληψη
Παρουσιάζονται και αναλύονται τα προβλήματα που προκύπτουν εξαιτίας της επίδρασης των σφαλμάτων του θεοδολίχου στις μετρήσεις των μικρών δικτύων υψηλής ακρίβειας. Τέτοια δίκτυα εφαρμόζονται στη βιομηχανία, τις αποτυπώσεις και διαχρονικές παρακολουθήσεις μνημείων και μικρών τεχνικών έργων καθώς και σε άλλες τοπογραφικές εφαρμογές με μετρήσεις περιορισμένης εμβέλειας. Δίνονται λύσεις που αφορούν στα ειδικά όργανα, τις τεχνικές μέτρησης και τις μεθόδους ανάλυσης. Έμφαση δίνεται στις συνορθώσεις, τον ορισμό του συστήματος αναφοράς και κυρίως την αντιμετώπιση των σφαλμάτων οριζοντίωσης με τη βοήθεια ενός διευρυμένου μαθηματικού μοντέλου.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η μεγάλη εξέλιξη, που έχει συντελεστεί εδώ και 15 περίπου χρόνια στις εταιρείες παραγωγής γεωδαιτικών και τοπογραφικών οργάνων, με την κατασκευή υψηλής τεχνολογίας ηλεκτρονικών θεοδολίχων, έχει βρει τεράστια εφαρμογή στη δημιουργία ειδικών συστημάτων για 3Δ μετρήσεις περιορισμένης εμβέλειας. Τα συστήματα αυτά συνοδεύονται από 2 έως 8 ηλεκτρονικά θεοδόλιχα και Η/Υ με κατάλληλο λογισμικό συλλογής και επεξεργασίας των μετρήσεων, ώστε να είναι δυνατή η εξαγωγή των αποτελεσμάτων σε πραγματικό χρόνο και να γίνεται ασήμαντη η επίδραση στις μετρήσεις των σφαλμάτων κέντρωσης και οριζοντίωσης. Μετρούνται οριζόντιες γωνίες ή διευθύνσεις και ζενίθιες γωνίες. Παράλληλα είναι διαθέσιμες και πλήθος περιφερειακών συσκευών, όπως π.χ. συσκευές εκπομπής ακτίνων Laser, ώστε να ελαχιστοποιείται το σφάλμα σκόπευσης, CCD κάμερες, σερβομηχανισμοί κ.ά. Τα χαρακτηριστικά αυτά δίνουν τη δυνατότητα επίτευξης πολύ υψηλών ακριβειών προσδιορισμού 3Δ συντεταγμένων ως προς κάποιο τοπικό σύστημα αναφοράς, σε συνδυασμό με εύκολες και τελείως αυτοματοποιημένες διαδικασίες χειρισμού του συστήματος [1, 3, 6, 9, 20].

Οι βιομηχανικές εφαρμογές, για τις οποίες κατ' εξοχήν έχουν σχεδιαστεί τα συστήματα αυτά, ποικίλλουν ανάμεσα σε πολλούς κλάδους. Περιληπτικά μπορούν να αναφερθούν οι εξής κατηγορίες [11]:

Υποβλήθηκε: 27.6.1996 Έγινε δεκτή: 8.7.1999

- Έλεγχος κυλινδρικότητας και ορθής διατομής σε σωλήνες.
- Στην αυτοκινητοβιομηχανία και τις εταιρείες κατασκευής σιδηροδρομικού υλικού (για έλεγχο σχήματος και διαστάσεων σασί και τμημάτων του αμαξώματος ενός αυτοκινήτου, φορτηγού ή βαγονιού, για έλεγχο διαστάσεων οχημάτων, για ψηφιοποίηση επιφανειών αμαξώματος σε πειραματικά μοντέλα, για έλεγχο της ακριβούς κίνησης και των γεωμετρικών χαρακτηριστικών των robot που χρησιμοποιούνται για τη συναρμολόγηση των αυτοκινήτων, για μελέτη των παραμορφώσεων των εξωτερικών επιφανειών βαγονιών και αυτοκινήτων, κάτω από διαφορετικές συνθήκες φόρτισης).
- Στην αεροναυπηγική (για έλεγχο συναρμολόγησης μεγάλων τμημάτων σκελετού αεροσκαφών, για έλεγχο διατομών - επιφανειών - διαστάσεων, για έλεγχο ευθυγράμμισης του άξονα του αεροσκάφους, για έλεγχο της θέσης σημείων ελέγχου, μέσω σύγκρισης μεταξύ αληθινών και ονομαστικών τιμών (από τον κατασκευαστή) των συντεταγμένων τους).
- Στη ναυπηγική (για έλεγχο συναρμολόγησης μεγάλων τμημάτων σκελετού πλοίων, για έλεγχο επιφανειών).
- Σε βιομηχανικές εγκαταστάσεις μεγάλων μηχανών (για χάραξη τμημάτων robot που πρέπει να τοποθετηθούν σε κατάλληλες θέσεις, για έλεγχο μορφής και διαστάσεων τμημάτων μηχανών, για έλεγχο συναρμολόγησης τμημάτων μηχανών, για προσδιορισμό κίνησης μηχανών, για έλεγχο παραμορφώσεων σε μηχανήματα ή εγκαταστάσεις, έλεγχο επιφανείας σε κεραίες τηλεπικοινωνιών κατά την κατασκευή και κατά τη λειτουργία έλεγχο μαθηματικής εξίσωσης σχήματος, έλεγχο του προσανατολισμού για την εκπομπή και λήψη, για μέτρηση γεωμετρικών στοιχείων σε εγκαταστάσεις πυρηνικών εργοστασίων, για έλεγχο συναρμολόγησης σε υψικαμίνους, σιδηρές γέφυρες, σιδηρές κατασκευές).
- Στις βιομηχανίες κατασκευής τεχνητών δορυφόρων (για τον έλεγχο γεωμετρικών χαρακτηριστικών κατασκευής τεχνητού δορυφόρου, για τον έλεγχο μορφής και κίνησης μηχανικών τμημάτων).

Πέρα από τη χρήση των παραπάνω συστημάτων σε καθαρά βιομηχανικές εφαρμογές, έχει διαφανεί έντονα ο ουσιαστικός ρόλος που μπορούν αυτά να παίξουν και σε τοπογραφικές εργασίες, οι οποίες χαρακτηρίζονται από τα στοιχεία της περιορισμένης εμβέλειας, της ανάγκης για 3Δ αντιμετώπιση και της υψηλής απαίτησης σε ακρίβεια και αξιοπιστία. Έτσι λοιπόν μπορούν να αντιμετωπιστούν με επιτυχία, με τη βοήθεια συστημάτων 3Δ μετρήσεων περιορισμένου πεδίου, προβλήματα όπως: μετρήσεις για παραμορφώσεις σε κτίρια, τοίχους αντιστηρίξεως κ.λπ., παρακολούθηση κατολισθήσεων, παρακολούθηση μετακίνησης πρανών σε δρόμους και ορυχεία, τριδιάστατη αποτύπωση παραδοσιακών κτιρίων και μνημείων, εγκατάσταση εργαστηριακών δικτύων βαθμονόμησης και ελέγχου οργάνων, υποστήριξη επιγείων φωτογραμμετρικών εφαρμογών περιορισμένης εμβέλειας κ.ά.

Η τεχνική που ακολουθείται είναι η εξής: Υπολογίζονται οι συντεταγμένες των στάσεων των θεοδολίχων σε ένα ορισμένο σύστημα αναφοράς από μετρήσεις προς τα σημεία που υλοποιούν τα άλλα θεοδόλιχα και προς άγνωστα (ή γνωστά) σημεία πάνω στο αντικείμενο. Στη συνέχεια, μετά τη συνόρθωση του δικτύου αυτού, θεωρώντας τις στάσεις "γνωστά σημεία" (τα *σημεία αναφοράς*), εφαρμόζεται η τεχνική της εμπροσθοτομίας για τον υπολογισμό των νέων σημείων πάνω στο αντικείμενο, των *σημείων ελέγχου*, σε "πραγματικό χρόνο". Σχετικές εργασίες δόθηκαν από τους Bayly and Teskey (1992), Fuss (1993), Obidowski and Chapman (1993), Robbins (1992).

Στα δίκτυα αυτά, η τριδιάστατη αντιμετώπιση οδηγεί σε βέλτιστη εκτίμηση της θέσης των κορυφών του δικτύου, σε σχέση με τη χωριστή συνόρθωση οριζοντίου και κατακορύφου, επειδή κατά τη συνόρθωση δεν αγνοείται και η συσχέτιση των οριζοντίων και κατακορύφων μεγεθών.

Εκτός όμως από την τριδιάστατη επίλυση, αυτό που διαχωρίζει τα “μικρά” από τα “κλασικά” δίκτυα των αποτυπώσεων είναι η υπόθεση των ισοβαρών παρατηρήσεων που γίνεται στα κλασικά δίκτυα, αλλά δεν μπορεί να γίνει για τις κοντινές σκοπεύσεις των μικρών δικτύων. Στην περίπτωση των κοντινών σκοπεύσεων, τα πράγματα γίνονται πιο πολύπλοκα, επειδή είναι σημαντικά, εκτός από το σφάλμα ανάγνωσης, το σφάλμα κέντρωσης, το σφάλμα σκόπευσης και το σφάλμα οριζοντίωσης του θεοδολίχου, των οποίων οι επιδράσεις στην παρατήρηση εξαρτώνται από την απόσταση μεταξύ των σημείων αλλά και από την υψομετρική τους διαφορά. Έτσι, *στα μικρά δίκτυα υψηλής ακρίβειας* ακολουθούνται ειδικές τεχνικές μέτρησης και διατάξεις οργάνων, ώστε να γίνονται ασήμαντες οι επιδράσεις των σφαλμάτων του θεοδολίχου και του συστήματος κέντρωσης στην ακρίβεια της παρατήρησης. Πιο συγκεκριμένα [18]:

α. Η συνιστώσα του σφάλματος σκόπευσης μπορεί να γίνει ασήμαντη, αν χρησιμοποιηθούν ειδικά σχεδιασμένοι στόχοι.

