ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΟ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ

Για το μάθημα των Ασκήσεων Υπαίθρου
(και όχι μόνο..)

Χ. Κωτσάκης

ΤΑΤΜ – ΑΠΘ
Ιούλιος 2017

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή – Βασικές σχέσεις

Το γραμμικοποιημένο μοντέλο του 2Δ μετασχηματισμού ομοιότητας μεταξύ δύο σετ Καρτεσιανών συντεταγμένων $\mathbf{x}$ και $\mathbf{x}'$ σε ένα δίκτυο N σημείων περιγράφεται από τη γενική σχέση:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{G}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\theta} \tag{1}$$

ή πιο αναλυτικά

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ y_1' \\ \vdots \\ x_N' \\ y_N' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ x_N \\ y_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & y_1 & x_1 \\ 0 & 1 & -x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & y_N & x_N \\ 0 & 1 & -x_N & y_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ \vartheta \\ \delta s \end{bmatrix} \tag{2}$$

Το διάνυσμα $\boldsymbol{\theta}$ περιέχει τις θεμελιώδεις παραμέτρους του γραμμικοποιημένου μετασχηματισμού ομοιότητας, δηλαδή δύο παραμέτρους μετάθεσης (t_x, t_y), μία μικρή γωνία στροφής (ϑ) και έναν διαφορικό συντελεστή κλίμακας (δs). Οι παραπάνω εξισώσεις είναι γνωστές στη γεωδαιτική βιβλιογραφία ως **μετασχηματισμός Helmert** και αποτελούν το βασικό εργαλείο για τη σύνδεση Καρτεσιανών συστημάτων αναφοράς που παρουσιάζουν μικρές διαφορές ως προς τον προσανατολισμό και την κλίμακά τους.

Ο πίνακας μετασχηματισμού $\mathbf{G}$ έχει την ίδια αναλυτική μορφή με τον πίνακα εσωτερικών δεσμεύσεων που χρησιμοποιείται στη συνόρθωση ελευθέρων δικτύων. Τα στοιχεία του υπολογίζονται είτε μέσω των γνωστών συντεταγμένων στο αρχικό σύστημα αναφοράς (όπως φαίνεται στην εξίσωση (2)), είτε μέσω άλλων προσεγγιστικών συντεταγμένων που βρίσκονται κοντά στις τιμές του διανύσματος $\mathbf{x}$. Οποιαδήποτε από αυτές τις επιλογές για τη δημιουργία του πίνακα $\mathbf{G}$ οδηγεί πρακτικά στα ίδια αποτελέσματα τόσο κατά την επίλυση του ευθύ προβλήματος μετασχηματισμού (δηλ. τον υπολογισμό των μετασχηματισμένων συντεταγμένων $\mathbf{x}'$ για δεδομένες τιμές των παραμέτρων $\boldsymbol{\theta}$) όσο και κατά την επίλυση του αντίστροφου προβλήματος μετασχηματισμού (δηλ. την εκτίμηση των παραμέτρων μετασχηματισμού μεταξύ δύο γνωστών σετ συντεταγμένων μέσω της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων) – υπό την προυπόθεση ότι η τάξη μεγέθους των παραμέτρων στροφής και κλίμακας είναι αποδεκτά μικρή.

Για λόγους πληρότητας παραθέτουμε παρακάτω και τη γραμμικοποιημένη μορφή του 3Δ μετασχηματισμού ομοιότητας, όπου το αντίστοιχο διάνυσμα $\boldsymbol{\theta}$ περιλαμβάνει συνολικά επτά θεμελιώδεις παραμέτρους: τρεις παραμέτρους μετάθεσης, τρεις μικρές γωνίες στροφής και έναν διαφορικό συντελεστή κλίμακας.

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ y_1' \\ z_1' \\ \vdots \\ x_N' \\ y_N' \\ z_N' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ \vdots \\ x_N \\ y_N \\ z_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -z_1 & y_1 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & z_1 & 0 & -x_1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 & -y_1 & x_1 & 0 & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -z_N & y_N & x_N \\ 0 & 1 & 0 & z_N & 0 & -x_N & y_N \\ 0 & 0 & 1 & -y_N & x_N & 0 & z_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \\ \vartheta_x \\ \vartheta_y \\ \vartheta_z \\ \delta s \end{bmatrix} \tag{3}$$

Σημειώνεται ότι σε όλες τις προηγούμενες σχέσεις οι γωνίες στροφής πρέπει να εκφράζονται σε ακτίνια ενώ ο συντελεστής κλίμακας αντιστοιχεί σε αδιάστατο αριθμό (και όχι σε ppm ή ppb!).

Το γραμμικοποιημένο μοντέλο του μετασχηματισμού ομοιότητας που αναλύεται στο παρόν εγχειρίδιο δεν πρέπει να χρησιμοποιείται όταν υπάρχουν σημαντικές στροφές ή/και σημαντική διαφορά κλίμακας μεταξύ των εμπλεκομένων συστημάτων αναφοράς (π.χ. φωτογραμμετρικές εφαρμογές).

Γραμμική vs. μη-γραμμική προσέγγιση του μετασχηματισμού ομοιότητας

Το μοντέλο μετασχηματισμού της εξίσωσης (2) προκύπτει από την αυστηρή (μη-γραμμική) σχέση του 2Δ μετασχηματισμού ομοιότητας:

$$\begin{bmatrix} x_i' \\ y_i' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} + (1+\delta s)\begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} \tag{4}$$

μέσω κατάλληλης γραμμικοποίησης που οδηγεί στην παρακάτω απλουστευμένη μορφή (για την αναλυτική διαδικασία γραμμικοποίησης βλέπε στο παράρτημα που δίνεται στο τέλος του παρόντος τεύχους)

$$\begin{bmatrix} x_i' \\ y_i' \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} + \delta s \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \vartheta \\ -\vartheta & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} \tag{5}$$

που μπορεί ισοδύναμα να γραφεί ως:

$$\begin{bmatrix} x_i' \\ y_i' \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & y_i & x_i \\ 0 & 1 & -x_i & y_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ \vartheta \\ \delta s \end{bmatrix} \tag{6}$$

Το σφάλμα γραμμικοποίησης των παραπάνω εξισώσεων είναι πρακτικά αμελητέο για τις συνήθεις τιμές των παραμέτρων στροφής και κλίμακας που εμφανίζονται σε γεωδαιτικές και τοπογραφικές εφαρμογές, δηλαδή για τιμές της γωνίας ϑ που δεν υπερβαίνουν τα $\pm 10''$ και για τιμές του συντελεστή κλίμακας δs που δεν υπερβαίνουν τα 100 ppm ($\delta s \approx \pm 10^{-4}$).

Ένα **ενδιαφέρον στοιχείο** σε σχέση με το αυστηρό (μη-γραμμικό) μοντέλο του 2Δ μετασχηματισμού ομοιότητας είναι ότι μπορεί να αντικατασταθεί με ένα ισοδύναμο γραμμικό μοντέλο, χωρίς να έχουμε κανένα απολύτως σφάλμα γραμμικοποίησης! Αυτό μπορεί εύκολα να επιβεβαιωθεί, μέσω απλών πράξεων πινάκων, ξεκινώντας από την εξίσωση (4) που γράφεται ισοδύναμα ως:

$$\begin{bmatrix} x_i' \\ y_i' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & y_i & x_i \\ 0 & 1 & -x_i & y_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ (1+\delta s)\sin\vartheta \\ (1+\delta s)\cos\vartheta - 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Χρησιμοποιώντας τις βοηθητικές ποσότητες

$$a = (1+\delta s)\sin\vartheta \quad \text{και} \quad b = (1+\delta s)\cos\vartheta - 1 \tag{8}$$

η εξίσωση (7) γίνεται

$$\begin{bmatrix} x_i' \\ y_i' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & y_i & x_i \\ 0 & 1 & -x_i & y_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ a \\ b \end{bmatrix} \tag{9}$$

και αντιστοιχεί σε ισοδύναμη αλγεβρική μορφή του αυστηρού μετασχηματισμού ομοιότητας που προσομοιάζει τη γραμμικοποιημένη εξίσωση (6) με τη μόνη διαφορά ότι χρησιμοποιεί τις συνθετικές παραμέτρους a και b, αντί των αρχικών παραμέτρων ϑ και δs. **Με απλά λόγια**, ο 2Δ μετασχηματισμός ομοιότητας αντιστοιχεί σε ένα μη-γραμμικό μοντέλο για την τετράδα παραμέτρων (t_x, t_y, ϑ, δs), αλλά και σε ένα ισοδύναμο γραμμικό μοντέλο για την εναλλακτική τετράδα παραμέτρων (t_x, t_y, a, b). Σημειώνεται ότι η παραπάνω δυνατότητα "αλγεβρικής μετατροπής" του μετασχηματισμού ομοιότητας σε ισοδύναμο γραμμικό μοντέλο με τη βοήθεια συνθετικών παραμέτρων υφίσταται μόνο για την 2Δ περίπτωση, και δεν είναι εφικτή στην 3Δ περίπτωση.

