

# Σεμιναριακό Μάθημα Ασκήσεων Υπαίθρου

## *Σύγκριση λύσεων δικτύου μέσω μετασχηματισμού συντεταγμένων*

Χ. Κωτσάκης

Τμήμα Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών

Πολυτεχνική Σχολή, ΑΠΘ



# Εισαγωγή

- Έστω ότι έχουμε διαθέσιμες δύο διαφορετικές λύσεις του ίδιου δικτύου:  $\mathbf{x}_{(1)}$  και  $\mathbf{x}_{(2)}$ .
- Στη δικιά μας περίπτωση (Α.Υ) τα διανύσματα  $\mathbf{x}_{(1)}$  και  $\mathbf{x}_{(2)}$  περιέχουν τις οριζόντιες συντ/νες που υπολογίστηκαν από διαφορετικά σενάρια συνόρθωσης του δικτύου Μεταλλικού.
- **Ζητούμενο:** η σύγκριση των δύο λύσεων.

# Σύγκριση λύσεων δικτύου

Γενικό μοντέλο σύγκρισης:

$$\mathbf{x}_{(1)} - \mathbf{x}_{(2)} = \mathbf{G}^T \boldsymbol{\theta} + \mathbf{v}$$

# Σύγκριση λύσεων δικτύου

Γενικό μοντέλο σύγκρισης:

$$\mathbf{x}_{(1)} - \mathbf{x}_{(2)} = \underbrace{\mathbf{G}^T \boldsymbol{\theta}} + \mathbf{v}$$

*εκφράζει τις συστηματικές διαφορές  
μεταξύ των δύο σετ συντεταγμένων  
(2Δ μετασχ/μός ομοιότητας)*

$\boldsymbol{\theta}$   $\rightarrow$  διάνυσμα που περιέχει 2 παραμέτρους μετάθεσης,  
1 παράμετρο μικρής στροφής και 1 παράμετρο  
διαφορικής αλλαγής κλίμακας.

# Σύγκριση λύσεων δικτύου

Γενικό μοντέλο σύγκρισης:

$$\mathbf{x}_{(1)} - \mathbf{x}_{(2)} = \mathbf{G}^T \boldsymbol{\theta} + \underbrace{\mathbf{v}}$$

*εκφράζει τις διαφορές μεταξύ των δύο σετ συντεταγμένων  
αφού αυτά προσαρμοστούν μεταξύ τους  
μέσω μετάθεσης, στροφής και αλλαγής κλίμακας*

$\mathbf{v} \longrightarrow$  σφάλματα κλεισίματος μετασχ/μού - “coordinate residuals”  
αντανακλούν τα τυχαία σφάλματα των συντεταγμένων  
από κάθε λύση δικτύου καθώς και την παραμόρφωση  
μεταξύ των λύσεων εξαιτίας διαφόρων συστηματικών  
επιδράσεων (π.χ. λόγω πλεοναζουσών δεσμεύσεων).

# Γραμμικοποιημένος μετασχηματισμός ομοιότητας

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ x_N \\ y_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}_{(1)}} \quad (1) = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ x_N \\ y_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}_{(2)}} \quad (2) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & y_1 & x_1 \\ 0 & 1 & -x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & y_N & x_N \\ 0 & 1 & -x_N & y_N \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ \mathcal{G} \\ \delta_s \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\theta}}$$

Βλέπε επίσης: Κωτσάκης Χ. (2017) Εγχειρίδιο μετασχηματισμού ομοιότητας. Διδακτικές σημειώσεις για το μάθημα των Ασκήσεων Υπαίθρου, ΤΑΤΜ/ΑΠΘ.