β. Το σφάλμα κέντρωσης αντιμετωπίζεται με τους παρακάτω τρόπους:

1. Οι επιδράσεις των σφαλμάτων κέντρωσης μηδενίζονται, αν χρησιμοποιηθούν ταυτόχρονα τόσα θεοδόλιχα, όσες είναι οι κορυφές/σταθμοί του δικτύου. Ένα από τα θεοδόλιχα υλοποιεί το κέντρο του συστήματος αναφοράς, του οποίου ο άξονας z ταυτίζεται με τον πρωτεύοντα άξονα του οργάνου, και οι άξονες x και y προσανατολίζονται αυθαίρετα αλλά έτσι, ώστε το σύστημα να είναι δεξιόστροφο (τοπικό σύστημα).
2. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα θεοδόλιχο μόνο, αλλά τότε τα σημεία στάσης συνδέονται μεταξύ τους μέσω των παρατηρήσεων προς κοινά "εμπροσθοτομικά" σημεία και όχι με απευθείας παρατηρήσεις. Η διαδικασία αυτή δεν μπορεί να εφαρμοσθεί σε "πραγματικό χρόνο".
3. Για εργασίες μέσης ακρίβειας και όταν τα σημεία πρέπει να σημανθούν μόνιμα, τότε εφαρμόζονται ειδικές διατάξεις εξαναγκασμένης κέντρωσης.

γ. Η επίδραση του σφάλματος οριζοντίωσης στα βιομηχανικά συστήματα μετρήσεων, καθώς και σε σύγχρονα ηλεκτρονικά όργανα υψηλής ακρίβειας, είναι ασήμαντη, επειδή τα όργανα αυτά διαθέτουν αυτόματους ισοσταθμητές για τη διόρθωση του σφάλματος αυτού.

Τα παραπάνω συστήματα, αν και προσφέρουν υψηλή ποιότητα στις τοπογραφικές μετρήσεις μικρής εμβέλειας, δεν εφαρμόζονται ακόμη ευρέως εξαιτίας του υψηλού τους κόστους. Στην εργασία αυτή θα αναφερθούμε στην ανάλυση των δικτύων υψηλής ακρίβειας που μετρούνται με συστήματα ηλεκτρονικών θεοδολίχων, αλλά και με απλά θεοδόλιχα που δεν διαθέτουν αυτόματους ισοσταθμητές, για την περίπτωση που δεν διαθέτουμε τέτοια συστήματα. Στα θεοδόλιχα αυτά η απόκλιση του κατακορύφου άξονα λόγω κακής οριζοντίωσης μπορεί να αντιμετωπισθεί ως άγνωστη παράμετρος στις εξισώσεις παρατηρήσεων.

2. ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

x_i, y_i, z_i: οι συντεταγμένες του σημείου i

δ_{ij} : η οριζόντια διεύθυνση από το i προς το j

θ_i : η σταθερά προσανατολισμού στο i

ω_{ijk} : η οριζόντια γωνία με κορυφή το σημείο i, αριστερό σημείο j και δεξιό k

ζ_{ij} : η ζενίθια γωνία από το i προς το j

S_{ij} : η οριζόντια απόσταση i, j

d_{ij} : η κεκλιμένη απόσταση i, j

δ^b_{ij}, ω^b_{ijk}, ζ^b_{ij}, S^b_{ij}, d^b_{ij} : οι παρατηρήσεις των αντιστοίχων μεγεθών

δ^o_{ij}, ω^o_{ijk}, ζ^o_{ij}, S^o_{ij}, d^o_{ij} : οι προσεγγιστικές τιμές των αντιστοίχων μεγεθών

ν_i , μ_i : οι συνιστώσες απόκλισης του πρωτεύοντα άξονα του θεοδολίχου στα επίπεδα (x, z) και (y, z) αντιστοίχως.

3. Η ΣΥΝΟΡΘΩΣΗ ΤΩΝ ΜΙΚΡΩΝ ΤΡΙΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ

3.1. Οι εξισώσεις παρατηρήσεων

Οι τοπογραφικές παρατηρήσεις στα τριδιάστατα δίκτυα είναι: οριζόντιες διευθύνσεις, οριζόντιες γωνίες, οριζόντιες αποστάσεις, κεκλιμένες (ή χωρικές αποστάσεις), ζενίθιες γωνίες και υψομετρικές διαφορές. Αναλυτικά οι εξισώσεις παρατήρησης των μικρών τριδιαστάτων δικτύων, και για την περίπτωση που τα σφάλματα οριζοντίωσης είναι πρακτικά ασήμαντα, δίνονται παρακάτω.

Η εξίσωση παρατήρησης της οριζόντιας διεύθυνσης:

$$b_{ij}^{\delta} = -\mathbf{a}^T \mathbf{x}_i + \mathbf{a}^T \mathbf{x}_j - \delta\theta_k + v_{ij}^{\delta} \tag{3.1}$$

όπου:

$$b_{ij}^{\delta} = \delta_{ij}^{b} - \delta_{ij}^{o} = \delta_{ij}^{b} - \arctan\frac{x_j^o - x_i^o}{y_j^o - y_i^o} + \theta_k^o \tag{3.2}$$

δ_{ij}^{b} η τιμή της παρατήρησης και v_{ij}^{δ} το σφάλμα της, δ_{ij}^{o} η προσεγγιστική τιμή, θ_k^o είναι η προσεγγιστική τιμή της σταθεράς προσανατολισμού,

$$\mathbf{a}^T = \begin{bmatrix} \dfrac{y_j - y_i}{S_{ij}^2} & -\dfrac{x_j - x_i}{S_{ij}^2} & 0 \end{bmatrix}_o \tag{3.3}$$

είναι οι συντελεστές των διορθώσεων των προσεγγιστικών συντεταγμένων,

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} x_i - x_i^o \\ y_i - y_i^o \\ z_i - z_i^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta x_i \\ \delta y_i \\ \delta z_i \end{bmatrix}, \mathbf{x}_j = \begin{bmatrix} x_j - x_j^o \\ y_j - y_j^o \\ z_j - z_j^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta x_j \\ \delta y_j \\ \delta z_j \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

$\delta\theta_k = \theta_k - \theta_k^o$ είναι η διόρθωση της προσεγγιστικής τιμής,

$$S_{ij}^o = \sqrt{(x_j^o - x_i^o)^2 + (y_j^o - y_i^o)^2}$$

$$\theta_k^o = \arctan\frac{x_j^o - x_i^o}{y_j^o - y_i^o} - \delta_{ij}^{b} \tag{3.5}$$

και δ_{ij}^{b} μια οποιαδήποτε παρατήρηση της k σειράς διευθύνσεων.

Η εξίσωση παρατήρησης της οριζόντιας γωνίας:

$$b_{ijk}^{\omega} = (\mathbf{a}_j^T - \mathbf{a}_k^T)\mathbf{x}_i - \mathbf{a}_j^T \mathbf{x}_j + \mathbf{a}_k^T \mathbf{x}_k + v_{ij}^{\omega} \tag{3.6}$$

όπου:

$$b_{ijk}^{\omega} = \omega_{ijk}^{b} - \arctan\frac{x_k^o - x_i^o}{y_k^o - y_i^o} + \arctan\frac{x_j^o - x_i^o}{y_j^o - y_i^o} \tag{3.7}$$

$$\mathbf{a}_j^T = \begin{bmatrix} \dfrac{y_j - y_i}{S_{ij}^2} & -\dfrac{x_j - x_i}{S_{ij}^2} & 0 \end{bmatrix}_o$$

$$\mathbf{a}_k^T = \begin{bmatrix} \dfrac{y_k - y_i}{S_{ik}^2} & -\dfrac{x_k - x_i}{S_{ik}^2} & 0 \end{bmatrix}_o \tag{3.8}$$

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} x_i - x_i^o \\ y_i - y_i^o \\ z_i - z_i^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta x_i \\ \delta y_i \\ \delta z_i \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_j = \begin{bmatrix} x_j - x_j^o \\ y_j - y_j^o \\ z_j - z_j^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta x_j \\ \delta y_j \\ \delta z_j \end{bmatrix}, \mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} x_i - x_i^o \\ y_i - y_i^o \\ z_i - z_i^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta x_i \\ \delta y_i \\ \delta z_i \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

Η εξίσωση παρατήρησης της οριζόντιας απόστασης:

$$b_{ij}^{S} = S_{ij}^{b} - S_{ij}^{o} = -\mathbf{c}^T \mathbf{x}_i + \mathbf{c}^T \mathbf{x}_j + v_{ij}^{S} \tag{3.10}$$

όπου:

$$S_{ij}^o = \sqrt{(x_j^o - x_i^o)^2 + (y_j^o - y_i^o)^2}$$

$$\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} \dfrac{x_j - x_i}{S_{ij}} & \dfrac{y_j - y_i}{S_{ij}} & 0 \end{bmatrix}_o \tag{3.11}$$

και

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} x_i - x_i^o \\ y_i - y_i^o \\ z_i - z_i^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta x_i \\ \delta y_i \\ \delta z_i \end{bmatrix}, \mathbf{x}_j = \begin{bmatrix} x_j - x_j^o \\ y_j - y_j^o \\ z_j - z_j^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta x_j \\ \delta y_j \\ \delta z_j \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

Η εξίσωση παρατήρησης της κεκλιμένης απόστασης:

$$b_{ij}^{d} = d_{ij}^{b} - d_{ij}^{o} = -\mathbf{c}^T \mathbf{x}_i + \mathbf{c}^T \mathbf{x}_j + v_{ij}^{d} \tag{3.13}$$

όπου d_{ij}^{b} είναι η τιμή της παρατήρησης, v_{ij}^{d} το σφάλμα,

$$d_{ij}^o = \sqrt{(x_j^o - x_i^o)^2 + (y_j^o - y_i^o)^2 + (z_j^o - z_i^o)^2}$$

$$\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} \dfrac{x_j - x_i}{d_{ij}} & \dfrac{y_j - y_i}{d_{ij}} & \dfrac{z_j - z_i}{d_{ij}} \end{bmatrix}_o \tag{3.14}$$

Πίνακας 1: Οι εσωτερικές δεσμεύσεις στα "κλασικά" τριδιάστατα δίκτυα.
Table 1: Inner constraints on 3D adjustment with simple model.