Αν οι πραγματικές τιμές των παραμέτρων στροφής και κλίμακας είναι αρκετά μικρές, τότε η γραμμικοποιημένη εξίσωση (6) γίνεται πρακτικά ισοδύναμη με την αυστηρή σχέση (9). Για παράδειγμα, αν έχουμε $\vartheta=1''$ ($= 2.90888\ldots\cdot10^{-4}$ rad) και δs=20 ppm (= 0.00002), τότε:

$$a = (1+0.00002)\sin1'' = 2.90894\cdot10^{-4} \approx \vartheta \text{ (σε rad)}$$

$$b = (1+0.00002)\cos1''-1 = 1.99\cdot10^{-5} = 19.9\,\text{ppm} \approx \delta s$$

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με τη γραμμικοποιημένη μορφή του μετασχηματισμού ομοιότητας σε δίκτυα σημείων σύμφωνα με τις εξισώσεις (1)-(2). Παρά τον απλουστευτικό τους χαρακτήρα, οι συγκεκριμένες σχέσεις θεωρείται ότι εκφράζουν με (σχεδόν) απόλυτη ακρίβεια τον αυστηρό μετασχηματισμό ομοιότητας μεταξύ Καρτεσιανών συστημάτων αναφοράς σε τοπογραφικές και γεωδαιτικές εργασίες. Θα πρέπει να επισημανθεί ότι οι εξισώσεις αυτές δεν είναι **ταυτόχρονα γραμμικές** και ως προς τις παραμέτρους και ως προς τις συντεταγμένες, γεγονός όμως που δεν δημιουργεί ιδιαίτερες δυσκολίες κατά τη συνόρθωση τους όπως θα εξηγήσουμε στην επόμενη ενότητα.

Συνόρθωση του γραμμικοποιημένου μετασχηματισμού ομοιότητας

Η εκτίμηση των παραμέτρων μετασχηματισμού ομοιότητας μεταξύ δύο σετ συντεταγμένων σε ένα δίκτυο κοινών σημείων είναι ένα συνηθισμένο πρόβλημα σε γεωδαιτικές και τοπογραφικές εφαρμογές. Για την αντιμετώπιση του χρειάζεται να γίνει συνόρθωση του γραμμικοποιημένου μοντέλου της εξίσωσης (1), χρησιμοποιώντας ως παρατηρήσεις είτε το ένα, είτε και τα δύο διανύσματα $\mathbf{x}$ ή/και $\mathbf{x}'$. Σε αρκετές περιπτώσεις τα δύο σετ συντεταγμένων αναφέρονται σε διαφορετικά συστήματα αναφοράς και οι τιμές τους έχουν προκύψει από χωριστές διαδικασίες μέσω κατάλληλης επεξεργασίας παρατηρήσεων (π.χ. συνόρθωση δικτύου, ψηφιοποίηση χάρτη, κ.ά.). Συχνά, αλλά όχι πάντα, οι διαθέσιμες συντεταγμένες συνοδεύονται από τις αντίστοιχες ακρίβειες τους, ή ακόμα και από τους συνολικούς πίνακες συμ-μεταβλητοτήτων τους.

Η συνόρθωση του μετασχηματισμού ομοιότητας δεν εφαρμόζεται μόνο στην περίπτωση όπου τα διανύσματα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{x}'$ αναφέρονται σε διαφορετικά συστήματα αναφοράς. Ορισμένες φορές τα δύο σετ συντεταγμένων ενδέχεται να αναφέρονται <u>στο ίδιο σύστημα αναφοράς</u> και να παρουσιάζουν συστηματικές διαφορές μεταξύ τους λόγω του διαφορετικού τρόπου προσδιορισμού τους (π.χ. χρήση διαφορετικού τύπου παρατηρήσεων, χρήση διαφορετικών δεσμεύσεων κατά τη συνόρθωση του δικτύου, κ.ά.). Σε τέτοιες περιπτώσεις η χρήση του μετασχηματισμού ομοιότητας δίνει τη δυνατότητα να εκτιμήσουμε το μέγεθος των συστηματικών διαφορών ανάμεσα στα δύο σετ συντεταγμένων, υπό τη μορφή σχετικών μεταθέσεων, στροφών και αλλαγής κλίμακας, και να χρησιμοποιήσουμε τις αντίστοιχες παραμέτρους προκειμένου να τα προσαρμόσουμε καλύτερα μεταξύ τους.

Για τη συνόρθωση του (γραμμικοποιημένου) μετασχηματισμού ομοιότητας με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων μπορεί να χρησιμοποιηθεί είτε το μοντέλο μεικτών εξισώσεων είτε το μοντέλο εξισώσεων παρατηρήσεων. Αν παραβλέψουμε το γεγονός ότι (ορισμένα από) τα στοιχεία του πίνακα **G** ενδέχεται να αντιστοιχούν σε παρατηρούμενα μεγέθη, και θεωρήσουμε τις τιμές τους ως ντετερμινιστικές ποσότητες που είναι απαλλαγμένες από τυχαία σφάλματα, τότε η σχέση (1) αντιστοιχεί σε ένα απλό σύστημα εξισώσεων παρατήρησης που μπορεί εύκολα να συνορθωθεί χρησιμοποιώντας ως "παρατηρήσεις" τις διαφορές συντεταγμένων $\mathbf{x}'$-$\mathbf{x}$ στο δίκτυο των κοινών σημείων. Η παραδοχή αυτή είναι αποδεκτή στην πράξη αφού τα τυχαία σφάλματα των συντεταγμένων x_i και y_i που εμφανίζονται στον πίνακα **G** "φιλτράρονται" μέσω του πολλαπλασιασμού τους με τις μικρές τιμές των παραμέτρων στροφής/κλίμακας, και συνεπώς η επίδραση τους στα αποτελέσματα της συνόρθωσης θα είναι αμελητέα σε σχέση με την επίδραση των τυχαίων σφαλμάτων του βασικού διανύσματος "παρατηρήσεων" $\mathbf{x}'$-$\mathbf{x}$.

Για την καλύτερη κατανόηση της παραπάνω παραδοχής, βλέπε την ακόλουθη μαθηματική επεξήγηση όπου λαμβάνεται εξαρχής υπόψη **η επίδραση των τυχαίων σφαλμάτων σε όλες τις διαθέσιμες συντεταγμένες**:

$$\text{Εξ. (6)} \Rightarrow \begin{bmatrix} (x_i' - v_{x_i'}) - (x_i - v_{x_i}) \\ (y_i' - v_{y_i'}) - (y_i - v_{y_i}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & y_i - v_{y_i} & x_i - v_{x_i} \\ 0 & 1 & -(x_i - v_{x_i}) & y_i - v_{y_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ \vartheta \\ \delta s \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_i' - x_i \\ y_i' - y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & y_i & x_i \\ 0 & 1 & -x_i & y_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ \vartheta \\ \delta s \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -v_{y_i}\vartheta - v_{x_i}\delta s \\ v_{x_i}\vartheta - v_{y_i}\delta s \end{bmatrix}}_{\approx 0} + \begin{bmatrix} v_{x_i'} - v_{x_i} \\ v_{y_i'} - v_{y_i} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} x_i' - x_i \\ y_i' - y_i \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \simeq \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & y_i & x_i \\ 0 & 1 & -x_i & y_i \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ \vartheta \\ \delta s \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} v_{x_i'} - v_{x_i} \\ v_{y_i'} - v_{y_i} \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}} \qquad (10)$$

Συμπερασματικά, η χρήση του μοντέλου εξισώσεων παρατηρήσεων είναι μια ασφαλής επιλογή για τη συνόρθωση του γραμμικοποιημένου μετασχηματισμού ομοιότητας, είτε θεωρούνται ως παρατηρούμενα μεγέθη και τα δύο σετ συντεταγμένων, είτε μόνο το ένα από αυτά – υπό την προυπόθεση ότι η τάξη μεγέθους των παραμέτρων στροφής και κλίμακας είναι αποδεκτά μικρή.

Εφαρμόζοντας το γνωστό αλγόριθμο συνόρθωσης στο μοντέλο της εξίσωσης (1), λαμβάνουμε το εξής αποτέλεσμα για τις παραμέτρους μετασχηματισμού ομοιότητας:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{G}\mathbf{G}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{G}\,(\mathbf{x}'-\mathbf{x}) \tag{11}$$

Σημειώνεται ότι η εκτίμηση των παραμέτρων μετασχηματισμού σύμφωνα με την παραπάνω εξίσωση είναι απόλυτα ισοδύναμη με άλλες κλειστές αναλυτικές σχέσεις που δίνονται σε διάφορα συγγράμματα (βλέπε π.χ. Δερμάνης και Φωτίου 1992, σελ. 225-233).

Τα συνορθωμένα σφάλματα (ή σφάλματα κλεισίματος) του μετασχηματισμού ομοιότητας στα κοινά σημεία μπορούν να υπολογιστούν από τη σχέση:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{v}} &= \mathbf{x}'-\mathbf{x}-\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\theta}}\\ &= (\mathbf{I}-\mathbf{G}^{\mathrm{T}}(\mathbf{G}\mathbf{G}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{G})\,(\mathbf{x}'-\mathbf{x})\end{aligned} \tag{12}$$

χωρίς όμως να υπάρχει άμεσα η δυνατότητα διαχωρισμού τους ανάμεσα στα δύο σετ συντεταγμένων.

Μια γενικότερη σχέση για την εκτίμηση των παραμέτρων μετασχηματισμού είναι η εξής:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{G}\mathbf{W}\mathbf{G}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{G}\mathbf{W}(\mathbf{x}'-\mathbf{x}) \tag{13}$$

όπου ο πίνακας $\mathbf{W}$ αντιστοιχεί σε κάποιο πίνακα βάρους που καθορίζεται από τη στατιστική ακρίβεια των συντεταγμένων. Σε αυτή την περίπτωση τα συνορθωμένα σφάλματα του μετασχηματισμού ομοιότητας στα κοινά σημεία θα δίνονται από την παρακάτω σχέση:

$$\hat{\mathbf{v}} = (\mathbf{I}-\mathbf{G}^{\mathrm{T}}(\mathbf{G}\mathbf{W}\mathbf{G}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{G}\mathbf{W})\,(\mathbf{x}'-\mathbf{x}) \tag{14}$$

Τυπικές επιλογές του πίνακα βάρους είναι:

$$\mathbf{W}=\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}}^{-1}, \quad \mathbf{W}=\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}'}^{-1}, \quad \mathbf{W}=\left(\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}}+\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}'}\right)^{-1}$$

όπου $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}}$ και $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}'}$ είναι οι αντίστοιχοι πίνακες συμ-μεταβλητοτήτων των συντεταγμένων. Η χρήση **μοναδιαίου πίνακα βάρους** δεν αναιρεί τη χρησιμότητα των αποτελεσμάτων που υπολογίζονται μέσω των εξισώσεων (11)-(12) και αποτελεί μια συνηθισμένη επιλογή σε πολλά πρακτικά προβλήματα.