# Σύγκριση λύσεων δικτύου

Γενικό μοντέλο σύγκρισης:

$$\mathbf{x}_{(1)} - \mathbf{x}_{(2)} = \mathbf{G}^T \boldsymbol{\theta} + \mathbf{v}$$

**Απαραίτητοι υπολογισμοί**

(απλή συνόρθωση ελαχίστων τετραγώνων)

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{G}\mathbf{G}^T)^{-1} \mathbf{G} (\mathbf{x}_{(1)} - \mathbf{x}_{(2)})$$

$$\hat{\mathbf{v}} = (\mathbf{I} - \mathbf{G}^T (\mathbf{G}\mathbf{G}^T)^{-1} \mathbf{G}) (\mathbf{x}_{(1)} - \mathbf{x}_{(2)})$$

# Μερικές παρατηρήσεις

- Τα στοιχεία του πίνακα  $\mathbf{G}$  υπολογίζονται με βάση τις συντεταγμένες του “αρχικού” πλαισίου αναφοράς  $\mathbf{x}_{(2)}$ .
- Η εκτίμηση των παραμέτρων 2Δ μετασχηματισμού και των σφαλμάτων κλεισίματος (coordinate residuals) θα γίνει για τα εξής ζευγάρια λύσεων στο δίκτυο του Μεταλλικού:

$$\mathbf{x}_{(\text{ελαχ})} \text{ vs. } \mathbf{x}_{(\text{πλεον})} \quad \mathbf{x}_{(\text{ελαχ})} \text{ vs. } \mathbf{x}_{(\text{GPS})} \quad \mathbf{x}_{(\text{πλεον})} \text{ vs. } \mathbf{x}_{(\text{GPS})}$$

- Για κάθε ζευγάρι λύσεων θα υπολογιστούν τα statistics του αντίστοιχου διανύσματος σφαλμάτων κλεισίματος.



# Μερικές παρατηρήσεις

- Η εφαρμογή του μετασχη/μού ομοιότητας μπορεί να δημιουργεί προβλήματα στην πράξη, όπως:
  - αναξιόπιστες (μη ρεαλιστικές) εκτιμήσεις παραμέτρων
  - μεγάλες συσχετίσεις μεταξύ των παραμέτρων
  - μεγάλα σφάλματα μετασχηματισμού σε μη-κοινά σημεία
- Που μπορεί να οφείλεται αυτό?
  - αριθμητική αστάθεια συνόρθωσης λόγω αδύναμης γεωμετρίας
- Τι μπορώ να κάνω σε τέτοια περίπτωση?
  - χρήση **απλούστερου** μοντέλου μετασχηματισμού (π.χ. μόνο μεταθέσεις  $t_x, t_y$  – block/shift approach)

**Παράδειγμα**

# Διαθέσιμες λύσεις δικτύου

	$\mathbf{x}$ (m)	$\mathbf{x}'$ (m)
Σημείο 1	$x = 401848.491$ $y = 4541893.354$	$x = 401848.513$ $y = 4541893.301$
Σημείο 2	$x = 400658.525$ $y = 4540300.325$	$x = 400658.522$ $y = 4540300.292$
Σημείο 3	$x = 400105.251$ $y = 4540360.911$	$x = 400105.274$ $y = 4540360.890$
Σημείο 4	$x = 400068.727$ $y = 4540685.752$	$x = 400068.751$ $y = 4540685.723$
Σημείο 5	$x = 400296.746$ $y = 4540555.693$	$x = 400296.768$ $y = 4540555.661$

# Εκτιμήσεις παραμέτρων μετασχ/μού ομοιότητας

Παράμετροι	$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'$
$t_x$ (m)	-48.547
$t_y$ (m)	40.873
$\theta$ (arcsec)	2.35
$\delta s$ (ppm)	-8.00