Οριζόντιες διευθύνσεις ή γωνίες, ζενίθιες γωνίες	Οριζόντιες διευθύνσεις ή γωνίες, ζενίθιες γωνίες, οριζόντιες ή κεκλιμένες αποστάσεις ή υψομετρικές διαφορές	Οριζόντιες διευθύνσεις ή γωνίες, κεκλιμένες αποστάσεις ή υψομετρικές διαφορές	Κεκλιμένες αποστάσεις ή υψομετρικές διαφορές
$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ y_i^o & -x_i^o & 0 \\ x_i^o & y_i^o & z_i^o \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ y_i^o & -x_i^o & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & z_i^o & -y_i^o \\ -z_i^o & 0 & x_i^o \\ y_i^o & -x_i^o & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & z_i^o & -y_i^o \\ -z_i^o & 0 & x_i^o \\ y_i^o & -x_i^o & 0 \end{matrix}$

και

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} x_i - x_i^o \\ y_i - y_i^o \\ z_i - z_i^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta x_i \\ \delta y_i \\ \delta z_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_j = \begin{bmatrix} x_j - x_j^o \\ y_j - y_j^o \\ z_j - z_j^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta x_j \\ \delta y_j \\ \delta z_j \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Η εξίσωση παρατήρησης της ζενίθιας γωνίας:

$$b_{ij}^{\zeta} = \zeta_{ij}^{b} - \zeta_{ij}^{o} = -\mathbf{d}^T \mathbf{x}_i + \mathbf{d}^T \mathbf{x}_j + v_{ij}^{\zeta} \quad (3.16)$$

όπου:

$$\zeta_k^o = \arctan \frac{\sqrt{(x_j^o - x_i^o)^2 + (y_j^o - y_i^o)^2}}{z_j^o - z_i^o} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{d}^T = \begin{bmatrix} \dfrac{(x_j - x_i)(z_j - z_i)}{d_{ij}^2 S_{ij}} & \dfrac{(y_j - y_i)(z_j - z_i)}{d_{ij}^2 S_{ij}} & \dfrac{-S_{ij}}{d_{ij}^2} \end{bmatrix}_o \quad (3.18)$$

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} x_i - x_i^o \\ y_i - y_i^o \\ z_i - z_i^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta x_i \\ \delta y_i \\ \delta z_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_j = \begin{bmatrix} x_j - x_j^o \\ y_j - y_j^o \\ z_j - z_j^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta x_j \\ \delta y_j \\ \delta z_j \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Η εξίσωση παρατήρησης της υψομετρικής διαφοράς:

$$b_{ij}^{z} = \delta z_{ij}^{b} - z_j^o + z_i^o = -\delta z_i + \delta z_j \; v_{ij}^{z} \quad (3.20)$$

όπου δz_{ij}^{b} είναι η τιμή της παρατήρησης, v_{ij}^{z} το σφάλμα, z_i^o, z_j^o τα προσεγγιστικά υψόμετρα και δz_i, δz_j οι διορθώσεις των προσεγγιστικών υψομέτρων.

3.2. Ο ορισμός του συστήματος αναφοράς και η λύση των κανονικών εξισώσεων

Από το σύστημα $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{v}$ των εξισώσεων παρατήρησης προκύπτει το σύστημα των κανονικών εξισώσεων $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{b}$ ή $\mathbf{N} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{u}$.

Υποθέτουμε ότι το διάνυσμα $\mathbf{x}$ περιέχει μόνο τις διορθώσεις των προσεγγιστικών συντεταγμένων του δικτύου. Οι διορθώσεις των προσεγγιστικών τιμών των σταθερών προσανατολισμού απαλείφονται από το σύστημα των κανονικών εξισώσεων.

Η αδυναμία βαθμού του δικτύου εξαρτάται από τη μορφή των παρατηρήσεων που έγιναν. Οι παρατηρήσεις των γωνιακών μεγεθών μόνο (οριζόντιες διευθύνσεις, οριζόντιες και ζενίθιες γωνίες) ορίζουν το σχήμα του δικτύου καθώς και τον προσανατολισμό ως προς τον άξονα z. Στην περίπτωση αυτή, η αδυναμία βαθμού είναι 5 και για τη συνόρθωση με ελάχιστες δεσμεύσεις πρέπει να είναι γνωστές 5 συντεταγμένες. Οι 5 συντεταγμένες σχετίζονται με τη θέση του δικτύου (3 παράμετροι παράλληλης μετάθεσης), τον προσανατολισμό του στο οριζόντιο επίπεδο (1 γωνία στροφής) και το μέγεθός του (1 συντελεστής κλίμακας).

Η λύση του συστήματος των κανονικών $\mathbf{N} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{u}$ με τις ελάχιστες δεσμεύσεις $\mathbf{H}\,\mathbf{x} = \mathbf{z}$ δίνεται από τις σχέσεις:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{N}^g \mathbf{u} + \mathbf{E}^T (\mathbf{H}\mathbf{E}^T)^{-1} \mathbf{z} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{u} + \mathbf{E}^T (\mathbf{H}\mathbf{E}^T)^{-1} \mathbf{z} \quad (3.21)$$

όπου $\mathbf{R} = \mathbf{N} + \mathbf{H}^T \mathbf{H}$, $\mathbf{E}$ είναι πίνακας πλήρους βαθμού και διαστάσεων ίσων με τον πίνακα $\mathbf{H}$ και τέτοιος, ώστε $\mathbf{A}\,\mathbf{E}^T = \mathbf{0}$. Μια επιλογή του πίνακα $\mathbf{E}$ είναι αυτή των εσωτερικών δεσμεύσεων, ο οποίος έχει τη μορφή:

$$\mathbf{E} = [\, \mathbf{E}_1 \; \mathbf{E}_2 \; \ldots \; \mathbf{E}_N \,]$$

όπου κάθε υποπίνακας $\mathbf{E}_i$ δίνεται στον πίνακα (1).

Στους παραπάνω τύπους $\mathbf{N}^g$ είναι ο γενικευμένος αντίστροφος του πίνακα $\mathbf{N}$, ο οποίος σχετίζεται με τη συγκεκριμένη επιλογή των ελαχίστων δεσμεύσεων (με τη συγκεκριμένη επιλογή της θέσης του συστήματος αναφοράς ως προς το δίκτυο):

$$\mathbf{N}^g = (\mathbf{N} + \mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} + \mathbf{E}^T (\mathbf{H}\mathbf{E}^T)^{-1} (\mathbf{E}\mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{E} \quad (3.22)$$

Η λύση με τις εσωτερικές δεσμεύσεις $\mathbf{E}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ δίνεται από τις σχέσεις:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{N} + \mathbf{E}^T\,\mathbf{E})^{-1}\,\mathbf{u} \tag{3.23}$$

$$\mathbf{N}^+ = (\mathbf{N} + \mathbf{E}^T\,\mathbf{E})^{-1} + \mathbf{E}^T\,(\mathbf{E}\mathbf{E}^T)^{-1}\,(\mathbf{E}\mathbf{H}\mathbf{E}^T)^{-1}\,\mathbf{E} \tag{3.24}$$

Οι εκτιμήσεις των σφαλμάτων των παρατηρήσεων και της μεταβλητότητας αναφοράς δίνονται από τις σχέσεις:

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}} \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{f}\,\hat{\mathbf{v}}^T\,\mathbf{P}\,\hat{\mathbf{v}} \tag{3.25}$$

όπου με f συμβολίζονται οι βαθμοί ελευθερίας του δικτύου. Οι βαθμοί ελευθερίας του δικτύου εκφράζουν την επιπλέον πληροφορία που διαθέτουμε για τον υπολογισμό των αγνώστων παραμέτρων, και ορίζονται με τη βοήθεια του τύπου:

$$f = n - k + m \tag{3.26}$$

όπου m είναι ο αριθμός των αγνώστων παραμέτρων (m = 3N ή m = 3N + d, αν έγιναν παρατηρήσεις d σειρών διευθύνσεων) και k είναι ο αριθμός των δεσμεύσεων που εισάγονται στη συνόρθωση. Στην περίπτωση της συνόρθωσης ενός ανεξάρτητου δικτύου, ο αριθμός k είναι ίσος με την αδυναμία βαθμού.

3.3. Η αξιολόγηση της ακρίβειας

Οι δείκτες της ποιότητας του δικτύου είναι οι πίνακες των (συμ)μεταβλητοτήτων των αποτελεσμάτων της συνόρθωσης. Οι εκτιμήσεις των πινάκων (συμ)μεταβλητοτήτων των αποτελεσμάτων της συνόρθωσης δίνονται από τις σχέσεις:

$$\hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{x}}} = \hat{\sigma}^2\,\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \hat{\sigma}^2\,\mathbf{N}^g$$

$$\hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{v}}} = \hat{\sigma}^2\,\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}} = \hat{\sigma}^2\left(\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{A}\mathbf{N}^g\mathbf{A}^T\right)$$

και

$$\hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{y}}} = \hat{\sigma}^2\,\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{y}}} = \hat{\sigma}^2\,\mathbf{A}\mathbf{N}^g\mathbf{A}^T \tag{3.27}$$

3.4. Η μετάβαση από το σύστημα οργάνου στο σύστημα του αντικειμένου

Η μετάβαση σε ένα άλλο σύστημα αναφοράς, π.χ. ορισμένο πάνω στο αντικείμενο, γίνεται ή εκ των υστέρων με μετασχηματισμό ομοιότητας ή άκαμπτο στις τρεις διαστάσεις, ή απευθείας στη συνόρθωση, με ταυτόχρονη εκτίμηση των τριών γωνιών στροφής ω, φ, κ, γύρω από τους άξονας x, y και z [18]. Και στις δύο περιπτώσεις χρειάζεται να είναι γνωστές οι συντεταγμένες στο σύστημα του αντικειμένου τριών τουλάχιστον σημείων ή κάποιες συνθήκες, π.χ. γνωστού μήκους, συγγραμμικότητας κ.λπ.