Πρακτική ερμηνεία των αποτελεσμάτων

Οι εκτιμήσεις $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ των παραμέτρων μετασχηματισμού ομοιότητας παρέχουν χρήσιμη πληροφορία προκειμένου να αξιολογήσουμε τη "συμβατότητα" των συντεταγμένων $\mathbf{x}$ και $\mathbf{x}'$ στο δίκτυο των N κοινών σημείων. Συγκεκριμένα, οι εκτιμήσεις των παραμέτρων μετάθεσης και στροφής δείχνουν κατά πόσο τα δύο σετ συντεταγμένων υλοποιούν το ίδιο σύστημα αναφοράς, δηλαδή κατά πόσο υπάρχει ένα συστηματικό offset ή/και στροφή μεταξύ τους. Προφανώς, αν τα δύο σετ αναφέρονται εξαρχής σε διαφορετικά συστήματα αναφοράς, τότε οι εκτιμήσεις αυτές θα προσδιορίζουν τη σχετική μετάθεση και στροφή μεταξύ των αντίστοιχων συστημάτων αναφοράς. Σε περίπτωση που τα δύο σετ συντεταγμένων αναφέρονται στο ίδιο σύστημα αναφοράς, τότε οι εκτιμήσεις των παραμέτρων μετάθεσης και στροφής δεν θα έχουν γενικά μηδενικές τιμές (γιατί;). Το χρήσιμο στοιχείο, από πρακτική σκοπιά, είναι να αξιολογηθεί η σημαντικότητα των τιμών τους και το κατά πόσο αυτές μπορούν να "δικαιολογηθούν" από την ακρίβεια των διαθέσιμων συντεταγμένων (π.χ. αν αποτελούν ένδειξη για την ύπαρξη συστηματικών σφαλμάτων σε κάποιο από τα δύο σετ συντεταγμένων).

Η εκτίμηση του συντελεστή κλίμακας εκφράζει τη μέση γραμμική παραμόρφωση μεταξύ των συντεταγμένων $\mathbf{x}$ και $\mathbf{x}'$ εξαιτίας της επίδρασης διαφόρων παραγόντων που μπορεί να έχουν επηρεάσει με συστηματικό τρόπο τις τιμές τους (π.χ. χρήση δεσμεύσεων κακής ποιότητας σε μία από τις δύο λύσεις δικτύου, χρήση διαφορετικού τύπου μετρήσεων κατά τον προσδιορισμό των συντεταγμένων, χρήση προβληματικού οργάνου κατά τη διαδικασία συλλογής των μετρήσεων, κ.ά.). Το κρίσιμο ερώτημα, όπως και στην περίπτωση των παραμέτρων μετάθεσης και στροφής, είναι η αξιολόγηση της τιμής της συγκεκριμένης παραμέτρου σε σχέση με το αναμενόμενο μέγεθος των τυχαίων σφαλμάτων στις διαθέσιμες συντεταγμένες.[1]

Τα συνορθωμένα σφάλματα $\hat{\mathbf{v}}$ του μετασχηματισμού ομοιότητας μπορούν να αξιοποιηθούν για την ανάλυση της σχετικής ακρίβειας μεταξύ των συντεταγμένων $\mathbf{x}$ και $\mathbf{x}'$ – ή της απόλυτης ακρίβειας του ενός σετ αν θεωρήσουμε ότι το άλλο έχει αμελητέα σφάλματα – καθώς και για την ανίχνευση γεωμετρικών παραμορφώσεων που ενδέχεται να υπάρχουν μεταξύ τους. Θεωρητικά, τα σφάλματα αυτά οφείλουν να έχουν μια τυχαία συμπεριφορά και η τάξη μεγέθους τους αντανακλά τη στατιστική ακρίβεια των διαθέσιμων συντεταγμένων. Αν κάποιο από τα δύο σετ είναι επηρεασμένο από σημαντικές συστηματικές επιδράσεις ή άλλα χονδροειδή σφάλματα, τότε οι τιμές των $\hat{\mathbf{v}}$ θα επηρεαστούν ανάλογα και θα απορροφήσουν το τμήμα των μη-τυχαίων επιδράσεων που δεν μπορεί να περιγραφεί μέσω μιας απλής μετάθεσης, στροφής ή/και αλλαγής κλίμακας. Σε τέτοιες περιπτώσεις η ανάλυση των συνορθωμένων σφαλμάτων προσφέρει χρήσιμες πληροφορίες για τη μελέτη της γεωμετρικής παραμόρφωσης μεταξύ των $\mathbf{x}$ και $\mathbf{x}'$. Η μελέτη αυτή συνήθως περιλαμβάνει τη χαρτογράφηση και μοντελοποίηση της διανυσματικής συμπεριφοράς των συνορθωμένων σφαλμάτων στο δίκτυο των κοινών σημείων, και χρησιμοποιείται συχνά σε πολλές γεωδαιτικές και τοπογραφικές εφαρμογές.

[1] Τέτοιου είδους "ερμηνεία" των αποτελεσμάτων είναι εφικτή αν όλες οι παράμετροι του μετασχηματισμού ομοιότητας έχουν εκτιμηθεί με πολύ καλή ακρίβεια μέσα από τη διαδικασία συνόρθωσης, γεγονός το οποίο δεν είναι πάντα εφικτό σε πρακτικά προβλήματα (βλέπε επόμενες ενότητες).

Συνόρθωση του γραμμικοποιημένου μετασχηματισμού ομοιότητας με αναγωγή των συντεταγμένων στο κέντρο βάρους τους

Γενικές παρατηρήσεις

Η αναγωγή των αρχικών συντεταγμένων $\mathbf{x}$ στο κέντρο βάρους τους είναι μία απλή διαδικασία που διευκολύνει τον υπολογισμό των παραμέτρων μετασχηματισμού ομοιότητας. Από αριθμητική σκοπιά, ο υπολογισμός αυτός απαιτεί την αντιστροφή του συμμετρικού πίνακα $\mathbf{GG}^{\mathrm{T}}$ (βλέπε εξ. (11)) ο οποίος έχει την εξής μορφή:

$$\mathbf{GG}^{\mathrm{T}} = \left[\begin{array}{cc|cc} N & 0 & N\overline{y} & N\overline{x} \\ 0 & N & -N\overline{x} & N\overline{y} \\ \hline N\overline{y} & -N\overline{x} & N\overline{r}^2 & 0 \\ N\overline{x} & N\overline{y} & 0 & N\overline{r}^2 \end{array}\right] = N \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \overline{y} & \overline{x} \\ 0 & 1 & -\overline{x} & \overline{y} \\ \hline \overline{y} & -\overline{x} & \overline{r}^2 & 0 \\ \overline{x} & \overline{y} & 0 & \overline{r}^2 \end{array}\right] \tag{15}$$

όπου N είναι ο αριθμός των κοινών σημείων, $\overline{x}$ και $\overline{y}$ είναι οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους του δικτύου στο σύστημα αναφοράς των αρχικών συντεταγμένων:

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \quad , \quad \overline{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \tag{16}$$

και η ποσότητα $\overline{r}$ αντιστοιχεί στη μέση τετραγωνική απόσταση των σημείων από την αρχή του συστήματος αναφοράς των αρχικών συντεταγμένων:

$$\overline{r} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 + y_i^2} \tag{17}$$

Στις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές ο πίνακας $\mathbf{GG}^{\mathrm{T}}$ έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

- δεν είναι διαγώνιος πίνακας,
- τα στοιχεία του μπορεί να έχουν σημαντικές αριθμητικές διακυμάνσεις (π.χ. $> 10^5$), ιδιαίτερα όταν οι τιμές των $\overline{x}$ ή/και $\overline{y}$ είναι μεγάλες,

Τα παραπάνω μπορούν να δημιουργήσουν προβλήματα κατά την εκτίμηση των παραμέτρων μετασχηματισμού εξαιτίας της αριθμητικής αστάθειας που προκαλείται στην επίλυση των κανονικών εξισώσεων. Τέτοιου είδους προβλήματα γίνονται εντονότερα στην περίπτωση του 3Δ μετασχηματισμού ομοιότητας όπου απαιτείται η αντιστροφή ενός πλήρη πίνακα $\mathbf{GG}^{\mathrm{T}}$ διαστάσεων 7×7.

Για να αποφύγουμε την αντιστροφή του πίνακα $\mathbf{GG}^{\mathrm{T}}$ μπορούμε να μετατρέψουμε το μοντέλο του γραμμικοποιημένου μετασχηματισμού ομοιότητας σε μια ισοδύναμη μορφή που οδηγεί σε διαγώνιο σύστημα κανονικών εξισώσεων! Με αυτό τον τρόπο διευκολύνουμε την υπολογιστική διαδικασία της συνόρθωσης και αποφεύγουμε, σε κάποιο βαθμό, τη συσσώρευση αριθμητικών σφαλμάτων που μπορούν να προκύψουν εξαιτίας της αντιστροφής ενός μη-διαγώνιου πίνακα.

Προσοχή. Η διαγωνοποίηση των κανονικών εξισώσεων της σχέσης (11) εξασφαλίζει απλά την ευκολότερη υλοποίηση του αλγορίθμου συνόρθωσης και δεν βελτιώνει τη *στατιστική ακρίβεια* των τελικών εκτιμήσεων των παραμέτρων μετασχηματισμού ομοιότητας.