# Σφάλματα κλεισίματος μετασχ/μού ομοιότητας

	$v_x$ (cm)	$v_y$ (cm)	$v_{hor}$ (cm)
Σημείο 1	<b>0.2</b>	<b>0.4</b>	<b>0.4</b>
Σημείο 2	<b>-1.5</b>	<b>-0.3</b>	<b>1.5</b>
Σημείο 3	<b>0.6</b>	<b>0.4</b>	<b>0.7</b>
Σημείο 4	<b>0.3</b>	<b>-0.2</b>	<b>0.4</b>
Σημείο 5	<b>0.5</b>	<b>-0.4</b>	<b>0.6</b>
Statistics	Max: 0.6 Min: -1.5 Mean: 0.0 Std: 0.8	Max: 0.4 Min: -0.4 Mean: 0.0 Std: 0.4	Max: 1.5 Min: 0.4 Mean: 0.7 Std: 0.4

# Εκτιμήσεις παραμέτρων μετάθεσης (μέσω shift-only μετασχ/μού)

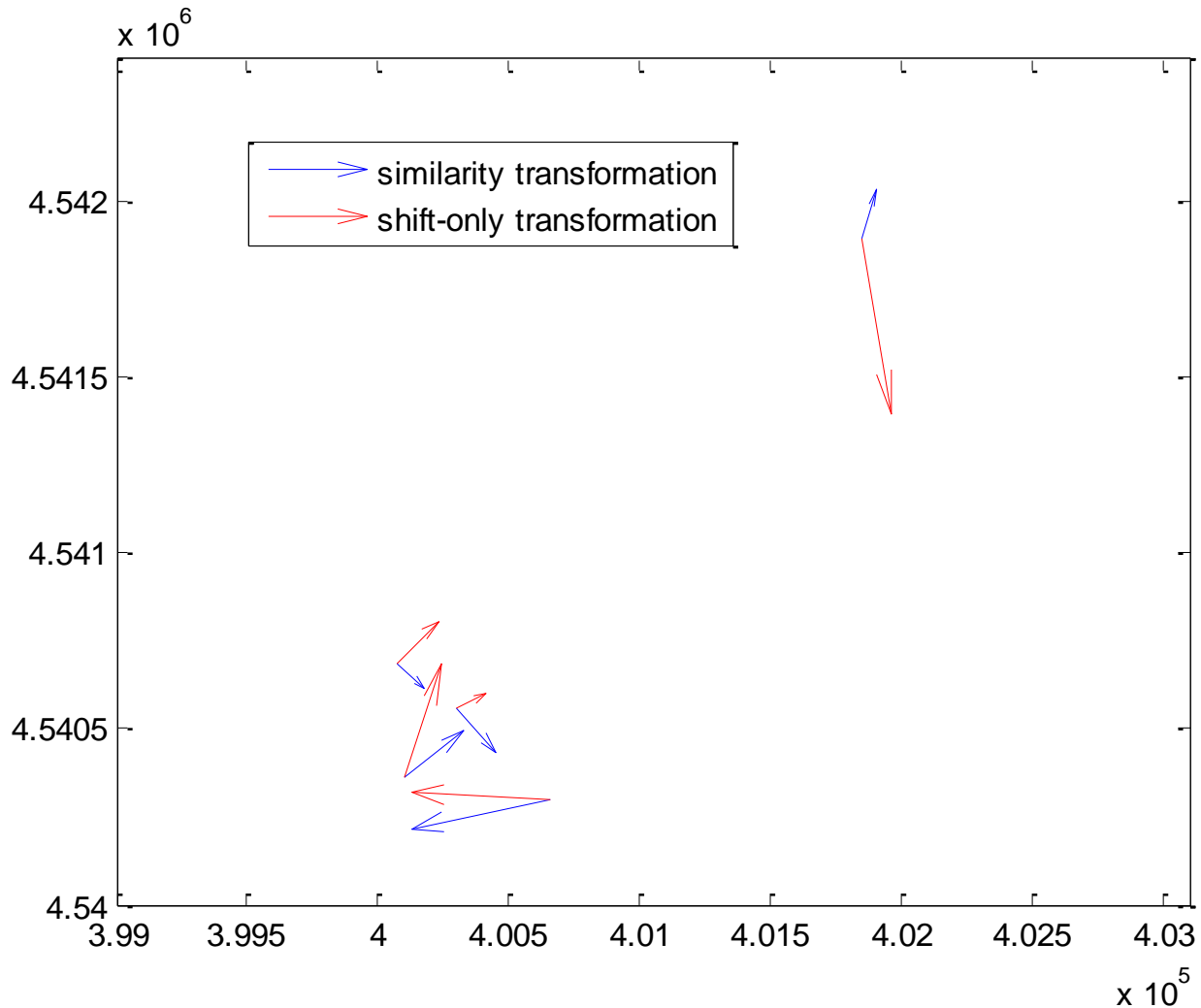
Παράμετροι	$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'$
$t_x$ (m)	0.018
$t_y$ (m)	-0.034