4. Η ΣΥΝΟΡΘΩΣΗ ΤΩΝ ΜΙΚΡΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ ΜΕ ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΗ ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΩΝ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ ΟΡΙΖΟΝΤΙΩΣΗΣ ΤΩΝ ΘΕΟΔΟΛΙΧΩΝ

Στην περίπτωση των κοινών θεοδολίχων (ηλεκτρονικών ή ακόμα και οπτικών), το σφάλμα οριζοντίωσης θα πρέπει να ελέγχεται και, αν είναι σημαντικό, να συμπεριλαμβάνεται στις εξισώσεις παρατηρήσεων, ώστε να ισχύει η υπόθεση των ισοβαρών παρατηρήσεων στις γωνιομετρήσεις.

Η γωνία διεύθυνσης α_{ij}, η ζενίθια γωνία ζ_{ij} και η κεκλιμένη απόσταση d_{ij}, που μετρώνται από το σημείο P_i προς το σημείο P_j, με ένα "μη οριζοντιωμένο" θεοδόλιχο, συνδέονται με τις συντεταγμένες x_i, y_i, z_i και x_j, y_j, z_j των σημείων P_i, P_j στο τοπικό σύστημα αναφοράς, μέσω των σχέσεων [16, 18]:

$$\begin{bmatrix} d_{ij}\sin\zeta_{ij}\sin\alpha_{ij} \\ d_{ij}\sin\zeta_{ij}\cos\alpha_{ij} \\ d_{ij}\cos\zeta_{ij} \end{bmatrix} = \tag{4.1}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\nu_{ij} & 0 & \sin\nu_{ij} \\ -\sin\nu_{ij}\sin\mu_{ij} & \cos\mu_{ij} & \cos\nu_{ij}\sin\mu_{ij} \\ -\sin\nu_{ij}\cos\mu_{ij} & -\sin\mu_{ij} & \cos\nu_{ij}\cos\mu_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_j - x_i \\ y_j - y_i \\ z_j - z_i \end{bmatrix}$$

όπου ν_i, μ_i οι συνιστώσες απόκλισης του πρωτεύοντος άξονα του θεοδολίχου στα επίπεδα (x, z) και (y, z) αντιστοίχως (συνιστώσες του σφάλματος οριζοντίωσης).

Γραμμικοποιώντας τις σχέσεις αυτές και θεωρώντας τις αποκλίσεις του πρωτεύοντος άξονα πολύ μικρές ($\nu_i^o = 0$, $\mu_i^o = 0$), προκύπτουν οι εξισώσεις για το αζιμούθιο και τη ζενίθια γωνία αντιστοίχως:

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ij}^o - \mathbf{a}^T\,\mathbf{x}_i + \mathbf{a}^T\,\mathbf{x}_j + \mathbf{r}^T\,\mathbf{y}_i \tag{4.2}$$

όπου $\mathbf{y}_i = \begin{bmatrix} \delta\nu_i \\ \delta\mu_i \end{bmatrix}$

είναι οι συνιστώσες του σφάλματος οριζοντίωσης,

$$\mathbf{r}^T = \left[\frac{(y_j - y_i)(z_j - z_i)}{S_{ij}^2} \quad -\frac{(x_j - x_i)(z_j - z_i)}{S_{ij}^2}\right]_o$$

και

$$\zeta_{ij} = \zeta_{ij}^o - \mathbf{d}^T\,\mathbf{x}_i + \mathbf{d}^T\,\mathbf{x}_j + \mathbf{t}^T\,\mathbf{y}_i \tag{4.3}$$

όπου $\mathbf{t}^T = \left[\frac{x_j - x_i}{S_{ij}} \quad \frac{y_j - y_i}{S_{ij}}\right]_o$

Οι εξισώσεις παρατηρήσεων της οριζόντιας διεύθυνσης, καθώς και της οριζόντιας και της ζενίθιας γωνίας, παίρνουν τη μορφή:

α. της οριζόντιας διεύθυνσης

$$b_{ij}^{\delta} = -\mathbf{a}^T\,\mathbf{x}_i + \mathbf{a}^T\,\mathbf{x}_j - \mathbf{r}^T\,\mathbf{y}_i - \delta\theta_k + v_{ij}^{\delta} \tag{4.4}$$

β. της οριζόντιας γωνίας

$$b^{\omega}_{ijk} = (\mathbf{a}_j^T - \mathbf{a}_k^T)\,\mathbf{x}_i - \mathbf{a}_j^T \mathbf{x}_j + \mathbf{a}_k^T \mathbf{x}_k\,(\mathbf{r}_j^T - \mathbf{r}_k^T)\,\mathbf{y}_i + v^{\omega}_{ij} \tag{4.5}$$

$$\text{όπου } \mathbf{r}_j^T = \left[\frac{(y_j - y_i)(z_j - z_i)}{S^2_{ij}} \quad -\frac{(x_j - x_i)(z_j - z_i)}{S^2_{ij}} \right]_o$$

$$\text{και } \mathbf{r}_k^T = \left[\frac{(y_k - y_i)(z_k - z_i)}{S^2_{ik}} \quad -\frac{(x_k - x_i)(z_k - z_i)}{S^2_{kj}} \right]_o$$

γ. της ζενίθιας γωνίας

$$b^{\zeta}_{ij} = \zeta^{b}_{ij} - \zeta^{o}_{ij} = -\,\mathbf{d}^T \mathbf{x}_i + \mathbf{d}^T \mathbf{x}_j + \mathbf{t}^T \mathbf{y}_i + v^{\zeta}_{ij} \tag{4.6}$$

Το σύστημα των εξισώσεων παρατηρήσεων σε μορφή πινάκων γράφεται:

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{B}\,\mathbf{y} + \mathbf{v} \tag{4.7}$$

όπου **y** είναι το διάνυσμα των $\delta\nu_i$, $\delta\mu_i$. Για τη συνόρθωση των μετρήσεων μπορεί να ακολουθηθεί η παρακάτω τεχνική:

α. Σχηματισμός των κανονικών εξισώσεων

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N_x} & \mathbf{N_{xy}} \\ \mathbf{N_{xy}^T} & \mathbf{N_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u_x} \\ \mathbf{u_y} \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

β. Ορισμός του συστήματος αναφοράς

Οι 2 νέες άγνωστες παράμετροι $\delta\nu_i$ και $\delta\mu_i$ σε κάθε σταθμό προσθέτουν 2 βαθμούς αδυναμίας στο δίκτυο (στροφή γύρω από τους άξονες x και y). Επίσης, οι εσωτερικές δεσμεύσεις μπορεί να αναφέρονται στο σύνολο των αγνώστων παραμέτρων

$$\dot{\mathbf{E}}\,\mathbf{x} + \ddot{\mathbf{E}}\,\mathbf{y} = \mathbf{0} \tag{4.9}$$

ή διαχωρισμένα

$$\ddot{\mathbf{E}}\,\mathbf{y} = \mathbf{0}\,, \qquad \dot{\mathbf{E}}\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{4.10}$$

ή μόνο στις συντεταγμένες των σημείων (μερικές εσωτερικές δεσμεύσεις)

$$\dot{\mathbf{E}}\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{4.11}$$

Η δεύτερη περίπτωση είναι και η πιο χρήσιμη, επειδή μας ενδιαφέρει κυρίως να προσανατολισθεί το δίκτυο κατά την κατακόρυφο και στη συνέχεια να αξιολογηθεί η ακρίβεια των συντεταγμένων των σημείων του δικτύου.

Ο πίνακας **E** γενικά των εσωτερικών δεσμεύσεων έχει τη μορφή:

$$\mathbf{E} = \left[\dot{\mathbf{E}} \quad \ddot{\mathbf{E}}\right] = \left[\dot{\mathbf{E}}_1 \quad \dot{\mathbf{E}}_2 \quad \ldots \quad \dot{\mathbf{E}}_N \quad \ddot{\mathbf{E}}_1 \quad \ddot{\mathbf{E}}_2 \quad \ldots \quad \ddot{\mathbf{E}}_m\right] \tag{4.12}$$

όπου N είναι ο συνολικός αριθμός των κορυφών του δικτύου, m είναι ο αριθμός των σημείων στάσης του θεοδολίχου. Κάθε υποπίνακας του **E** δίνεται στον πίνακα (2) για τις περιπτώσεις των δεσμεύσεων (4.9) και (4.11), ενώ για την περίπτωση (4.10) είναι $\ddot{\mathbf{E}}_i = \mathbf{I}_2$ και ο $\dot{\mathbf{E}}_i$ δίνεται στον πίνακα (1).

Η δομή του πίνακα $\ddot{\mathbf{E}}_i$ των δεσμεύσεων (4.9) και (4.11) είναι ίδια με αυτή που αντιστοιχεί στις συνιστώσες απόκλισης της κατακορύφου στα ολοκληρωμένα γεωδαιτικά δίκτυα [16]. Σχετική εργασία με τις εσωτερικές δεσμεύσεις στα μικρά δίκτυα έχει γίνει και από τον Camacho (1988).

Εκτός από τις εσωτερικές δεσμεύσεις, το σύστημα αναφοράς μπορεί να ορισθεί και με τη βοήθεια γνωστών σημείων ελέγχου. Ανάλογα με τον αριθμό των γνωστών σημείων ορίζονται και οι δεσμεύσεις ως ελάχιστες ή πλεονάζουσες.

Το μέγεθος του δικτύου, σε περιπτώσεις υψηλής ακρίβειας και όταν δεν υπάρχουν παρατηρήσεις αποστάσεων ή γνωστά σημεία ελέγχου, ορίζεται με τη βοήθεια ειδικών βάσεων (π.χ. δίμετρες βάσεις invar) και όχι από τις εσωτερικές δεσμεύσεις.