<u>Ανηγμένος μετασχηματισμός ομοιότητας στο κέντρο βάρους του δικτύου</u>

Η μετατροπή του γραμμικοποιημένου μετασχηματισμού ομοιότητας σύμφωνα με το σκεπτικό που αναπτύχθηκε στην προηγούμενη ενότητα, μπορεί εύκολα να γίνει ξεκινώντας από τις βασικές σχέσεις:

$$x'_i = x_i + t_x + y_i \vartheta + x_i \delta s \tag{18α}$$

$$y'_i = y_i + t_y - x_i \vartheta + y_i \delta s \tag{18β}$$

Οι παραπάνω σχέσεις εκφράζουν τον 2Δ μετασχηματισμό ομοιότητας σε οποιοδήποτε σημείο $i = 1, 2, \ldots, N$ του δικτύου, και μπορούν να γραφούν στην ισοδύναμη μορφή:

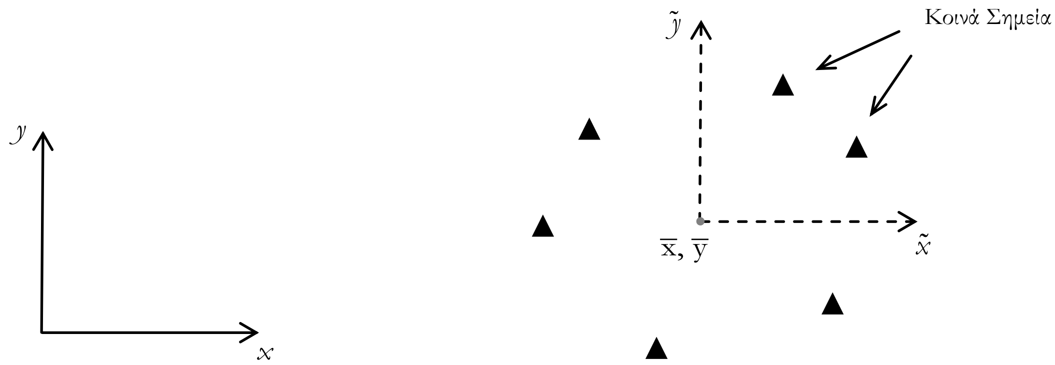
$$x'_i = (x_i - \bar{x}) + (t_x + \bar{x} + \bar{y}\,\vartheta + \bar{x}\,\delta s) + (y_i - \bar{y})\,\vartheta + (x_i - \bar{x})\delta s \tag{19α}$$

$$y'_i = (y_i - \bar{y}) + (t_y + \bar{y} - \bar{x}\,\vartheta + \bar{y}\,\delta s) - (x_i - \bar{x})\,\vartheta + (y_i - \bar{y})\delta s \tag{19β}$$

όπου οι όροι $\bar{x}$ και $\bar{y}$ αντιστοιχούν στις συντεταγμένες του κέντρου βάρους του δικτύου στο σύστημα αναφοράς των αρχικών συντεταγμένων. Ορίζουμε επίσης τις βοηθητικές ποσότητες:

$$\tilde{x}_i = x_i - \bar{x} \quad \text{και} \quad \tilde{y}_i = y_i - \bar{y} \tag{20}$$

που αντιστοιχούν στις ανηγμένες τιμές των αρχικών συντεταγμένων στο κέντρο βάρους τους. Με απλά λόγια, οι παραπάνω ποσότητες εκφράζουν τις συντεταγμένες των κοινών σημείων ως προς το αρχικό σύστημα αναφοράς <u>αφότου αυτό όμως μετατεθεί στη φυσική θέση που ορίζεται από τις συντεταγμένες</u> $\bar{x}$ και $\bar{y}$ (βλέπε παρακάτω σχήμα).



Σχ. 1

Χρησιμοποιώντας τους προηγούμενους συμβολισμούς, οι εξισώσεις μετασχηματισμού (19α) και (19β) μπορούν να γραφούν ισοδύναμα ως εξής:

$$x'_i = \tilde{x}_i + t_x^* + \tilde{y}_i \vartheta + \tilde{x}_i \delta s \tag{21α}$$

$$y'_i = \tilde{y}_i + t_y^* - \tilde{x}_i \vartheta + \tilde{y}_i \delta s \tag{21β}$$

όπου οι <u>νέες παράμετροι μετάθεσης</u> t_x^* και t_y^* ορίζονται μέσω των βοηθητικών σχέσεων:

$$\begin{bmatrix} t_x^* \\ t_y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{y} & \overline{x} \\ -\overline{x} & \overline{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta \\ \delta s \end{bmatrix} \tag{22}$$

Γενικεύοντας τις εξισώσεις (21α) και (21β) για όλα τα σημεία του δικτύου, θα έχουμε τελικά το τροποποιημένο μοντέλο του 2Δ μετασχηματισμού ομοιότητας

$$\mathbf{x}' = \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{G}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\theta}^* \tag{23}$$

ή πιο αναλυτικά

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ y'_1 \\ \vdots \\ x'_N \\ y'_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{y}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_N \\ \tilde{y}_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & \tilde{y}_1 & \tilde{x}_1 \\ 0 & 1 & -\tilde{x}_1 & \tilde{y}_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \tilde{y}_N & \tilde{x}_N \\ 0 & 1 & -\tilde{x}_N & \tilde{y}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_x^* \\ t_y^* \\ \vartheta \\ \delta s \end{bmatrix} \tag{24}$$

Η συνόρθωση του παραπάνω μοντέλου για την εκτίμηση των παραμέτρων μετασχηματισμού οδηγεί στη σχέση:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{*} = (\tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{G}}^{\mathrm{T}})^{-1}\tilde{\mathbf{G}}\,(\mathbf{x}'-\tilde{\mathbf{x}}) \tag{25}$$

η οποία έχει το πλεονέκτημα ότι απαιτεί την αντιστροφή ενός διαγώνιου πίνακα! Πράγματι μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι η αναλυτική μορφή του πίνακα $\tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{G}}^{\mathrm{T}}$ είναι:

$$\tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{G}}^{\mathrm{T}} = N\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \tilde{r}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{r}^2 \end{array}\right] \tag{26}$$

όπου ο όρος $\tilde{r}^2$ δίνεται από τη σχέση:

$$\tilde{r}^2 = \bar{r}^2 - (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) \tag{27}$$

Το διάνυσμα $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{*}$ περιέχει τις εκτιμήσεις των παραμέτρων μετασχηματισμού μεταξύ των σετ συντεταγμένων $\tilde{\mathbf{x}}$ και $\mathbf{x}'$. Το διάνυσμα αυτό είναι διαφορετικό από το διάνυσμα $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ που υπολογίζεται μέσω της εξίσωσης (11) και περιέχει τις εκτιμήσεις των παραμέτρων μετασχηματισμού μεταξύ των σετ συντεταγμένων $\mathbf{x}$ και $\mathbf{x}'$. Πιο συγκεκριμένα, οι εκτιμήσεις των παραμέτρων στροφής και κλίμακας θα είναι ίδιες, δηλαδή

$$\hat{\vartheta}_{\text{εξ.}(25)} = \hat{\vartheta}_{\text{εξ.}(11)} = \hat{\vartheta} \qquad \text{και} \qquad \delta\hat{s}_{\text{εξ.}(25)} = \delta\hat{s}_{\text{εξ.}(11)} = \delta\hat{s} \tag{28}$$

ενώ οι εκτιμήσεις των παραμέτρων μετάθεσης θα διαφέρουν σύμφωνα με τις σχέσεις

$$\hat{t}^{*}_{x_{\text{εξ.}(25)}} - \hat{t}_{x\,\text{εξ.}(11)} = \bar{x} + \bar{y}\,\hat{\vartheta} + \bar{x}\,\delta\hat{s} \tag{29}$$

$$\hat{t}^{*}_{y_{\text{εξ.}(25)}} - \hat{t}_{y\,\text{εξ.}(11)} = \bar{y} - \bar{x}\,\hat{\vartheta} + \bar{y}\,\delta\hat{s} \tag{30}$$

Συνοψίζοντας την προηγούμενη διαδικασία θα έχουμε, κατά σειρά, τα εξής βήματα για τον εναλλακτικό προσδιορισμό των παραμέτρων μετασχηματισμού ομοιότητας:

1. Δημιουργία των διανυσμάτων συντεταγμένων $\mathbf{x}$ και $\mathbf{x}'$ που αναφέρονται στα συστήματα αναφοράς που μας ενδιαφέρουν.

2. Αναγωγή των συντεταγμένων $\mathbf{x}$ στο κέντρο βάρους τους και δημιουργία του διανύσματος ανηγμένων συντεταγμένων $\tilde{\mathbf{x}}$.

3. Δημιουργία του πίνακα $\tilde{\mathbf{G}}$ με βάση τις τιμές των ανηγμένων συντεταγμένων $\tilde{\mathbf{x}}$.

4. Υπολογισμός του διανύσματος $\hat{\boldsymbol{\theta}}^*$ μέσω της εξίσωσης (25).
(ο πίνακας $\tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{G}}^{\mathrm{T}}$ που χρειάζεται να αντιστραφεί θα είναι διαγώνιος)

5. Οι τιμές των παραμέτρων στροφής και κλίμακας στο διάνυσμα $\hat{\boldsymbol{\theta}}^*$ αντιστοιχούν στις εκτιμήσεις των παραμέτρων μετασχηματισμού $\hat{\vartheta}$ και $\delta\hat{s}$ μεταξύ των σετ συντεταγμένων $\mathbf{x}$ και $\mathbf{x}'$.

6. Οι τιμές των παραμέτρων μετάθεσης στο διάνυσμα $\hat{\boldsymbol{\theta}}^*$ θα πρέπει να "μετασχηματιστούν" στις εκτιμήσεις των παραμέτρων μετάθεσης μεταξύ των σετ συντεταγμένων $\mathbf{x}$ και $\mathbf{x}'$ σύμφωνα με τις σχέσεις (29) και (30).