# Σφάλματα κλεισίματος μετασχ/μού μετάθεσης

	$v_x$ (cm)	$v_y$ (cm)	$v_{hor}$ (cm)
Σημείο 1	<b>0.4</b>	<b>-1.9</b>	<b>2.0</b>
Σημείο 2	<b>-2.1</b>	<b>0.1</b>	<b>2.1</b>
Σημείο 3	<b>0.5</b>	<b>1.3</b>	<b>1.4</b>
Σημείο 4	<b>0.6</b>	<b>0.5</b>	<b>0.8</b>
Σημείο 5	<b>0.4</b>	<b>0.2</b>	<b>0.5</b>
Statistics	Max: 0.6 Min: -2.1 Mean: 0.0 Std: 1.2	Max: 1.3 Min: -1.9 Mean: 0.0 Std: 1.2	Max: 2.1 Min: 0.5 Mean: 1.33 Std: 0.7

# Σύγκριση σφαλμάτων κλεισίματος μετασχ/μών





# Παραδοτέο υλικό

Θα παραδοθεί **ξεχωριστό τεύχος** με αναλυτική τεχνική έκθεση για τα αποτελέσματα σύγκρισης των διαφορετικών λύσεων συνόρθωσης ( $E, N$ ) στο δίκτυο ελέγχου του Μεταλλικού.

Στις επόμενες διαφάνειες δίνονται **ενδεικτικοί πίνακες αριθμητικών αποτελεσμάτων** που θα πρέπει να περιλαμβάνει η τεχνική σας έκθεση.

# Εκτιμήσεις παραμέτρων μετασχ/μού ομοιότητας μεταξύ των λύσεων δικτύου

	$\mathbf{X}_{(\text{ελαχ})}$ vs. $\mathbf{X}_{(\text{πλεον})}$	$\mathbf{X}_{(\text{ελαχ})}$ vs. $\mathbf{X}_{(\text{GPS})}$	$\mathbf{X}_{(\text{πλεον})}$ vs. $\mathbf{X}_{(\text{GPS})}$
$t_x$ (m)	...	...	...
$t_y$ (m)	...	...	...
$\mathcal{G}$ (arcsec)	...	...	...
$\delta s$ (ppm)	...	...	...

# Εκτιμήσεις παραμέτρων shift-only μετασχ/μού μεταξύ των λύσεων δικτύου

	$\mathbf{X}_{(\epsilon\lambda\alpha\chi)}$ vs. $\mathbf{X}_{(\pi\lambda\epsilon\omicron\nu)}$	$\mathbf{X}_{(\epsilon\lambda\alpha\chi)}$ vs. $\mathbf{X}_{(\text{GPS})}$	$\mathbf{X}_{(\pi\lambda\epsilon\omicron\nu)}$ vs. $\mathbf{X}_{(\text{GPS})}$
$t_x$ (m)	...	...	...
$t_y$ (m)	...	...	...