γ. Υπολογισμός της λύσης

Αν και ο πιο απλός τρόπος εισαγωγής δεσμεύσεων είναι η διατήρηση ορισμένου αριθμού σταθερών συντεταγμένων, στη συνέχεια θα δώσουμε τη λύση για ελάχιστες δεσμεύσεις της μορφής:

$$\dot{\mathbf{H}}\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{ή} \quad \ddot{\mathbf{H}}\,\mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{H}}\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{ή} \quad \dot{\mathbf{H}}\,\mathbf{x} + \ddot{\mathbf{H}}\,\mathbf{y} = \mathbf{0}$$

επειδή από τις σχέσεις αυτές προκύπτουν και οι εσωτερικές δεσμεύσεις:

$$\dot{\mathbf{E}}\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{ή} \quad \ddot{\mathbf{E}}\,\mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{E}}\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{ή} \quad \dot{\mathbf{E}}\,\mathbf{x} + \ddot{\mathbf{E}}\,\mathbf{y} = \mathbf{0}$$

καθώς και οποιεσδήποτε άλλες μερικές εσωτερικές ή ελάχιστες δεσμεύσεις.

1. Στην περίπτωση των ελαχίστων δεσμεύσεων

$\dot{\mathbf{H}}\,\mathbf{x} + \ddot{\mathbf{H}}\,\mathbf{y} = \mathbf{0}$, η λύση δίνεται από τις σχέσεις:

$$\mathbf{R_x} = \mathbf{N_x} - \mathbf{R_{xy}^T}\,\mathbf{R_y^{-1}}\,\mathbf{R_{xy}} + \dot{\mathbf{H}}^T\,\dot{\mathbf{H}}$$

$$\mathbf{R_{xy}} = \mathbf{N_{xy}} + \dot{\mathbf{H}}^T\,\ddot{\mathbf{H}}\,, \quad \mathbf{R_y} = \mathbf{N_y} + \ddot{\mathbf{H}}^T\,\ddot{\mathbf{H}} \tag{4.13}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R_x^{-1}}\,\left[\mathbf{u_x} - \mathbf{R_{xy}}\,\mathbf{R_y^{-1}}\,\mathbf{u_y}\right] \tag{4.14}$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{R_y^{-1}}\,\left[\mathbf{u_y} - \mathbf{R_{xy}^T}\,\hat{\mathbf{x}}\right] \tag{4.15}$$

$$\mathbf{Q_{\hat{x}}} = \mathbf{R_x^{-1}} - \dot{\mathbf{E}}^T\,\mathbf{S}^{-1}\,\dot{\mathbf{E}} \tag{4.16}$$

$$\mathbf{Q_{\hat{y}}} = \mathbf{R_y^{-1}} + \mathbf{R_y^{-1}}\,\mathbf{R_{xy}^T}\,\mathbf{Q_{\hat{x}}}\,\mathbf{R_{xy}}\,\mathbf{R_y^{-1}} - \ddot{\mathbf{E}}^T\,\mathbf{S}^{-1}\,\ddot{\mathbf{E}} \tag{4.17}$$

Πίνακας 2: Οι εσωτερικές δεσμεύσεις του διευρυμένου μοντέλου.
Table 2: Inner constraints on 3D adjustment with extended model.

Οριζόντιες διευθύνσεις ή γωνίες, ζενίθιες γωνίες		Οριζόντιες διευθύνσεις ή γωνίες, ζενίθιες γωνίες, οριζόντιες ή κεκλιμένες αποστάσεις ή υψομετρικές διαφορές Οριζόντιες διευθύνσεις ή γωνίες, κεκλιμένες αποστάσεις ή υψομετρικές διαφορές	
$\dot{\mathbf{E}}_i$	$\ddot{\mathbf{E}}_i$	$\dot{\mathbf{E}}_i$	$\ddot{\mathbf{E}}_i$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & z_i^o & -y_i^o \\ -z_i^o & 0 & x_i^o \\ y_i^o & -x_i^o & 0 \\ x_i^o & y_i^o & z_i^o \end{bmatrix}$	$\frac{1}{r_i}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -z_i^o \\ z_i^o & 0 \\ -y_i^o & x_i^o \\ -x_i^o & y_i^o \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & z_i^o & -y_i^o \\ -z_i^o & 0 & x_i^o \\ y_i^o & -x_i^o & 0 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{r_i}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -z_i^o \\ z_i^o & 0 \\ -y_i^o & x_i^o \end{bmatrix}$
όπου $r_i = \sqrt{x_i^o + y_i^o + z_i^o}$			

$$\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{y}} = -\mathbf{Q}_{\hat{x}}\,\mathbf{R}_{xy}\,\mathbf{R}_y^{-1} + \dot{\mathbf{E}}^T\,\mathbf{S}^{-1}\,\ddot{\mathbf{E}} \tag{4.18}$$

όπου $\mathbf{S}^{-1} = (\dot{\mathbf{H}}\dot{\mathbf{E}}^T + \ddot{\mathbf{H}}\ddot{\mathbf{E}}^T)^{-1}(\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}^T + \ddot{\mathbf{E}}\ddot{\mathbf{H}}^T)^{-1}$ (4.19)

2. Στην περίπτωση της διαχωρισμένης εισαγωγής των εσωτερικών δεσμεύσεων

$\ddot{\mathbf{H}}\,\mathbf{y} = \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{H}}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$

λύση δίνεται από τις προηγούμενες σχέσεις, όπου όμως

$\mathbf{R}_{xy} = \mathbf{N}_{xy}$ και

$$\mathbf{Q}_{\hat{x}} = \mathbf{R}_x^{-1} - \dot{\mathbf{E}}^T(\dot{\mathbf{H}}\dot{\mathbf{E}}^T)^{-1}(\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}^T)^{-1}\dot{\mathbf{E}} \tag{4.20}$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{y}} = \mathbf{R}_y^{-1} + \mathbf{R}_y^{-1}\mathbf{R}_{xy}^T\mathbf{Q}_{\hat{x}}\mathbf{R}_{xy}\mathbf{R}_y^{-1} - \dot{\mathbf{E}}^T(\dot{\mathbf{H}}\ddot{\mathbf{E}}^T)^{-1}(\ddot{\mathbf{E}}\ddot{\mathbf{H}}^T)^{-1}\ddot{\mathbf{E}} \tag{4.21}$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{y}} = -\mathbf{Q}_{\hat{x}}\,\mathbf{R}_{xy}\,\mathbf{R}_y^{-1} \tag{4.22}$$

3. Η λύση, στην περίπτωση των ελαχίστων δεσμεύσεων

$\dot{\mathbf{H}}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$

δίνεται από τις σχέσεις:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}_x^{-1}\left[\mathbf{ux} - \mathbf{N}_{xy}\mathbf{N}_y^{-1}\mathbf{u}_y\right] \tag{4.23}$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{N}_y^{-1}\left[\mathbf{u}_y - \mathbf{N}_{xy}^T\hat{\mathbf{x}}\right] \tag{4.24}$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{x}} = \mathbf{R}_x^{-1} - \dot{\mathbf{E}}^T(\dot{\mathbf{H}}\dot{\mathbf{E}}^T)^{-1}(\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}^T)^{-1}\dot{\mathbf{E}} \tag{4.25}$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{y}} = \mathbf{N}_y^{-1} + \mathbf{N}_y^{-1}\mathbf{N}_{xy}^T\mathbf{Q}_{\hat{x}}\mathbf{N}_{xy}\mathbf{N}_y^{-1} \tag{4.26}$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{y}} = -\mathbf{Q}_{\hat{x}}\,\mathbf{N}_{xy}\,\mathbf{N}_y^{-1} \tag{4.27}$$

όπου: $\mathbf{R}_x = \mathbf{N}_x - \mathbf{N}_{xy}^T\mathbf{N}_y^{-1}\mathbf{N}_{xy} + \dot{\mathbf{H}}^T\dot{\mathbf{H}}$ (4.28)

Οι εκτιμήσεις των σφαλμάτων των παρατηρήσεων, της μεταβλητότητας αναφοράς και του πίνακα των συντελεστών των (συμ)μεταβλητοτήτων τους δίνονται από τις σχέσεις:

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{B}\,\hat{\mathbf{y}} \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{f}\,\hat{\mathbf{v}}^T\,\mathbf{P}\,\hat{\mathbf{v}} \tag{4.29}$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{v}} = \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{A}\mathbf{Q}_{\hat{x}}\mathbf{A}^T - \mathbf{A}\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{y}}\mathbf{B}^T - \mathbf{B}\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{y}}^T\mathbf{A}^T - \mathbf{B}\mathbf{Q}_{\hat{y}}\mathbf{B}^T \tag{4.30}$$

όπου $f = n + k - m$ οι βαθμοί ελευθερίας του δικτύου, $m = 3N + q + d$, q ο συνολικός αριθμός των παραμέτρων $\delta\nu_i$, $\delta\mu_i$.

Τα στοιχεία $\delta\hat{\nu}_i$, $\delta\hat{\mu}_i$ του διανύσματος $\hat{\mathbf{y}}$ στη γενική περίπτωση οποιωνδήποτε ελαχίστων δεσμεύσεων περιέχουν, εκτός από τις συνιστώσες των σφαλμάτων οριζοντίωσης των οργάνων, και τις αποκλίσεις του συστήματος αναφοράς που ορίστηκε κατά τη συνόρθωση από το σύστημα του κάθε οργάνου. Στην περίπτωση που το σύστημα αναφοράς ορίζεται έτσι, ώστε ο άξονας z να ταυτίζεται με τον πρωτεύοντα άξονα ενός οργάνου, ή μέσω των εσωτερικών δεσμεύσεων της σχέσης (4.10) τα στοιχεία $\delta\hat{\nu}_i$, $\delta\hat{\mu}_i$ εκφράζουν τα σχετικά σφάλματα οριζοντίωσης ως προς το συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς. Ένας ολικός έλεγχος σημαντικότητας των συνιστωσών των σφαλμάτων οριζοντίωσης γίνεται τότε σύμφωνα με τον τύπο:

$$\frac{\hat{\mathbf{y}}^T (\mathbf{N}_{xy}^T \mathbf{N}_x^g \mathbf{N}_{xy}) \hat{\mathbf{y}}}{q\,\hat{\sigma}^2} \sim F_{q,f} \tag{4.31}$$

Ο παραπάνω τύπος μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τον έλεγχο καλής λειτουργίας της αεροστάθμης ενός θεοδολίχου κατά τη βαθμονόμησή του.

5. ΟΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΩΣ ΔΕΣΜΕΥΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗ ΤΩΝ ΜΙΚΡΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ

Μια πολύ χρήσιμη επιλογή στις συνορθώσεις των μικροτριγωνισμών υψηλής ακρίβειας είναι η συμμετοχή γεωμετρικών συνθηκών μεταξύ των σημείων ελέγχου ως δεσμεύσεων. Τέτοιες συνθήκες είναι: η συνθήκη συνεπιπεδότητας, η συνθήκη ευθυγραμμίας στο χώρο ή στο επίπεδο, η συνθήκη παραλληλίας μεταξύ δύο ή περισσοτέρων ευθειών, η συνθήκη καθετότητας κ.λπ. Οι ουσιαστικές αυτές δεσμεύσεις χρησιμοποιούνται:

α. Για να αυξήσουν τους βαθμούς ελευθερίας του δικτύου, συμπληρώνοντας τις πληροφορίες των παρατηρήσεων σχετικά με τις παραμέτρους των σφαλμάτων οριζοντίωσης των θεοδολίχων.
β. Για τον ορισμό του μεγέθους, όταν δεν ορίζεται από τις παρατηρήσεις (π.χ. με τη βοήθεια δύο ή περισσοτέρων διμέτρων βάσεων invar).
γ. Για τον προσανατολισμό των θεοδολίχων, όταν δεν σκοπεύονται κοινά σημεία και για να αποφευχθούν σκοπεύσεις μεταξύ των θεοδολίχων (π.χ. προσανατολισμός των θεοδολίχων με τη βοήθεια σημείων σε ευθυγραμμία [10]).
δ. Για τον έλεγχο συγκεκριμένων γεωμετρικών συνθηκών πάνω στο αντικείμενο που ελέγχεται (π.χ. έλεγχος ευθυγράμμισης του άξονα του αεροσκάφους).

Οι γεωμετρικές συνθήκες ως δεσμεύσεις μπορούν να εισαχθούν στη συνόρθωση του δικτύου με τη βοήθεια εξισώσεων της μορφής της σχέσης $\mathbf{H}\,\mathbf{x} = \mathbf{z}$. Η λύση μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας δύο επί μέρους και ισοδύναμους αλγόριθμους, ανάλογα με τις δυνατότητες και τη συγκεκριμένη εφαρμογή: τον ενιαίο και το διαχωρισμένο αλγόριθμο.

Σύμφωνα με τον *ενιαίο αλγόριθμο*, οι δεσμεύσεις εισάγονται συνολικά, μαζί με αυτές για τον ορισμό του συστήματος αναφοράς, ως πλεονάζουσες και με τη βοήθεια του συστήματος $\mathbf{H}\,\mathbf{x} = \mathbf{z}$. Η λύση δίνεται από τις σχέσεις:

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}_R - \mathbf{R}^{-1}\,\mathbf{H}^T\,(\mathbf{H}\,\mathbf{R}^{-1}\,\mathbf{H}T)^{-1}\,(\mathbf{H}\;\hat{\mathbf{x}}_R - \mathbf{z}) \tag{5.1}$$

$$\text{όπου: } \mathbf{R} = \mathbf{N} + \mathbf{H}^T\,\mathbf{H},\;\; \hat{\mathbf{x}}_R = \mathbf{R}^{-1}\,\mathbf{u} \tag{5.2}$$

Η βάση για το *διαχωρισμένο αλγόριθμο* δίνεται από τους παρακάτω τύπους: Αν γράψουμε το σύστημα $\mathbf{H}\,\mathbf{x} = \mathbf{z}$ με τη μορφή:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

όπου ο πίνακας $\mathbf{H}_1$ είναι πλήρους βαθμού, τουλάχιστον ίσου με την αδυναμία βαθμού του πίνακα $\mathbf{N}$, τότε το σύστημα $\mathbf{H}_1\,\mathbf{x} = \mathbf{z}_1$ δίνει την αρχική λύση:

$$\hat{\mathbf{x}}_o = (\mathbf{N} + \mathbf{H}_1^T\,\mathbf{H}_1)^{-1}\,\mathbf{u} + \mathbf{E}^T\,(\mathbf{H}_1\,\mathbf{E}^T)^{-1}\,\mathbf{z}_1 \tag{5.4}$$

$$\mathbf{N}_o^g = (\mathbf{N} + \mathbf{H}_1^T\,\mathbf{H}_1)^{-1} + \mathbf{E}^T\,(\mathbf{H}_1\,\mathbf{E}^T)^{-1}\,(\mathbf{E}\mathbf{H}_1^T)^{-1}\,\mathbf{E} \tag{5.5}$$

για την περίπτωση που οι δεσμεύσεις αυτές είναι ελάχιστες, ή γενικότερα

$$\hat{\mathbf{x}}_o = [\,\mathbf{R}_1^{-1} - \mathbf{R}_1^{-1}\;\mathbf{H}_1^T\,(\mathbf{H}_1\,\mathbf{R}_1^{-1}\,\mathbf{H}_1^T)^{-1}\;\mathbf{R}_1^{-1}\,]\,\mathbf{u} + \\ + \mathbf{R}_1^{-1}\;\mathbf{H}_1^T\,(\,\mathbf{H}_1\,\mathbf{R}_1^{-1}\,\mathbf{H}_1^T\,)^{-1}\;\mathbf{z}_1 \tag{5.6}$$

$$\mathbf{N}_o^g = \mathbf{R}_1^{-1} - \mathbf{R}_1^{-1}\;\mathbf{H}_1^T\,(\,\mathbf{H}_1\,\mathbf{R}_1^{-1}\,\mathbf{H}_1^T\,)^{-1}\;\mathbf{R}_1^{-1} \tag{5.7}$$

($\mathbf{R}_1 = \mathbf{N} + \mathbf{H}_1^T\;\mathbf{H}_1$), ενώ το σύστημα $\mathbf{H}_2\,\mathbf{x} = \mathbf{z}_2$ εισάγει τις αυστηρά ουσιαστικές δεσμεύσεις. Η τελική λύση δίνεται από τις σχέσεις:

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}_o - \mathbf{N}_o^g\;\mathbf{H}_2^T\;(\mathbf{H}_2\,\mathbf{N}_o^g\;\mathbf{H}_2^T)^{-1}\,(\mathbf{H}_2\,\hat{\mathbf{x}}_o - \mathbf{z}_2) \tag{5.8}$$

$$\hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{x}}} = \hat{\sigma}^2\,[\,\mathbf{N}_o^g - \mathbf{N}_o^g\;\mathbf{H}_2^T\;(\mathbf{H}_2\,\mathbf{N}_o^g\;\mathbf{H}_2^T)^{-1}\,\mathbf{H}_2\;\mathbf{N}_o^g\,] \tag{5.9}$$

$$\hat{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{v}}} = \hat{\sigma}^2\,\{\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{A}\,[\mathbf{N}_o^g - \mathbf{N}_o^g\,\mathbf{H}_2^T(\mathbf{H}_2\mathbf{N}_o^g\mathbf{H}_2^T)^{-1}\mathbf{H}_2\mathbf{N}_o^g]\,\mathbf{A}^T\} \tag{5.10}$$

Σύμφωνα με το διαχωρισμένο αλγόριθμο, οι αυστηρά ουσιαστικές δεσμεύσεις μπορούν να εισαχθούν μία-μία χωριστά και όχι ταυτόχρονα όλες μαζί. Έτσι έχουμε τη δυνατότητα ελέγχου κάθε δέσμευσης σε σχέση με τις προηγούμενες λύσεις [14, 19].

6. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Για την υλοποίηση όλων των αλγορίθμων, που αφορούν στις παραπάνω περιπτώσεις, συντάχθηκε στον Τομέα Γεωδαισίας και Τοπογραφίας του ΑΠΘ ένα ολοκληρωμένο πρόγραμμα συνόρθωσης σε γλώσσα Turbo C 2.01 (SMANET, [11]), το οποίο μέσω φιλικού περιβάλλοντος εργασίας (μενού, παράθυρα, μηνύματα λαθών κ.λπ.) προσφέρει διάφορες επιλογές, ανάλογα με την περίπτωση που κάθε φορά ενδιαφέρει. Το πρόγραμμα σχεδιάστηκε με λογική "ανοικτής αρχιτεκτονικής" έτσι, ώστε να είναι εύκολα επεκτάσιμο σε οποιαδήποτε καινούργια ανάγκη (π.χ. με καινούργιες γεωμετρικές

συνθήκες που ελέγχονται μέσω του διαχωρισμένου αλγορίθμου).

Για τον έλεγχο τόσο των αλγορίθμων που αναπτύχθηκαν όσο και του προγράμματος SMANET, εγκαταστάθηκε και μετρήθηκε ένα 3Δ δίκτυο στο υπόγειο του Εργαστηρίου Φωτογραμμετρίας του ΤΑΤΜ/ΑΠΘ [11]. Στο δίκτυο αυτό χρησιμοποιήθηκαν 3 θεοδόλιχα (Wild T2) για την υλοποίηση ισάριθμων σημείων στάσης (σημεία αναφοράς) και μία δίμετρη βάση invar για τον προσδιορισμό της κλίμακας του δικτύου. Τα βασικά σημεία σκόπευσης αποτελούσαν 19 στόχοι (σημεία ελέγχου), τοποθετημένοι σε διάφορα κατακόρυφα επίπεδα των τοίχων του εργαστηρίου. Τα σημεία αυτά προορίζονταν για την ίδρυση ενός πεδίου βαθμονόμησης φωτογραφικών μηχανών.

Τα 3 θεοδόλιχα στήθηκαν σε τυχαίες θέσεις, απέναντι από τα σημεία σκόπευσης, και με μία όσο το δυνατό πιο κανονική διάταξη (ισοπλεύρου τριγώνου), ώστε να υπάρχει καλή γεωμετρία στο δίκτυο. Η δίμετρη βάση invar τοποθετήθηκε σε οριζόντια θέση, ανάμεσα στα θεοδόλιχα και στα σημεία ελέγχου. Η μέση τιμή των αποστάσεων σκόπευσης από τα 3 όργανα ήταν περίπου 5-6 m. Οι μετρήσεις, που εκτελέστηκαν στο δίκτυο, ήταν οριζόντιες διευθύνσεις (σε 6 περιόδους) και ζενίθιες γωνίες (σε 4 περιόδους).