Η αναγωγή στο κέντρο βάρους του δικτύου μπορεί να εφαρμοστεί **(και) στις συντεταγμένες του δεύτερου σετ $\mathbf{x}'$**, χωρίς αυτό όμως να προσφέρει κάποιο επιπλέον πλεονέκτημα σε σχέση με την προηγούμενη διαδικασία αναγωγής που αφορούσε μόνο στις συντεταγμένες του πρώτου σετ. Σε μια τέτοια περίπτωση το τροποποιημένο μοντέλο του 2Δ μετασχηματισμού ομοιότητας θα έχει τη γενική μορφή:

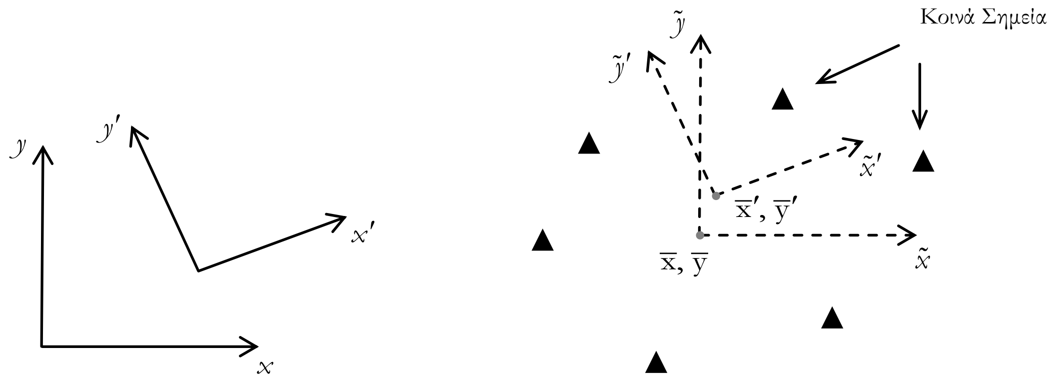
$$\tilde{\mathbf{x}}' = \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{G}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta}^* \tag{31}$$

όπου το ανηγμένο διάνυσμα $\tilde{\mathbf{x}}$ και ο πίνακας $\tilde{\mathbf{G}}$ είναι ακριβώς ίδια με αυτά που εμφανίζονται στην εξίσωση (25). Τα στοιχεία του νέου ανηγμένου διανύσματος $\tilde{\mathbf{x}}'$ υπολογίζονται μέσω των βοηθητικών σχέσεων:

$$\tilde{x}'_i = x'_i - \bar{x}' \quad \text{και} \quad \tilde{y}'_i = y'_i - \bar{y}' \tag{32}$$

Οι ποσότητες $\bar{x}'$ και $\bar{y}'$ αντιστοιχούν στις συντεταγμένες του κέντρου βάρους του δικτύου ως προς το δεύτερο σύστημα αναφοράς (βλέπε Σχ. 2) και προσδιορίζονται με βάση τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\bar{x}' = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x'_i \ , \qquad \bar{y}' = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y'_i \tag{33}$$



Σχ. 2

Η εκτίμηση των παραμέτρων μετασχηματισμού σύμφωνα με το τροποποιημένο μοντέλο της εξίσωσης (31) θα είναι:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{*} = (\tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{G}}^{\mathrm{T}})^{-1}\tilde{\mathbf{G}}\,(\tilde{\mathbf{x}}' - \tilde{\mathbf{x}}) \tag{34}$$

Οι εκτιμήσεις των παραμέτρων στροφής και κλίμακας μεταξύ των ανηγμένων συντεταγμένων $\tilde{\mathbf{x}}$ και $\tilde{\mathbf{x}}'$ θα είναι ίδιες με τις εκτιμήσεις των αντίστοιχων παραμέτρων που συνδέουν τα διανύσματα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{x}'$, δηλαδή

$$\hat{\vartheta}_{\text{εξ.}(34)} = \hat{\vartheta}_{\text{εξ.}(11)} = \hat{\vartheta} \qquad \text{και} \qquad \delta\hat{s}_{\text{εξ.}(34)} = \delta\hat{s}_{\text{εξ.}(11)} = \delta\hat{s} \tag{35}$$

ενώ οι παράμετροι μετάθεσης θα διαφέρουν σύμφωνα με τις παρακάτω σχέσεις (<u>προσοχή</u>: οι σχέσεις αυτές είναι διαφορετικές από τις εξισώσεις (29) και (30))

$$\hat{t}^{*}_{x_{\text{εξ.}(34)}} - \hat{t}_{x\ \text{εξ.}(11)} = \bar{x} - \bar{x}' + \bar{y}\,\hat{\vartheta} + \bar{x}\,\delta\hat{s} \tag{36}$$

$$\hat{t}^{*}_{y_{\text{εξ.}(34)}} - \hat{t}_{\mathrm{y}\ \text{εξ.}(11)} = \bar{y} - \bar{y}' - \bar{x}\,\hat{\vartheta} + \bar{y}\,\delta\hat{s} \tag{37}$$

Σημαντική παρατήρηση.

Το κέντρο βάρους ενός τοπογραφικού ή γεωδαιτικού δικτύου είναι ένα ιδεατό σημείο, η θέση του οποίου είναι μονοσήμαντα καθορισμένη και ανεξάρτητη του συστήματος αναφοράς που χρησιμοποιούμε για τον προσδιορισμό των συντεταγμένων των κορυφών του – ακριβώς όπως το κέντρο μάζας σε ένα φυσικό σώμα είναι ένα μοναδικά καθορισμένο σημείο. Αυτό σημαίνει ότι τα βοηθητικά σημεία με συντεταγμένες $\bar{x}, \bar{y}$ (ως προς το πρώτο σύστημα αναφοράς) και $\bar{x}', \bar{y}'$ (ως προς το δεύτερο σύστημα αναφοράς) πρέπει θεωρητικά να ταυτίζονται και να συμπίπτουν με το (μοναδικό) κέντρο βάρους του δικτύου. **Στο Σχ. 2 τα σημεία αυτά απεικονίζονται σε διαφορετικές θέσεις μόνο για τη διευκόλυνση της εποπτικής αντίληψης του αναγνώστη σχετικά με τη διαδικασία αναγωγής των συντεταγμένων $\mathbf{x}$ και $\mathbf{x}'$ στις αντίστοιχες μέσες τιμές τους**.

Σύμφωνα με την προηγούμενη παρατήρηση, οι παράμετροι μετάθεσης μεταξύ των ανηγμένων συντεταγμένων $\tilde{\mathbf{x}}$ και $\tilde{\mathbf{x}}'$ που προσδιορίζονται από την εξίσωση (34) θα είναι πάντα ίσες με μηδέν! Λαμβάνοντας υπόψη τις εξισώσεις (36) και (37) προκύπτουν συνεπώς οι παρακάτω σχέσεις που συνδέουν τις εκτιμήσεις των παραμέτρων μετασχηματισμού μεταξύ των διανυσμάτων $\mathbf{x}$ και $\mathbf{x}'$:

$$\hat{t}_x = \bar{x}' - \bar{x} - \bar{y}\,\hat{\vartheta} - \bar{x}\,\delta\hat{s} \tag{38}$$

$$\hat{t}_y = \bar{y}' - \bar{y} + \bar{x}\,\hat{\vartheta} - \bar{y}\,\delta\hat{s} \tag{39}$$

Οι σχέσεις αυτές αποτελούν ένα είδος "δεσμεύσεων" που οφείλουν να ικανοποιούνται πάντα από τη λύση συνόρθωσης ελαχίστων τετραγώνων (με μοναδιαίο πίνακα βάρους) στο γραμμικοποιημένο μοντέλο του 2Δ μετασχηματισμού ομοιότητας. Η απόδειξη τους είναι σχετικά εύκολη και αφήνεται ως άσκηση για τον αναγνώστη.

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι εξισώσεις (38) και (39) μπορούν να γραφούν ισοδύναμα ως εξής

$$\begin{bmatrix} \bar{x}' \\ \bar{y}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & \bar{y} & \bar{x} \\ 0 & 1 & -\bar{x} & \bar{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{t}_x \\ \hat{t}_y \\ \hat{\vartheta} \\ \delta\hat{s} \end{bmatrix} \tag{40}$$

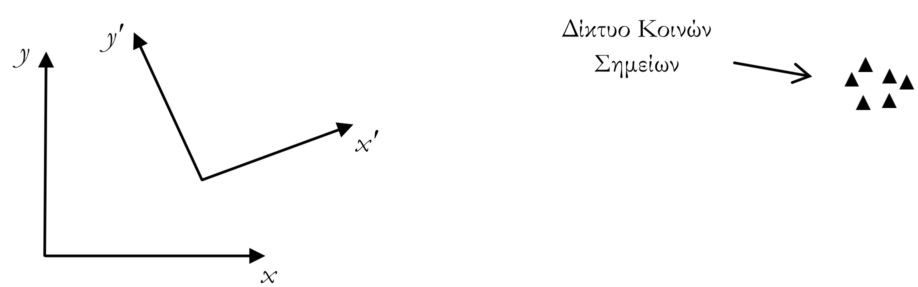
και εκφράζουν τη **διατήρηση της θέσης του κέντρου βάρους του δικτύου** κατά το μετασχηματισμό ομοιότητας από ένα σύστημα αναφοράς συντεταγμένων σε κάποιο άλλο. Η διατήρηση αυτή δεν ισχύει κατ' ανάγκη σε άλλα μοντέλα μετασχηματισμού συντεταγμένων (π.χ. αφινικός μετασχηματισμός, πολυωνυμικός μετασχηματισμός, κ.ά.).