# Σφάλματα κλεισίματος του μετασχηματισμού ομοιότητας μεταξύ των λύσεων δικτύου

	$\mathbf{X}_{(\text{ελαχ})}$ vs. $\mathbf{X}_{(\text{πλεον})}$	$\mathbf{X}_{(\text{ελαχ})}$ vs. $\mathbf{X}_{(\text{GPS})}$	$\mathbf{X}_{(\text{πλεον})}$ vs. $\mathbf{X}_{(\text{GPS})}$
Σημείο 1	$V_{x1}, V_{y1}$	$V_{x1}, V_{y1}$	$V_{x1}, V_{y1}$
Σημείο 2	$V_{x2}, V_{y2}$	$V_{x2}, V_{y2}$	$V_{x2}, V_{y2}$
Σημείο 3	... , ...	... , ...	... , ...
Σημείο 4	... , ...	... , ...	... , ...
Σημείο 5	... , ...	... , ...	... , ...

και τα statistics των παραπάνω σφαλμάτων...

# Σφάλματα κλεισίματος του μετασχηματισμού ομοιότητας μεταξύ των λύσεων δικτύου (συνολικό οριζοντιογραφικό σφάλμα)

	$\mathbf{X}_{(\text{ελαχ})}$ vs. $\mathbf{X}_{(\text{πλεον})}$	$\mathbf{X}_{(\text{ελαχ})}$ vs. $\mathbf{X}_{(\text{GPS})}$	$\mathbf{X}_{(\text{πλεον})}$ vs. $\mathbf{X}_{(\text{GPS})}$
Σημείο 1	$\sqrt{v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2}$	$\sqrt{v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2}$	$\sqrt{v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2}$
Σημείο 2	$\sqrt{v_{x_2}^2 + v_{y_2}^2}$	$\sqrt{v_{x_2}^2 + v_{y_2}^2}$	$\sqrt{v_{x_2}^2 + v_{y_2}^2}$
Σημείο 3	...	...	...
Σημείο 4	...	...	...
Σημείο 5	...	...	...

και τα statistics των παραπάνω σφαλμάτων...

# Σφάλματα κλεισίματος του μετασχηματισμού μετάθεσης μεταξύ των λύσεων δικτύου

	$\mathbf{X}_{(\text{ελαχ})}$ vs. $\mathbf{X}_{(\text{πλεον})}$	$\mathbf{X}_{(\text{ελαχ})}$ vs. $\mathbf{X}_{(\text{GPS})}$	$\mathbf{X}_{(\text{πλεον})}$ vs. $\mathbf{X}_{(\text{GPS})}$
Σημείο 1	$V_{x1}, V_{y1}$	$V_{x1}, V_{y1}$	$V_{x1}, V_{y1}$
Σημείο 2	$V_{x2}, V_{y2}$	$V_{x2}, V_{y2}$	$V_{x2}, V_{y2}$
Σημείο 3	... , ...	... , ...	... , ...
Σημείο 4	... , ...	... , ...	... , ...
Σημείο 5	... , ...	... , ...	... , ...

και τα statistics των παραπάνω σφαλμάτων...

# Σφάλματα κλεισίματος του μετασχηματισμού μετάθεσης μεταξύ των λύσεων δικτύου (συνολικό οριζοντιογραφικό σφάλμα)

	$\mathbf{X}_{(\text{ελαχ})}$ vs. $\mathbf{X}_{(\text{πλεον})}$	$\mathbf{X}_{(\text{ελαχ})}$ vs. $\mathbf{X}_{(\text{GPS})}$	$\mathbf{X}_{(\text{πλεον})}$ vs. $\mathbf{X}_{(\text{GPS})}$
Σημείο 1	$\sqrt{v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2}$	$\sqrt{v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2}$	$\sqrt{v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2}$
Σημείο 2	$\sqrt{v_{x_2}^2 + v_{y_2}^2}$	$\sqrt{v_{x_2}^2 + v_{y_2}^2}$	$\sqrt{v_{x_2}^2 + v_{y_2}^2}$
Σημείο 3	...	...	...
Σημείο 4	...	...	...
Σημείο 5	...	...	...

και τα statistics των παραπάνω σφαλμάτων...