Ιδιαίτερα δύσκολες, όπως ήταν αναμενόμενο, αποδείχθηκαν οι αλληλοσκοπεύσεις μεταξύ των θεοδολίχων, μέσω της σκόπευσης του σταυρονήματος του ενός από το άλλο. Αυτό οφειλόταν κατά κύριο λόγο στις πολύ άσχημες συνθήκες φωτισμού του χώρου και στο γεγονός ότι τέτοιου είδους σκοπεύσεις απαιτούν αφ' ενός μεγάλη εμπειρία και αφ' ετέρου ειδικά τηλεσκόπια και συστήματα εστίασης στα θεοδόλιχα. Οι παρατηρήσεις αυτές θεωρήθηκαν κατ' αρχήν απαραίτητες, ώστε να βελτιωθεί η γεωμετρία του δικτύου, ιδιαίτερα στην περίπτωση που αυτό συνορθώνεται σύμφωνα με το διευρυμένο μοντέλο. Παρ' όλα αυτά οι άσχημες συνθήκες δεν επέτρεψαν τις παρατηρήσεις από το ένα σημείο στάσης (συγκεκριμένα το σημείο 2 του δικτύου) προς τα 2 άλλα (σημεία 1 και 3 του δικτύου).

Το δίκτυο αντιμετωπίστηκε και με τα 2 μοντέλα συνόρθωσης που έχουν αναφερθεί (απλό και διευρυμένο). Επίσης, στην περίπτωση της συνόρθωσης μέσω του απλού μοντέλου έγινε μία επιπλέον διαφοροποίηση, σχετικά με την εισαγωγή ή όχι στις παρατηρήσεις, των σκοπεύσεων που έγιναν ανάμεσα στα θεοδόλιχα. Έτσι λοιπόν:

- Η λύση 1 αναφέρεται στη συνόρθωση με το απλό μοντέλο, όταν στις παρατηρήσεις δεν περιλαμβάνονται οι σκοπεύσεις μεταξύ των θεοδολίχων.
- Η λύση 2 αναφέρεται στη συνόρθωση με το απλό μοντέλο, όταν στις παρατηρήσεις περιλαμβάνονται και οι σκοπεύσεις μεταξύ των θεοδολίχων.
- Η λύση 3 αναφέρεται στη συνόρθωση με το διευρυμένο μοντέλο, όταν στις παρατηρήσεις περιλαμβάνονται και οι σκοπεύσεις μεταξύ των θεοδολίχων.

Για τις λύσεις 1 και 2 το τοπικό σύστημα αναφοράς ορίστηκε με τη βοήθεια ελαχίστων σταθερών συντεταγμένων. Συγκεκριμένα, κρατήθηκαν κατά τη συνόρθωση σταθερές οι 3 συντεταγμένες (x, y, z) του ενός άκρου της δίμετρης βάσης (σημείο 10 του δικτύου) και οι συντεταγμένες (x, y) του άλλου άκρου της βάσης (σημείο 20 του δικτύου). Με τον τρόπο αυτόν το τοπικό σύστημα θα έχει την αρχή του στο σημείο 10 και προσανατολισμό στο οριζόντιο επίπεδο xy έτσι, ώστε η διεύθυνση 10-20 να είναι παράλληλη προς τον άξονα των x. Η κλίμακα του δικτύου θα είναι τέτοια, ώστε το οριζόντιο μήκος της βάσης να διατηρείται σταθερό με 2 m.

Οι διαφορές στις συνορθωμένες συντεταγμένες των σημείων, που προέκυψαν από τις 2 αυτές λύσεις, ήταν ελάχιστες (η μεγαλύτερη ήταν 1mm). Οι τυπικές αποκλίσεις των συντεταγμένων και στις 2 περιπτώσεις κυμαίνονταν από 0.05-0.25mm και διατηρούνταν, κατά σημείο, σταθερές. Σταθερά, επίσης, παρέμεναν και τα στοιχεία των ελλειψοειδών σφάλματος για κάθε σημείο του δικτύου. Η σύγκριση των στατιστικών στοιχείων των 2 λύσεων φαίνεται στον πίνακα 3.

Προκύπτει λοιπόν ότι για τις λύσεις 1 και 2 δεν υπάρχουν ουσιαστικές διαφορές στα αποτελέσματα της συνόρθωσης. Σημειώνεται, όμως, στο σημείο αυτό ότι κατά τη σάρωση δεδομένων, για την περίπτωση της λύσης 2, παρουσιάστηκαν προβλήματα σε όλες σχεδόν τις παρατηρήσεις που αφορούσαν στις αλληλοσκοπεύσεις μεταξύ των 2 θεοδολίχων. Μετά τις διαδοχικές συνορθώσεις που έγιναν, παρέμειναν τελικά στη συνόρθωση μόνο 3 από τις 8 συνολικά αλληλοσκοπεύσεις των οργάνων. Με βάση το στοιχείο αυτό επιβεβαιώνουμε την αρχική υπόθεση σχετικά με την επικινδυνότητα τέτοιου είδους σκοπεύσεων.

Σχετικά με τη λύση 3, το τοπικό σύστημα αναφοράς κατ' αρχήν ορίστηκε έτσι, ώστε ο άξονας του z να ταυτίζεται με τον πρωτεύοντα άξονα του θεοδολίχου που στήθηκε στο σημείο 1 του δικτύου. Για τις υπόλοιπες 5 παραμέτρους του συστήματος χρησιμοποιήθηκαν οι ίδιες δεσμεύσεις με τις λύσεις 1 και 2. Πρέπει να επισημανθεί το γεγονός ότι η λύση αυτή του δικτύου, θεωρητικά, δεν είναι συγκρίσιμη (ως προς τις συντεταγμένες των σημείων) με τις 2 προηγούμενες λύσεις, αφού τα συστήματα αναφοράς, που ορίζονται από τη συνόρθωση, θα διαφέρουν. Πρακτικά βέβαια η στροφή μεταξύ των συστημάτων θα είναι πολύ μικρή (αφού τα σφάλματα οριζοντίωσης είναι μικρές ποσότητες), ώστε με δεδομένες τις πολύ κοντινές αποστάσεις μεταξύ των σημείων, οι συντεταγμένες τους να είναι περίπου οι ίδιες. Το γεγονός αυτό επιβεβαιώνεται και από τα αποτελέσματα της συνόρθωσης,

Πίνακας 3: Στατιστικά στοιχεία για τη σύγκριση των λύσεων.
Table 3: Statistics for the comparison of the solutions.

	λύση 1	λύση 2	λύση 3
$\hat{\sigma}^2$	1.0503	1.2206	1.1636
$\hat{\varphi}$	55.6675	68.3533	60.5059
f	53	56	52

από όπου βλέπουμε ότι, σε σχέση με τις 2 προηγούμενες λύσεις, η μεγαλύτερη διαφορά των συντεταγμένων είναι 2 mm. Οι ακρίβειες υπολογισμού των συνορθωμένων συντεταγμένων φαίνεται να είναι κατά τι καλύτερες από τις 2 προηγούμενες λύσεις, αφού αυτές κυμαίνονταν από 0.05-0.15 mm. Ως προς την αξιολόγηση της αξιοπιστίας της λύσης, τα στατιστικά στοιχεία έδιναν την ίδια ικανοποιητική εικόνα με αυτά των 2 προηγουμένων λύσεων.

Ο έλεγχος σημαντικότητας των επιδράσεων των συνιστωσών των σφαλμάτων οριζοντίωσης έδειξε ότι αυτά δεν είναι σημαντικά. Η τιμή της στατιστικής ποσότητας της σχέσης (4.31) ήταν 1.12 και για ένα επίπεδο σημαντικότητας (a=0.05) περνούσε τον έλεγχο ($F_{q,f} = 2.3$ με a=0.05, f=52 και q=6). Το μέγεθος των συνιστωσών αυτών ήταν 12.5 και 2.4 cc για το σημείο στάσης 2 και 11.1 και 35.0 cc για το σημείο στάσης 3. Το γεγονός αυτό επιτρέπει, σε παρόμοιες περιπτώσεις, την εκ νέου συνόρθωση του δικτύου με το απλό μοντέλο. Στην περίπτωσή μας, πράγματι η συνόρθωση αυτή (λύσεις 1 και 2) δείχνει ότι τα σφάλματα οριζοντίωσης δεν είναι σημαντικά, αφού χωρίς καμία ιδιαίτερη αντιμετώπισή τους και ο ολικός έλεγχος της μεταβλητότητας αναφοράς για το πιο πάνω επίπεδο σημαντικότητας γίνεται αποδεκτός, αλλά και οι παρατηρήσεις στη σάρωση δεδομένων έγιναν αποδεκτές.

Στο παράδειγμα που αναλύθηκε, τα σφάλματα οριζοντίωσης δεν είναι σημαντικά. Επομένως, η λύση του απλοποιημένου μοντέλου γίνεται αποδεκτή.

Επίσης, μετά την εφαρμογή στατιστικών ελέγχων προκύπτει ότι οι λύσεις (1) και (2) μπορούν να θεωρηθούν ισοδύναμες. Η μέτρηση επομένως του δικτύου μπορεί να γίνει και με ένα θεοδόλιχο, σύμφωνα με όσα αναπτύχθηκαν στην εισαγωγή.

Σχετικά με τη σημαντικότητα των επιδράσεων των σφαλμάτων οριζοντίωσης θα θέλαμε συμπερασματικά να σημειώσουμε τα εξής:

α. Οι επιδράσεις του σφάλματος οριζοντίωσης μπορεί να είναι ασήμαντες στις παρατηρήσεις, οπότε ακολουθούμε το απλοποιημένο μοντέλο συνόρθωσης.