Προβλήματα που δεν λύνει η διαδικασία αναγωγής συντεταγμένων στο κέντρο βάρους τους

Καταρχήν θα πρέπει να τονιστεί ότι η συνόρθωση του μετασχηματισμού ομοιότητας χρησιμοποιώντας ανηγμένα σετ συντεταγμένων στο κέντρο βάρους τους **δεν οδηγεί σε απευθείας εκτιμήσεις των παραμέτρων μετάθεσης** μεταξύ των συστημάτων αναφοράς που μας ενδιαφέρουν. Για το λόγο αυτό είναι απαραίτητο να εφαρμόζονται οπωσδήποτε οι κατάλληλες διορθώσεις στις εκτιμήσεις των παραμέτρων μετάθεσης t_x^* και t_y^* σύμφωνα με τις εξισώσεις που δόθηκαν στην προηγούμενη ενότητα (βλέπε εξ. (29)-(30) ή εξ. (36)-(37) για τις περιπτώσεις απλής ή διπλής αναγωγής συντεταγμένων, αντίστοιχα).

Το πλεονέκτημα της αναγωγής συντεταγμένων στο κέντρο βάρους τους είναι ότι οδηγούν σε ένα διαγώνιο σύστημα κανονικών εξισώσεων για τον προσδιορισμό των παραμέτρων μετασχηματισμού. Το γεγονός αυτό δημιουργεί συχνά την παρανόηση ότι επιτυγχάνεται μία πλήρης αποσυσχέτιση (*de-correlation*) μεταξύ των εκτιμήσεων των παραμέτρων μετασχηματισμού και για το λόγο αυτό τα αποτελέσματα της συνόρθωσης μέσω αναγωγής συντεταγμένων στο κέντρο βάρους τους θα έχουν καλύτερη ακρίβεια από τα αντίστοιχα αποτελέσματα που λαμβάνονται μέσω της κλασικής διαδικασίας συνόρθωσης. Ένα τέτοιο συμπέρασμα είναι εντελώς λανθασμένο αφού δεν λαμβάνει υπόψη την επίδραση της διόρθωσης που πρέπει να εφαρμοστεί στις παραμέτρους μετάθεσης και η οποία εξαρτάται άμεσα από τις εκτιμήσεις των παραμέτρων στροφής και κλίμακας (βλέπε εξ. (29)-(30) και εξ. (36)-(37)). Μέσω της συγκεκριμένης διόρθωσης εισάγεται μια αναπόφευκτη συσχέτιση μεταξύ των τελικών παραμέτρων μετάθεσης (t_x, t_y) και των παραμέτρων στροφής και κλίμακας $(\vartheta, \delta s)$ που θα είναι ακριβώς ίδια με αυτή που δημιουργείται από την απευθείας συνόρθωση του μετασχηματισμού ομοιότητας χωρίς να εφαρμόσουμε την αναγωγή συντεταγμένων στο κέντρο βάρους τους. Συμπερασματικά, η ακρίβεια εκτίμησης των παραμέτρων μετασχηματισμού μεταξύ $\mathbf{x}$ και $\mathbf{x}'$ δεν μπορεί να βελτιωθεί με την αναγωγή συντεταγμένων στο κέντρο βάρους τους.

Σε αρκετές περιπτώσεις, η εκτίμηση των παραμέτρων μετασχηματισμού είτε μέσω της κλασικής διαδικασίας, είτε μέσω αναγωγής των συντεταγμένων στο κέντρο βάρους τους, μπορεί να είναι προβληματική εξαιτίας της “αδύναμης” γεωμετρικής μορφής του δικτύου. Ειδικότερα, αν το δίκτυο των κοινών σημείων καλύπτει μικρή έκταση σε σχέση με την απόσταση των κορυφών του από την αρχή των συστημάτων αναφοράς που μας ενδιαφέρουν (βλέπε Σχ. 3) τότε θα υπάρχει δυσκολία διαχωρισμού της επίδρασης των παραμέτρων μετάθεσης, στροφής και κλίμακας στις συντεταγμένες των κοινών σημείων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την υψηλή συσχέτιση και χαμηλή ακρίβεια στις εκτιμήσεις των παραμέτρων μετασχηματισμού, οι τιμές των οποίων ενδέχεται να είναι εντελώς αναξιόπιστες και μη-ρεαλιστικές (βλέπε Παράδειγμα 2 στην επόμενη ενότητα).



Σχ. 3

Σημαντικό σχόλιο. Η τάξη μεγέθους των $\overline{x}$ και $\overline{y}$ καθορίζει τη "γεωμετρική αδυναμία" που μπορεί να υπάρχει σε προβλήματα συνόρθωσης του μετασχηματισμού ομοιότητας. Αν οι ποσότητες αυτές έχουν μεγάλες τιμές, τότε (όπως φαίνεται και από τις εξισώσεις (38)-(39)) ένα μικρό σφάλμα εκτίμησης στις παραμέτρους στροφής και κλίμακας είναι δυνατό να δημιουργήσει – μέσω του πολλαπλασιασμού του με τις τιμές των $\overline{x}$, $\overline{y}$ – ένα πολύ μεγάλο σφάλμα στις αντίστοιχες εκτιμήσεις των παραμέτρων μετάθεσης!

Ένας απλός και αποτελεσματικός τρόπος για την αντιμετώπιση προβλημάτων λόγω "αδύναμης γεωμετρικής μορφής" του δικτύου των κοινών σημείων είναι να αγνοηθεί η επίδραση ορισμένων παραμέτρων του μετασχηματισμού ομοιότητας και να χρησιμοποιηθεί ένα απλούστερο μοντέλο που περιλαμβάνει, για παράδειγμα, μόνο παραμέτρους μετάθεσης. Με αυτό τον τρόπο μπορεί να επιτευχθεί ο προσδιορισμός αξιόπιστων (και καλύτερης ακρίβειας) εκτιμήσεων για τις παραμέτρους που συμμετέχουν στο απλοποιημένο μοντέλο μετασχηματισμού, χωρίς να επηρεασθεί ιδιαίτερα το μέγεθος των αντίστοιχων συνορθωμένων σφαλμάτων (βλέπε Παράδειγμα 2 στην επόμενη ενότητα).

Αριθμητικά παραδείγματα

Τα παρακάτω παραδείγματα έχουν καθαρά διδακτικό χαρακτήρα και παρουσιάζουν αριθμητικά αποτελέσματα για διάφορες περιπτώσεις εκτίμησης των παραμέτρων μετασχηματισμού ομοιότητας με βάση τους αλγορίθμους που αναλύθηκαν στις προηγούμενες ενότητες.

Παράδειγμα 1

Δίνεται το ακόλουθο δίκτυο 4 σημείων με γνωστές συντεταγμένες σε δύο διαφορετικά συστήματα αναφοράς.

Πίνακας 1.

	$\mathbf{x}$ (m)	$\mathbf{x}'$ (m)
Σημείο 1	$x = 1000.000$ $y = 1000.000$	$x' = 1000.911$ $y' = 998.840$
Σημείο 2	$x = 2000.000$ $y = 1000.000$	$x' = 2000.936$ $y' = 998.749$
Σημείο 3	$x = 1000.000$ $y = 2000.000$	$x' = 1000.926$ $y' = 1998.761$
Σημείο 4	$x = 2000.000$ $y = 2000.000$	$x' = 2000.968$ $y' = 1998.719$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (11) λαμβάνουμε τις ακόλουθες εκτιμήσεις για τις παραμέτρους μετασχηματισμού ομοιότητας μεταξύ των δύο σετ συντεταγμένων:

$\hat{t}_x = 0.883\ \mathrm{m}$, $\hat{t}_y = -1.149\ \mathrm{m}$, $\hat{\vartheta} = 9.28\ \mathrm{arcsec}$, $\delta\hat{s} = -10.50\ \mathrm{ppm}$.

Εναλλακτικά, αν εφαρμόσουμε πρώτα την αναγωγή των αρχικών συντεταγμένων $\mathbf{x}$ στο κέντρο βάρους τους και στη συνέχεια χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (25), τότε λαμβάνουμε τις παρακάτω εκτιμήσεις για τις παραμέτρους μετασχηματισμού ομοιότητας:

$\hat{t}_x^* = 1500.935\ \mathrm{m}$, $\hat{t}_y^* = 1498.767\ \mathrm{m}$, $\hat{\vartheta} = 9.28\ \mathrm{arcsec}$, $\delta\hat{s} = -10.50\ \mathrm{ppm}$.

Οι παράμετροι μετάθεσης $\hat{t}_x^*$ και $\hat{t}_y^*$ πρέπει να μετασχηματιστούν, με χρήση των εξισώσεων (29)-(30), στις παραμέτρους μετάθεσης μεταξύ των σετ συντεταγμένων $\mathbf{x}$ και $\mathbf{x}'$, δηλαδή

$$\hat{t}_x = \hat{t}_x^* - \bar{x} - \bar{y}\,\hat{\vartheta} - \bar{x}\,\delta\hat{s} = 0.883\ \mathrm{m},$$

$$\hat{t}_y = \hat{t}_y^* - \bar{y} + \bar{x}\,\hat{\vartheta} - \bar{y}\,\delta\hat{s} = -1.149\ \mathrm{m}.$$

Τα συνορθωμένα σφάλματα του μετασχηματισμού ομοιότητας για το συγκεκριμένο παράδειγμα υπολογίζονται μέσω της εξίσωσης (12) και δίνονται αναλυτικά στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 2.

	v_x (cm)	v_y (cm)
Σημείο 1	-0.7	4.5
Σημείο 2	2.8	-0.1
Σημείο 3	-3.7	-2.3
Σημείο 4	1.5	-2.0
Statistics	Max: 2.8 Min: -3.7 Mean: 0.0 Std: 2.9	Max: 4.5 Min: -2.3 Mean: 0.0 Std: 3.2

Τέλος, παρατίθεται και ο **πίνακας συντελεστών συσχέτισης** των τελικών εκτιμήσεων των παραμέτρων μετασχηματισμού. Ο πίνακας αυτός υπολογίζεται μέσω του "πίνακα συμμεταβλητοτήτων" $(\mathbf{G}\mathbf{G}^{\mathrm{T}})^{-1}$ με κατάλληλη αναγωγή των στοιχείων του.