β. Μπορεί να φαίνονται σημαντικές στις παρατηρήσεις, αλλά να είναι ασήμαντες στις τελικές συντεταγμένες. Στην περίπτωση αυτή, έχουμε πρόβλημα στατιστικής αξιολόγησης των αποτελεσμάτων. Για τη σωστή αντιμετώπιση ή διευρύνουμε το στοχαστικό μοντέλο, υπολογίζοντας τις μεταβλητότητες των παρατηρήσεων με τη βοήθεια τύπων που περιγράφουν τις επιδράσεις του σφάλματος αυτού στην τελική ακρίβεια της μέτρησης [17, 18], και συνορθώνουμε σύμφωνα με τον απλοποιημένο αλγόριθμο του κεφαλαίου 3, ή δεχόμαστε ως τιμές των μεταβλητοτήτων αυτές που προκύπτουν από τις συνορθώσεις σταθμών και συνορθώνουμε με το διευρυμένο μοντέλο, σύμφωνα με το κεφάλαιο 4.

γ. Οι επιδράσεις να είναι σημαντικές τόσο στις παρατηρήσεις όσο και στα τελικά αποτελέσματα. Στην τρίτη αυτή περίπτωση, επιβάλλεται η συνόρθωση με το διευρυμένο μοντέλο του κεφαλαίου 4 της εργασίας, όπου συμμετέχουν ως άγνωστες παράμετροι και οι συνιστώσες του σφάλματος. Οι μεταβλητότητες των παρατηρήσεων προκύπτουν από τις συνορθώσεις σταθμών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Allan, A.L. (1988): "The principles of Theodolite Intersection Systems", **Survey Review** (227), vol. **29**, pp. 226-234.

2. Bayly, D.A. and W.F. Teskey (1992): "Close Range High Precision surveys for machinery alignment", **CISM Journal ACSGC** (4), vol. **46**, pp. 409-421.

3. Bφsemann (1992): "Evaluation of threedimensional geometric features of industrial objects", in: "**Presented Papers of the Working Group Sessions, August 8-12, 1992**", International Union for Surveys and Mapping, pp. 29–35.

4. Camacho, A.G. (1988): "Tridimensional adjustment with Inner Constraints in Small Control Networks", **Survey Review** (230), vol. **29,** pp. 371-382.

5. Δερμάνης, Α. (1987): "**Συνορθώσεις Παρατηρήσεων και Θεωρία Εκτίμησης, τόμος 2**", Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

6. Fraser, C.S. (1990): "On the role of the Surveying Engineer in Industrial measurement", **CISM Journal ACSGC** (1), vol. **44**, pp. 56-60.

7. Fuss, C.B. (1993): "**Software for the alignment of Industrial Machinery using theodolite directional data**", M.Sc., Department of Geomatics Engineering, The University of Calgary, UCGE Publications No 20053.

8. Kahmen, H. (1992): "Hybrid measurement robots in engineering surveys", in: "**Presented Papers of the Working Group Sessions, August 8-12, 1992**", International Union for Surveys and Mapping, pp. 1-8.

9. Kennie, T.J.M. (1990): "Electronic angle and distance measurement", in: "**Engineering Surveying Technology**". Eds.: Kennie, T.J.M. and G. Petrie, John Wiley & Sons Inc.

10. Kubik, K. (1990): "A note on industrial measurements of linear features", **Survey Review**, 30, 237, pp. 323-324.

11. Κωτσάκης, Χ. (1995): "**Μικροτριγωνισμοί υψηλής ακρίβειας. Το πρόγραμμα SMANET για τη συνόρθωση μικρών 3Δ δικτύων**", διπλωματική εργασία, Τομέας Γεωδαισίας και Τοπογραφίας ΤΑΤΜ, Α.Π.Θ.

12. Lasseur, C. (1987): "Metrology for experiments", in: "**Lecture Notes in Earth Sciences, Applied Geodesy**", Eds: Bhattacharji, S., G.M. Friedman, H.J. Neugebauer and A. Seilacher, Springer Verlag.

13. Obidowski, R. and M.A. Chapman (1993): "Processing theodolite observations with a photogrammetric bundle adjustment: An industrial survey application", **GEOMATICA,** Vol. **47**, No 3 & 4, Autumn 1993, pp. 245-259.

14. Patias, P. and D. Rossikopoulos (1992): "A System for non-metric Architectural Photogrammetry", **ISPRS 27th Congress**, Washington 1992, Vol. **29**, B5, Com. 5.

15. Robbins, A.P. (1992): "**Accuracy and Reliability Improvements for Electronic Theodolites in Industrial Surveys**", M.Sc., Department of Geomatics Engineering, The University of Calgary, UCGE Publications No 20053.

16. Ρωσσικόπουλος, Δ. (1986): "**Ολοκληρωμένα Τοπογραφικά Δίκτυα Ελέγχου**", διδακτορική διατριβή, Τομέας Γεωδαισίας και Τοπογραφίας ΤΑΤΜ, Α.Π.Θ.

17. Ρωσσικόπουλος, Δ. (1992): "**Τοπογραφικά Δίκτυα και Υπολογισμοί**", Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

18. Ρωσσικόπουλος, Δ. (1992): "**Τοπογραφικά Δίκτυα Ελέγχου Ειδικών Εφαρμογών**", Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, ΤΑΤΜ, ΑΠΘ.

19. Ρωσσικόπουλος, Δ. και Α. Φωτίου (1990): "Βέλτιστη εφαρμογή οικοπέδων με εξισώσεις παρατηρήσεων με δεσμεύσεις. Το πρόγραμμα ADCON", **Ενημερωτικό Φυλλάδιο Συλλόγου Διπλωματούχων Αγρονόμων Τοπογράφων & Μηχανικών Βορείου Ελλάδας**, 9, σελ. 25-64.

20. Shortis, M.R. and C.S. Fraser (1991): "Current Trends in Close Range optical 3D Measurement for Industrial and Engineering Applications", **Survey Review** (242), vol. **31**, pp. 187-200.

Χρ. Κωτσάκης,
Αγρονόμος-τυπογράφος μηχανικός, υποψήφιος διδάκτορας, Department of Geomatics Engineering, The University of Calgary, 2500 University Drive N.W., Calgary, Alberta, Canada T2N 1N4.

Δ. Ρωσσικόπουλος,
Αναπληρωτής καθηγητής, Τομέας Γεωδαισίας και Τοπογραφίας, Τμήμα Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών Α.Π.Θ., 540 06 Θεσσαλονίκη, Τ.Θ.Π. 473.

Extended summary

Very Accurate Close-Range Triangulations. Problems and Alternatives

CHR. KOTSAKIS
Rural and Surveying Engineer

D. ROSSIKOPOULOS
Associate Professor A.U.TH.

Abstract
The problems arising from theodolite errors in 3D Close-Range networks are presented. These kinds of networks are established in industrial applications (machinery alignment, best fittings, etc.), in surveying of monuments, etc. Special instrumentation, measurement techniques and solution algorithms are presented. Simple and extended models with additional parameters for leveling errors are analysed with emphasis on the reference frame definition problems.

1. INTRODUCTION

The role and the applications of Close-Range 3d Networks are described and the main inherent problems are discussed. The basic differences between the classical surveying networks and the Close-Range networks are outlined and, finally, a detailed overview of the various ways of dealing with the specific problems is given.

2. ADJUSTMENT OF CLOSE-RANGE 3D-NETWORKS

The main algorithm for the adjustment of 3D Close-Range networks, in the case where the mechanical errors of the theodolites are negligible, or are dealt with special measuring techniques and/or extended stochastic models, is analytically presented. The adjusted coordinates of the points are determined with respect to a reference frame whose vertical axis is realized by the main axis of the theodolites. In other words, the measured zenith angles from each reference point of the network define the orientation of the vertical axis of the reference frame. The transformation into another reference frame (e.g. realized onto measured object) can be made through a similarity transformation after the adjustment, or simultaneously in the adjustment algorithm.

Submitted: June 27, 1996 Accepted: July 8, 1999

3. ADJUSTMENT OF CLOSE-RANGE 3D-NETWORKS WITH SIMULTANEOUS ESTIMATION OF LEVELING ERRORS OF THEODOLITES

In this part an extended mathematical model is derived which includes the leveling errors of the theodolites as additional parameters in the adjustment algorithm. Special emphasis is given to the problem of definition of the reference frame of the network (rank deficiency), since the measured zenith angles from each reference point do not define a common spatial direction in this case. Various types of minimal constraints may be used, which can refer to the coordinates of the points only, or to both coordinates and parameters of the leveling errors. The analytical forms of the inner constraints for the two previous cases are presented and a third alternative is given, where the minimal constraints can be entered separately in two different steps. In the first step the vertical axis is defined and in the second step the remaining parameters for the definition of the reference frame are defined.

4. INCLUSION OF GEOMETRICAL CONSTRAINTS INTO THE ADJUSTMENT

A very useful option in the adjustment of Close-Range 3D Networks is the participation of geometrical relationships between the points as additional constraints in the solution algorithm (eg. parallelism, perpendicularity, coplanarity, points on arc, etc.). The inclusion of this kind of constraints in the solution algorithm increases the degrees of freedom in the network and complements the information of the original observations for a better estimation of the leveling errors of

the theodolites, especially when sights between theodolites have been avoided and a stronger geometry is needed. For the adjustment with geometrical constraints two different, but equivalent algorithms are presented, which can be applied regarding their capabilities and limitations and the character of the specific application.

5. APPLICATION WITH REAL DATA

In order to justify the developed algorithms for the adjustment of 3D Close-Range Networks and to test the computer program SMANET, which was created for this purpose, a network was established and measured in the Department of Surveying Engineering, University of Thessaloniki. Three optical theodolites were used for the realization of three reference points and a invar baseline was set for the determination of the scale in the network. The control points had been materialized by nineteen special designed targets, which were placed in four different vertical planes. These control points were designed to create a 3D network for calibration of photogrammetric cameras. In this part the results of the analysis of this network with the various alternative algorithms are presented and the comparison between them is discussed.

Chr. Kotsakis,
Rural and surveying engineer, Ph.D. student, Department of Geomatics Engineering, The University of Calgary, 2500 University Drive N.W., Calgary, Alberta, Canada T2N 1N4.

D. Rossikopoulos,
Associate professor, Department of Geodesy and Surveying, School of Technology, Aristotle University of Thessaloniki, Univ. Box. 473, GR-540 06 Thessaloniki.