Πίνακας 3.

	$\hat{t}_x$	$\hat{t}_y$	$\hat{\vartheta}$	$\delta\hat{s}$
$\hat{t}_x$	1	0.00	-0.67	-0.67
$\hat{t}_y$		1	0.67	-0.67
$\hat{\vartheta}$			1	0.00
$\delta\hat{s}$				1

<u>Παράδειγμα 2</u>

Δίνεται το ακόλουθο δίκτυο 5 σημείων με γνωστές συντεταγμένες σε δύο διαφορετικά πλαίσια αναφοράς. Οι τιμές του πρώτου σετ συντεταγμένων αναφέρονται στο σύστημα ΕΓΣΑ87/ΤΜ87 και έχουν προκύψει μέσω κλασικών τοπογραφικών μετρήσεων και χρήση ελαχίστων δεσμεύσεων κατά τη συνόρθωση του δικτύου. Οι τιμές του δεύτερου σετ συντεταγμένων αναφέρονται επίσης στο σύστημα ΕΓΣΑ87/ΤΜ87 και έχουν προκύψει μέσω μετρήσεων GPS και χρήση ελαχίστων δεσμεύσεων κατά τη συνόρθωση του δικτύου.

Πίνακας 4.

	$\mathbf{x}$ (m)	$\mathbf{x}'$ (m)
Σημείο 1	$x = 400748.491$ $y = 4541093.354$	$x' = 400748.513$ $y' = 4541093.301$
Σημείο 2	$x = 400658.525$ $y = 4540300.325$	$x' = 400658.522$ $y' = 4540300.292$
Σημείο 3	$x = 400105.251$ $y = 4540360.911$	$x' = 400105.274$ $y' = 4540360.890$
Σημείο 4	$x = 400068.727$ $y = 4540685.752$	$x' = 400068.751$ $y' = 4540685.723$
Σημείο 5	$x = 400296.746$ $y = 4540555.693$	$x' = 400296.768$ $y' = 4540555.661$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (11) λαμβάνουμε τις ακόλουθες εκτιμήσεις για τις παραμέτρους μετασχηματισμού ομοιότητας μεταξύ των δύο σετ συντεταγμένων:

$$\hat{t}_x = -100.948 \text{ m}, \quad \hat{t}_y = 126.687 \text{ m}, \quad \hat{\vartheta} = 5.05 \text{ arcsec}, \quad \delta\hat{s} = -25.75 \text{ ppm}.$$

Είναι προφανές ότι οι τιμές των παραμέτρων μετάθεσης είναι μη-ρεαλιστικές και έχουν επηρεαστεί από μεγάλο σφάλμα εκτίμησης εξαιτίας της "κακής γεωμετρίας" του προβλήματος συνόρθωσης (μικρή έκταση δικτύου σε σχέση με την απόσταση των κορυφών του από την αρχή του συστήματος αναφοράς → μεγάλες τιμές για $\bar{x}$ και $\bar{y}$). Προσέξτε ότι οι συντεταγμένες των κοινών σημείων δεν διαφέρουν περισσότερο από μερικά εκατοστά ανάμεσα στα δύο πλαίσια αναφοράς (βλέπε Πίνακα 4) και παρόλα αυτά οι εκτιμήσεις των παραμέτρων μετάθεσης εμφανίζονται να ξεπερνούν τα 100 m!

Τα συνορθωμένα σφάλματα του μετασχηματισμού ομοιότητας για το συγκεκριμένο παράδειγμα υπολογίζονται μέσω της εξίσωσης (12) και δίνονται αναλυτικά στον παρακάτω πίνακα. Οι τιμές τους είναι πολύ μικρές (< 1 cm) σε όλες τις κορυφές του δικτύου, παρά το γεγονός ότι οι παράμετροι μετάθεσης που χρησιμοποιούνται έχουν επηρεαστεί από μεγάλα σφάλματα εκτίμησης. Αυτό σημαίνει ότι τα δύο σετ συντεταγμένων $\mathbf{x}$ και $\mathbf{x}'$ μπορούν να συνδεθούν με ακρίβεια καλύτερη του 1 cm μέσω ενός μετασχηματισμού ομοιότητας, οι παράμετροι του οποίου όμως δεν μπορούν να εκτιμηθούν με ικανοποιητική ακρίβεια εξαιτίας της μεγάλης συσχέτισης που παρουσιάζουν στην περιοχή του δικτύου. Όσο αντιφατικό και αν ακούγεται το συγκεκριμένο συμπέρασμα, αυτό πράγματι συμβαίνει!

Πίνακας 5.

	v_x (cm)	v_y (cm)
Σημείο 1	0.6	0.0
Σημείο 2	-0.2	-0.2
Σημείο 3	0.8	-0.2
Σημείο 4	0.0	-0.3
Σημείο 5	0.7	-0.4
Statistics	Max: 0.8 Min: -0.2 Mean: 0.4 Std: 0.4	Max: 0.0 Min: -0.4 Mean: -0.2 Std: 0.1

Επίσης παρατίθεται ο **πίνακας συντελεστών συσχέτισης** για τις εκτιμήσεις των παραμέτρων μετασχηματισμού στο συγκεκριμένο παράδειγμα. Ο πίνακας αυτός υπολογίζεται μέσω του "πίνακα συμμεταβλητοτήτων" $(\mathbf{GG}^{\mathrm{T}})^{-1}$ μετά από κατάλληλη αναγωγή των στοιχείων του, σύμφωνα με τον ορισμό του συντελεστή συσχέτισης για ζεύγος τυχαίων μεταβλητών. Από τις τιμές των συντελεστών συσχέτισης είναι φανερό ότι τα ζεύγη $(\hat{t}_x, \hat{\vartheta})$ και $(\hat{t}_y, \delta\hat{s})$ είναι σχεδόν απόλυτα συσχετισμένα και για το λόγο αυτό η ακρίβεια των παραμέτρων μετάθεσης θα είναι ιδιαίτερα χαμηλή.

Πίνακας 6.

	$\hat{t}_x$	$\hat{t}_y$	$\hat{\vartheta}$	$\delta\hat{s}$
$\hat{t}_x$	1	0.000	**-0.996**	-0.088
$\hat{t}_y$		1	0.088	**-0.996**
$\hat{\vartheta}$			1	0.000
$\delta\hat{s}$				1

Εναλλακτικά, αν εφαρμόσουμε πρώτα την αναγωγή των συντεταγμένων $\mathbf{x}$ και $\mathbf{x}'$ στα αντίστοιχα κέντρα βάρους τους, και στη συνέχεια χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (34), τότε λαμβάνουμε τις παρακάτω εκτιμήσεις για τις παραμέτρους μετασχηματισμού ομοιότητας μεταξύ των (ανηγμένων) σετ συντεταγμένων $\tilde{\mathbf{x}}$ και $\tilde{\mathbf{x}}'$:

$$\hat{t}_x^* = 0.000\ \mathrm{m}\,,\quad \hat{t}_y^* = 0.000\ \mathrm{m}\,,\quad \hat{\vartheta} = 5.05\ \mathrm{arcsec}\,,\quad \delta\hat{s} = -25.75\ \mathrm{ppm}\,.$$

Σε αυτή την περίπτωση, όπως είναι αναμενόμενο, οι εκτιμήσεις των παραμέτρων μετάθεσης είναι μηδενικές αφού τα βοηθητικά σημεία με συντεταγμένες $\bar{x},\bar{y}$ και $\bar{x}',\bar{y}'$ ταυτίζονται μεταξύ τους και συμπίπτουν με το κέντρο βάρους του δικτύου. Οι (μηδενικές) εκτιμήσεις $\hat{t}_x^*$ και $\hat{t}_y^*$ μπορούν στη συνέχεια να μετασχηματιστούν, με χρήση των εξισώσεων (36) και (37), στις (μη-μηδενικές) εκτιμήσεις των παραμέτρων μετάθεσης μεταξύ των σετ συντεταγμένων $\mathbf{x}$ και $\mathbf{x}'$, δηλαδή

$$\hat{t}_x = \hat{t}_x^* + (\bar{x}' - \bar{x}) - \bar{y}\,\hat{\vartheta} - \bar{x}\,\delta\hat{s} = -100.948\ \mathrm{m}\,,$$

$$\hat{t}_y = \hat{t}_y^* + (\bar{y}' - \bar{y}) + \bar{x}\,\hat{\vartheta} - \bar{y}\,\delta\hat{s} = 126.687\ \mathrm{m}\,.$$

οι οποίες προφανώς ταυτίζονται με τις εκτιμήσεις που προέκυψαν από την κλασική διαδικασία συνόρθωσης του μετασχηματισμού ομοιότητας.

Για τον προσδιορισμό ενός **ρεαλιστικού σετ παραμέτρων μετασχηματισμού** μπορούμε να επιλέξουμε ένα απλούστερο μοντέλο που να περιλαμβάνει, για παράδειγμα, μόνο δύο παραμέτρους μετάθεσης. Σε αυτή την περίπτωση λαμβάνουμε τις ακόλουθες εκτιμήσεις για τις παραμέτρους μετασχηματισμού μεταξύ των σετ συντεταγμένων $\mathbf{x}$ και $\mathbf{x}'$:

$$\hat{t}_x = 0.018\ \mathrm{m}\,,\quad \hat{t}_y = -0.034\ \mathrm{m}\,.$$

Σε αντίθεση με τις μη-ρεαλιστικές τιμές μεταθέσεων που υπολογίστηκαν από τη συνόρθωση του 2Δ μετασχηματισμού ομοιότητας, οι παραπάνω τιμές αποτελούν μία αξιόπιστη λύση για τις παραμέτρους μετάθεσης μεταξύ των σετ συντεταγμένων $\mathbf{x}$ και $\mathbf{x}'$. Τα αντίστοιχα συνορθωμένα σφάλματα που προκύπτουν σε αυτή την περίπτωση δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 7.

	v_x (cm)	v_y (cm)
Σημείο 1	0.4	-1.9
Σημείο 2	-2.1	0.1
Σημείο 3	0.5	1.3
Σημείο 4	0.6	0.5
Σημείο 5	0.4	0.2
Statistics	Max: 0.6 Min: -2.1 Mean: 0.0 Std: 1.2	Max: 1.3 Min: -1.9 Mean: 0.0 Std: 1.2

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα του παραπάνω πίνακα με τα αντίστοιχα αποτελέσματα του Πίνακα 5, συμπεραίνουμε ότι η αγνόηση των παραμέτρων στροφής και κλίμακας δεν προκαλεί κάποια σημαντική διαφοροποίηση στο μέγεθος των συνορθωμένων σφαλμάτων. Συγκεκριμένα, η δειγματική τυπική απόκλιση των σφαλμάτων στην περίπτωση του απλού μετασχηματισμού μετάθεσης χειροτερεύει κατά 8 mm (για τις x συντεταγμένες) και 11 mm (για τις y συντεταγμένες), παρά το γεγονός ότι οι τιμές των παραμέτρων μετάθεσης μεταξύ των δύο μοντέλων διαφέρουν περίπου κατά 10^4!

Ένα **επιπόλαιο λάθος** που μπορεί ορισμένες φορές να γίνει από μη-έμπειρους χρήστες είναι η αντικατάσταση των μη-ρεαλιστικών εκτιμήσεων των παραμέτρων μετάθεσης με τις πιο αξιόπιστες εκτιμήσεις που υπολογίστηκαν από το απλό μοντέλο, και στη συνέχεια η συνδυασμένη χρήση τους με τις διαθέσιμες εκτιμήσεις των παραμέτρων στροφής και κλίμακας για την ενιαία εφαρμογή του 2Δ μετασχηματισμού ομοιότητας. Στο πλαίσιο του συγκεκριμένου παραδείγματος και με βάση τα προηγούμενα αποτελέσματα, αυτό ισοδυναμεί με την επιλογή του παρακάτω σετ παραμέτρων για την υλοποίηση του μετασχηματισμού ομοιότητας μεταξύ των διανυσμάτων $\mathbf{x}$ και $\mathbf{x}'$:

$$\hat{t}_x = 0.018\,\mathrm{m}\,,\quad \hat{t}_y = -0.034\,\mathrm{m}\,,\quad \hat{\vartheta} = 5.05\,\mathrm{arcsec}\,,\quad \delta\hat{s} = -25.75\,\mathrm{ppm}\,.$$

Μια τέτοια επιλογή είναι εντελώς αυθαίρετη αφού αγνοεί την ισχυρή συσχέτιση που υπάρχει μεταξύ των παραμέτρων μετάθεσης και στροφής/κλίμακας όταν αυτές προσδιορίζονται από δεδομένες συντεταγμένες σε ένα τοπικό δίκτυο κοινών σημείων. Ο χρήστης έχει την εντύπωση ότι επιφέρει κάποιου είδους "βελτιωτική διόρθωση" στις παραμέτρους μετάθεσης του μετασχηματισμού ομοιότητας, αλλά παραβλέπει το γεγονός ότι οι νέες (ρεαλιστικές) τιμές των παραμέτρων μετάθεσης δεν είναι "συμβατές" με τις διαθέσιμες εκτιμήσεις των παραμέτρων στροφής και κλίμακας.

Τα σφάλματα κλεισίματος του μετασχηματισμού ομοιότητας που προκύπτουν στο συγκεκριμένο παράδειγμα όταν χρησιμοποιείται το (λανθασμένο) σετ παραμέτρων που δόθηκε προηγουμένως φαίνονται στον επόμενο πίνακα. Από τις τιμές των σφαλμάτων είναι προφανές ότι το επιλεγμένο σετ παραμέτρων δημιουργεί μία **συστηματική παρέκκλιση** (*bias*) μεγαλύτερη των 100 m στις μετασχηματισμένες συντεταγμένες!

Πίνακας 8.

	v_x (m)	v_y (m)
Σημείο 1	-100.964	126.722
Σημείο 2	-100.972	126.719
Σημείο 3	-100.962	126.719
Σημείο 4	-100.969	126.718
Σημείο 5	-100.962	126.718

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Γραμμικοποίηση του 2Δ μετασχηματισμού ομοιότητας για γεωδαιτικές/τοπογραφικές εφαρμογές

Το αυστηρό μοντέλο $\mathbf{x}'_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta})$ του 2Δ μετασχηματισμού ομοιότητας δίνεται από το μη-γραμμικό σύστημα εξισώσεων

$$\begin{bmatrix} x'_i \\ y'_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} + (1+\delta s)\begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} \qquad (\Pi 1)$$

Υποθέτοντας ότι η γωνία στροφής έχει μικρές τιμές (π.χ. $-10'' < \vartheta < 10''$) τότε θα ισχύει με πολύ ικανοποιητική ακρίβεια ότι

$$\cos\vartheta \simeq 1 \qquad \text{και} \qquad \sin\vartheta \simeq \vartheta \qquad (\Pi 2)$$

και, συνεπώς, το μοντέλο του 2Δ μετασχηματισμού ομοιότητας μπορεί να πάρει την απλούστερη (προσεγγιστική) μορφή

$$\begin{bmatrix} x'_i \\ y'_i \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} + (1+\delta s)\begin{bmatrix} 1 & \vartheta \\ -\vartheta & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} \qquad (\Pi 3)$$

Επιπλέον, αν θεωρήσουμε ότι ο διαφορικός συντελεστής κλίμακας έχει τιμές που δεν ξεπερνούν τα 100 ppm ($-10^{-4} < \delta s < 10^{-4}$), τότε μπορούμε να αγνοήσουμε με ασφάλεια και τον όρο δεύτερης τάξης στην τελευταία εξίσωση, δηλαδή

$$\delta s\, \vartheta \simeq 0 \qquad (\Pi 4)$$

και τελικά θα έχουμε

$$\begin{bmatrix} x'_i \\ y'_i \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1+\delta s & \vartheta \\ -\vartheta & 1+\delta s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} \qquad (\Pi 5)$$

ή αλλιώς

$$\begin{bmatrix} x'_i \\ y'_i \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} + \delta s\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \vartheta \\ -\vartheta & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} \qquad (\Pi 6)$$

Η τελευταία σχέση μπορεί να εκφραστεί στην ισοδύναμη αλγεβρική μορφή

$$\begin{bmatrix} x_i' \\ y_i' \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & y_i & x_i \\ 0 & 1 & -x_i & y_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ \vartheta \\ \delta s \end{bmatrix} \tag{Π7}$$

και αποτελεί το γνωστό γραμμικοποιημένο μοντέλο Helmert για τον 2Δ μετασχηματισμό ομοιότητας. Με ανάλογο τρόπο μπορεί να εξαχθεί και το αντίστοιχο γραμμικοποιημένο μοντέλο για τον 3Δ μετασχηματισμό ομοιότητας.

Αν, αντί για την προηγούμενη διαδικασία, εφαρμοστεί ο κλασικός τρόπος γραμμικοποίησης μέσω ανάπτυξης σε σειρά Taylor, δηλαδή

$$\mathbf{x}_i' \simeq \mathbf{f}(\mathbf{x}_i^{\text{o}}, \boldsymbol{\theta}^{\text{o}}) + \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}^{\text{o}},\ \mathbf{x}_i=\mathbf{x}_i^{\text{o}}} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^{\text{o}}) + \left.\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{x}_i}\right|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}^{\text{o}},\ \mathbf{x}_i=\mathbf{x}_i^{\text{o}}} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_i^{\text{o}}) \tag{Π8}$$

τότε θα πάρουμε παρόμοιο αποτέλεσμα με αυτό της εξίσωσης (Π7), υπό την προυπόθεση ότι θα χρησιμοποιήσουμε μηδενικές προσεγγιστικές τιμές για τις παραμέτρους στροφής και κλίμακας ($\vartheta^{\text{o}} = 0$, $\delta s^{\text{o}} = 0$). Οι προσεγγιστικές τιμές των μεταθέσεων (t_x^{o}, t_y^{o}) δεν παίζουν κανένα ρόλο και απαλείφονται κατά την αλγεβρική επεξεργασία της εξίσωσης (Π8). Το τελικό αποτέλεσμα της παραπάνω διαδικασίας γραμμικοποίησης θα είναι

$$\begin{bmatrix} x_i' \\ y_i' \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & y_i^{\text{o}} & x_i^{\text{o}} \\ 0 & 1 & -x_i^{\text{o}} & y_i^{\text{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ \vartheta \\ \delta s \end{bmatrix} \tag{Π9}$$

Η προηγούμενη εξίσωση μπορεί να θεωρηθεί ισοδύναμη με την (Π7) αν επιλέξουμε ως προσεγγιστικές συντεταγμένες ($x_i^{\text{o}}, y_i^{\text{o}}$) τις διαθέσιμες τιμές ($x_i, y_i$) στο αρχικό σύστημα αναφοράς.

Για τη συνόρθωση του 2Δ μετασχηματισμού ομοιότητας **μέσω του μοντέλου εξισώσεων παρατηρήσεων** μπορεί να χρησιμοποιηθεί είτε η σχέση (Π7), είτε η σχέση (Π9), δίνοντας ισοδύναμα αποτελέσματα σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στις προηγούμενες ενότητες του παρόντος τεύχους.